

# Métodos numéricos aplicados na concepção arquitetônica e projeto estrutural da construção civil

## ORGANIZADORES

João da Costa Pantoja  
Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa  
Marcio Augusto Roma Buzar  
Naiara Guimarães de Oliveira Porto  
Nathaly Sarasty Narvaez





CENTRO DE INFORMAÇÃO  
OSCAR NIEMEYER  
TORRE DE TV DIGITAL DE BRASÍLIA

**REITORA**  
**VICE-REITOR**  
**DECANA DE PESQUISA E INOVAÇÃO**  
**DECANATO DE PÓS GRADUAÇÃO**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
Márcia Abrahão Moura  
Henrique Huelva  
Maria Emília Machado Telles Walter  
Lucio Remuzat Rennó Junior

**DIRETOR**  
**VICE DIRETORA**

**FACULDADE DE ARQUITETURA E URBANISMO**  
Caio Frederico e Silva  
Maria Cláudia Candeia

**COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO**  
**DIAGRAMAÇÃO**  
**FOTO CAPA**

Valmor Cerqueira Pazos  
Thalita Dantas Perfeito de Castro  
Marcio Augusto Roma Buzar

**CONSELHO EDITORIAL**

Abner Luis Calixter  
Ana Carolina Cordeiro Correia Lima  
Humberto Salazar Amorim Varum  
Marta Adriana Bustos Romero

**ORGANIZADORES**

João da Costa Pantoja  
Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa  
Marcio Augusto Roma Buzar  
Naiara Guimarães de Oliveira Porto  
Nathaly Sarasty Narvaez

**DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)**  
**(CÂMARA BRASILEIRA DO LIVRO, SP, BRASIL)**

Métodos numéricos aplicados na concepção arquitetônica e projeto estrutural da construção civil [livro eletrônico] / organização João da Costa Pantoja...[et al.].  
-- 1. ed. --

Brasília, DF : LaSUS FAU : Editora Universidade de Brasília, 2023.  
PDF

Vários autores. Outros organizadores: João da Costa Pantoja, Marcio Augusto Roma Buzar, Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa, Naiara Guimarães de Oliveira Porto, Nathaly Sarasty Narvaez.

**Bibliografia.**

ISBN 978-65-84854-12-3

1. Engenharia civil 2. Estruturas – Análise (Engenharia)

I. Pantoja, João da Costa. II. Buzar, Marcio Augusto Roma.

III. Porto, Naiara Guimarães de Oliveira. IV. Narvaez, Nathaly Sarasty.

V. Inojosa, Leonardo da Silveira Pirillo.

23-152448

CDD-624.15

**ÍNDICES PARA CATÁLOGO SISTEMÁTICO:**

1. Engenharia civil 624.15

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

## **ORGANIZADORES E AUTORES**

**JOÃO DA COSTA PANTOJA | ORGANIZADOR E AUTOR**

**LEONARDO DA SILVEIRA PIRILLO INOJOSA | | ORGANIZADOR E AUTOR**

**MARCIO AUGUSTO ROMA BUZAR | ORGANIZADOR E AUTOR**

**NAIARA GUIMARÃES DE OLIVEIRA PORTO | ORGANIZADOR E AUTOR**

**NATHALY SARASTY NARVAEZ | ORGANIZADOR E AUTOR**

**LUIZ FERNANDO MARTHA**

**LUIZ ELOY VAZ\*\***

**OSVALDO LUIZ C. SOUZA**

**EMIL DE SOUZA SÁNCHEZ FILHO**

**MARTA DE SOUZA LIMA VELASCO**

**PAUL ALEJANDRO ANTEZANA\*\***

**MARCO AURÉLIO BESSA**

**LENILDO SANTOS SILVA**

**JOSÉ HUMBERTO MATIAS DE PAULA**

**MARCOS H. RITTER DE GREGÓRIO**

**\*\* In memoriam**

O Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia é um tradicional evento científico das áreas de Ciências e Engenharias, de regularidade anual, e que tem sido realizado desde o ano de 1977, quando foi organizado na cidade do Rio de Janeiro. A partir do ano de 2007, o CILAMCE tornou-se o evento anual promovido pela ABMEC. Ao longo das décadas, o evento já foi realizado em diversas cidades de todas as regiões do Brasil. Algumas edições também aconteceram em outros países, tais como: Argentina, Chile, Espanha, Itália, Portugal e França. É um evento internacional que atrai renomados pesquisadores e profissionais de diversos países, devido a sua relevância mundial para as áreas relacionadas ao desenvolvimento científico e tecnológico.

Durante o congresso são apresentados e discutidos desenvolvimentos de ponta relacionados aos Métodos Computacionais com aplicações diversas em Ciências Aplicadas, como a Arquitetura e Engenharia. O Congresso também abrange áreas como: Aeroespacial, Nuclear, Inteligência Artificial, Materiais Avançados, Indústria, Infraestrutura, Comunicações, Energias Renováveis, Monitoramento e Prevenção de Desastres Naturais, Saneamento Básico, Construção Civil, Segurança Hídrica, entre outras. Por este motivo, o CILAMCE tem papel fundamental como fórum de debate para pesquisadores e desenvolvedores de tecnologia de ponta de grande relevância para o desenvolvimento do país.

O mini simpósio denominado Métodos Numéricos Aplicados na Concepção Arquitetônica e Projeto Estrutural da Construção Civil presente desde 2016 no CILAMCE, visa aproximar as áreas do conhecimento e mostrar que o dimensionamento do sistema estrutural desempenha um papel essencial na determinação do projeto arquitetônico. Projetos que exploram a relação entre arquitetura e estrutura e a relação direta entre forma e estrutura, onde a definição do sistema estrutural tem participação efetiva desde sua concepção, proporcionam obras marcadas pela ousadia estrutural e grandes desafios tecnológicos.

Este mini simpósio visa reunir contribuições e obter dados que, por meio de análises que utilizam tecnologias computacionais e métodos numéricos, permitam entender como o projeto estrutural aliado à criação arquitetônica proporciona resultados estéticos inovadores. Estudos nesse sentido ressaltam a importância do conhecimento técnico para a realização de projetos de boa qualidade, evidenciando o protagonismo do sistema estrutural na forma arquitetônica. Essas análises contribuem para o entendimento da importância do conhecimento técnico e tecnológico promovido via métodos numéricos na produção de uma arquitetura inovadora.

A coordenação do mini simpósio Métodos Numéricos Aplicados na Concepção Arquitetônica e Projeto Estrutural da Construção Civil é feita desde 2016 pelos professores Dr. Eng. João Costa Pantoja e Dr. Eng. Márcio Augusto Roma Buzar, ambos do Departamento de Tecnologia da Faculdade de Arquitetura e Urbanismo e pelo Dr. Arq. Leonardo da Silveira P. Inojosa do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia, todos professores da Universidade de Brasília (UNB). Este livro traz uma coletânea de contribuições dos coordenadores em conjunto com outros autores, pesquisadores colaboradores da área desde 2009, com artigos que precederam e deram origem à criação do mini simpósio, abrangendo o período de 2016 até 2022 já apresentados no mini simpósio.

Aproveitamos para agradecer ao Grupo de Pesquisa da Universidade do Porto da Unidade de Investigação CONSTRUCT - Instituto de I&D em Estruturas e Construções - financiada por fundos nacionais através da FCT/MCTES (PIDDAC) pela parceria e participação na montagem e revisão dos textos dos artigos envolvidos.

Agradecemos imensamente a contribuição dada por todos.

Junho de 2023

# ÍNDICE

## **MODELO DE BIELAS E TIRANTES GERADOS POR OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E ELEMENTOS INDUTORES**

1	INTRODUÇÃO	19
2	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COMO PROCEDIMENTO DE PROJETO	20
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA VIA MÉTODO SIMP	21
3.1	Minimização da energia de deformação com aplicação das restrições	21
4	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	24
4.1	Método das Assíntotas Móveis – MMA	24
5	ELEMENTOS INDUTORES	27
6	EXEMPLOS	28
6.1	Estrutura de Viga Parede – VP1	28
6.2	Estrutura de Viga Parede – VP2	31
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
8	AGRADECIMENTOS	34
9	REFERÊNCIAS	34

## **UM CRITÉRIO BASEADO EM CONFIABILIDADE PARA AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DE MODELOS DE BIELAS E TIRANTES EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

1	INTRODUÇÃO	39
2	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COMO PROCEDIMENTO DE PROJETO	40

2.1	Exemplo	41
3	MODELO PROPOSTO PELO ACI 318-02 (2002)	42
4	MODELO OBTIDO VIA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA 39	43
5	CRITÉRIO BASEADO EM CONFIABILIDADE	44
6	FUNÇÕES DE ESTADO DOS MODELOS DE BIELAS E TIRANTES	46
7	MODELO 1 E 2	46
8	RESULTADOS	47
9	CONCLUSÕES	57
10	REFERÊNCIAS	58

## **O IMPACTO DAS INCERTEZAS EPISTÉMICAS SOBRE O NÍVEL DE SEGURANÇA DAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO SUJEITAS A TORÇÃO PURA E REFORÇADAS COM POLÍMERO REFORÇADO COM FIBRA DE CARBONO – CFRP**

1	INTRODUÇÃO	59
2	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE	59
3	DESCRIÇÃO DA ANÁLISE	62
3.1	Modelo Considerado	62
3.2	Variáveis Aleatórias do Problema	63
3.3	Funções de Estado	64
3.4	Método de Resolução	65
4	RESULTADOS OBTIDOS	66
5	CONCLUSÕES	68
6	REFERÊNCIAS	69

# **DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA VIA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA AO ESFORÇO CORTANTE**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>75</b>
<b>2</b>	<b>EXPRESSÕES DE DIMENSIONAMENTO DE UMA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA AO ESFORÇO CORTANTE</b>	<b>76</b>
<b>2.1</b>	Expressões da NBR 6118-2003 pelo Modelo I para viga sem reforço	<b>76</b>
<b>2.2</b>	Expressões da NBR 6118-2003 pelo Modelo I para viga sem reforço	<b>77</b>
<b>2.3</b>	Modelo de Cálculo Considerando Falha por Ruptura do Compósito	<b>78</b>
<b>2.4</b>	Modelo de Cálculo Considerando Falha por Descolamento do Compósito	<b>80</b>
<b>2.5</b>	Espaçamento das faixas	<b>82</b>
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DA CONFIABILIDADE</b>	<b>82</b>
<b>4</b>	<b>FUNÇÕES DE FALHA ASSOCIADAS ÀS EXPRESSÕES DE DIMENSIONAMENTO DE UMA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA AO ESFORÇO CORTANTE</b>	<b>84</b>
<b>4.1</b>	Funções de falha para análise de confiabilidade da viga sem reforço	<b>84</b>
<b>4.2</b>	Funções de falha para análise de confiabilidade da viga com reforço	<b>85</b>
<b>4.3</b>	Função de falha relativa à ruína por tração diagonal, devido à ruptura do reforço	<b>86</b>
<b>5</b>	<b>EXEMPLO DE APLICAÇÃO</b>	<b>87</b>
<b>5.1</b>	Dimensionamento da armadura de estribo da seção S1 da viga V2 pela NBR 6118 – 2003	<b>87</b>

<b>5.2</b>	Análise de confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item	<b>88</b>
<b>5.3</b>	Dimensionamento baseado em confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.1.	<b>89</b>
<b>5.4</b>	Mudança na solicitação. Análise de confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.3.	<b>90</b>
<b>5.5</b>	Dimensionamento da área da seção de fibra de carbono CFC da seção S1 da viga V2 submetida às novas cargas acidentais conforme a metodologia de Chen e Teng (2003 a, b.)	<b>91</b>
<b>5.6</b>	Análise de confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.5.	<b>91</b>
<b>5.7</b>	Dimensionamento baseado em confiabilidade da área da seção de fibra de carbono CFC da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.5.	<b>92</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>93</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>94</b>

## **MODELO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E CRITÉRIO DE CONFIABILIDADE PARA A CONCEPÇÃO E ANÁLISE DE REGIÕES-D COMPLEXAS EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>99</b>
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE CONFIABILIDADE</b>	<b>99</b>
<b>3</b>	<b>ÍNDICE DE CONFIABILIDADE</b>	<b>101</b>
<b>4</b>	<b>FORM (First Order Reliability Method)</b>	<b>102</b>
<b>5</b>	<b>MÉTODO DE MONTE CARLO</b>	<b>102</b>
<b>6</b>	<b>DESCRIÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>103</b>

6.1	Estrutura analisada	103
7	<b>INCERTEZAS ALEATÓRIAS OU RANDÔMICAS</b>	<b>104</b>
8	<b>INCERTEZAS EPISTÊMICAS</b>	<b>105</b>
9	<b>METODOLOGIA DE ANÁLISE</b>	<b>107</b>
10	<b>APLICAÇÃO NUMÉRICA E DISCUSSÃO</b>	<b>107</b>
11	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>109</b>

## **GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE ENVOLTÓRIAS TOPOLOGICAS APLICADAS EM MODELOS DE BIELAS E TIRANTES UTILIZANDO TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO**

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>114</b>
2	<b>GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS DE BIELAS E TIRANTES</b>	<b>115</b>
3	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA</b>	<b>115</b>
3.1	Metodologia SIMP	116
3.2	Envoltória topológica	119
4	<b>OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO</b>	<b>119</b>
4.1	Definição do problema	119
4.2	Conceito de ótimo de Pareto	120
4.3	Métodos de geração de pontos de Pareto	121
4.4	Método dos coeficientes de ponderação	122
5	<b>APLICAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÕES</b>	<b>123</b>
5.1	Consolo curto com furo no centro	123
5.2	Viga parede com balanço e com furo no centro	125

<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>127</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>128</b>

## **ANÁLISE DE ESTABILIDADE DA TORRE TV DIGITAL DE BRASÍLIA**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>133</b>
<b>2</b>	<b>PROCEDIMENTOS ADOTADOS</b>	<b>135</b>
<b>2.1</b>	Carregamentos	<b>135</b>
<b>3</b>	<b>ANÁLISE DAS FUNDAÇÕES</b>	<b>137</b>
<b>3.1</b>	Apresentação da fundação	<b>137</b>
<b>3.2</b>	Verificação da Fundação	<b>139</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DA ESTRUTURA DA TORRE</b>	<b>140</b>
<b>4.1</b>	Apresentação da estrutura analisada	<b>140</b>
<b>4.2</b>	Análise estrutural	<b>141</b>
<b>4.3</b>	Verificação do dimensionamento	<b>142</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DA TORRE COMO HASTE</b>	<b>142</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DE VIBRAÇÃO DEVIDO À ATUAÇÃO DA CARGA DE VENTO</b>	<b>146</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>148</b>
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>148</b>

## **ANÁLISE DO PROJETO ESTRUTURAL DO EDIFÍCIO DO RESTAURANTE JUNTO AO PRÉDIO ADMINISTRATIVO DO SUPERIOR TRIBUNAL DE JUSTIÇA - STJ**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>152</b>
<b>2</b>	<b>CONTEXTO ARQUITETÔNICO</b>	<b>152</b>

<b>2.1</b>	Bloco da Administração	<b>154</b>
<b>2.2</b>	Blocos dos Ministros I e II	<b>154</b>
<b>2.3</b>	Bloco dos Plenários	<b>154</b>
<b>2.4</b>	Bloco do Tribunal Pleno	<b>155</b>
<b>2.5</b>	Bloco do Auditório	<b>155</b>
<b>3</b>	<b>CONSIDERAÇÕES GERAIS</b>	<b>155</b>
<b>3.1</b>	Características Técnicas	<b>156</b>
<b>3.2</b>	Normas	<b>157</b>
<b>3.4</b>	Topologia	<b>158</b>
<b>3.5</b>	Ações	<b>158</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE ESTRUTURAL</b>	<b>159</b>
<b>4.1</b>	Análise Estática Linear e Não Linear	<b>159</b>
<b>3.2</b>	Análise de Instabilidade Global	<b>163</b>
<b>5</b>	<b>VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA</b>	<b>164</b>
<b>5.1</b>	Lajes do Teto do Subsolo	<b>164</b>
<b>5.2</b>	Análise de Instabilidade Elástica	<b>164</b>
<b>5.3</b>	Análise de Frequência Natural da Estrutura de Concreto	<b>166</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>167</b>
<b>7</b>	<b>AGRADECIMENTOS</b>	<b>167</b>
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>167</b>

## **ANÁLISE DE SEGURANÇA E DESEMPENHO ESTRUTURAL DO AUTÓDROMO INTERNACIONAL DA CAPITAL FEDERAL DO BRASIL, BRASÍLIA-DF**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>172</b>
<b>2</b>	<b>ENSAIOS TECNOLÓGICOS E OBSERVAÇÕES DE CAMPO</b>	<b>174</b>
2.2	Ensaio de Carbonatação	174
2.3	Constatações da Inspeção	177
<b>3</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA</b>	<b>180</b>
3.1	Análise limite em serviço	181
3.2	Análise de Vibrações Livres (Análise Modal)	183
3.3	Análise de Instabilidade elástica	187
3.4	Análise de esforços e dimensionamento	189
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>190</b>

## **CÁLCULO DE REAÇÕES EM VIGAS DE BORDO PARA LAJES NERVURADAS UNIDIRECIONAIS**

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>197</b>
<b>2</b>	<b>NORMATIZAÇÃO</b>	<b>198</b>
2.1	Lajes disponíveis no Mercado	198
<b>3</b>	<b>CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>199</b>
3.1	Reações dos apoios das lajes	199
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>200</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>203</b>
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	<b>204</b>

<b>6.1</b>	Altura da Capa	<b>204</b>
<b>6.2</b>	Lambda	<b>206</b>
<b>6.3</b>	Altura da nervura	<b>206</b>
<b>6.4</b>	Rigidez das vigas de bordo	<b>208</b>
<b>6.5</b>	Fissuração das vigas de bordo	<b>209</b>
<b>6.6</b>	Rigidez dos pilares	<b>209</b>
<b>6.7</b>	Avaliação global	<b>209</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>217</b>
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>218</b>

# Modelo de bielas e tirantes gerados por otimização topológica e elementos indutores

## **João da Costa Pantoja**

Universidade de Brasília,  
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo  
Brasília-DF, Brasil  
Pesquisador do Grupo CONSTRUCT-LESE - Faculdade de Engenharia  
da Universidade do Porto  
joaocpantoja@gmail.com  
lattes: <http://lattes.cnpq.br/6879105340639188>

## **Luiz Fernando Martha**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
lfm@tecgraf.puc-rio.br  
lattes: <http://lattes.cnpq.br/2540733672905515>

## **Luiz Eloy Vaz**

Universidade Federal Fluminense  
Rio de Janeiro-RJ, Brasil  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4321281058166070>

# Modelo de bielas e tirantes gerados por otimização topológica e elementos indutores

João da Costa Pantoja | Luiz Fernando Martha | Luiz Eloy Vaz

## Resumo

Este artigo tem como objetivo utilizar a técnica de otimização topológica de forma a automatizar a geração de modelos de bielas e tirantes aplicados ao projeto e detalhamento de estruturas de concreto armado e protendido permitindo a interação com o projetista. O conceito de densidade artificial aplicado através da metodologia SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) com otimização via método MMA (Method of Moving Asymptotes) conjuntamente com método dos elementos finitos, conforme proposto por Bendsøe & Sigmund (2003), é utilizado para encontrar um encaminhamento de cargas ótimo. Assim, o desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes é tratado como um problema de otimização topológica em projeto de estruturas do meio contínuo. Através do modelo apresentado, o mecanismo de transferência de cargas é idealizado dentro da estrutura de concreto armado, através da remoção gradual do material em regiões que têm pouca efetividade na resistência ao carregamento aplicado com base nas densidades artificiais de cada elemento e suas correspondentes sensibilidades. A inclusão de elementos indutores dentro do modelo do contínuo e sua influência nos resultados obtidos para os encaminhamentos de carga obtidos pela otimização topológica é mostrada e discutida. Através dessa técnica, uma interação maior entre o projetista e o software utilizado pode ser obtida, resultando numa possível melhora do número e dos tipos de encaminhamentos de cargas. Exemplos de vigas-parede são apresentados e seus respectivos encaminhamentos mostrados. Aspectos relativos ao refino das malhas de elementos e a influência da taxa de densidade adotada são discutidos de forma a demonstrar a validade e efetividade da técnica como alternativa racional e confiável para o projeto de estruturas de concreto armado utilizando o modelo de bielas e tirantes.

## Palavras-chave

Otimização Topológica, Bielas e Tirantes, Método dos Elementos Finitos, Concreto Armado

# ***Strut and tie model generated by topology optimization and inductive elements***

## **Abstract**

*This paper aims to use the topology optimization technique in order to automate the generation of strut and tie models applied to the design and detailing of reinforced and prestressed concrete structures, allowing interaction with the designer. The concept of artificial density, applied through the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) methodology with optimization via the MMA (Method of Moving Asymptotes) method together with the finite element method, as proposed by Bendsøe & Sigmund (2003), is used to find an optimal load setting. Thus, the development of the strut and tie models is treated as a topological optimization problem in the design of continuous medium structures. Through the presented model, the load transfer mechanism is idealized within the reinforced concrete structure through the gradual removal of material in regions that have little effectiveness in resisting the applied loading based on the artificial densities of each element and their corresponding sensitivities. The inclusion of inductive elements within the continuum model and their influence on the results obtained for the load paths obtained by topological optimization is shown and discussed. Through this technique, greater interaction between the designer and the software used can be obtained, resulting in a possible improvement in the number and types of load settings. Examples of wall-beams are presented and their respective routings shown. Aspects related to element mesh refinement and the effect of the adopted density ratio are discussed to show that the technique is a valid and effective alternative to the strut-and-tie model for designing reinforced concrete structures.*

## **Keywords**

*Topology Optimization, strut-and-tie model, Finite Element Model, Reinforced Concrete*

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de estruturas especiais bidimensionais de concreto armado e protendido com a presença de regiões com descontinuidades geométricas ou de tensões, onde a hipótese de Bernoulli não pode ser aplicada, é um problema complexo cuja solução ainda hoje não está definitivamente determinada. Divergências apresentadas entre as equações empíricas adotadas nos códigos normativos e os resultados experimentais mostraram a necessidade de adoção de uma formulação mais racional a ser aplicada nesse tipo de situação. O modelo de bielas e tirantes proposto por Bay, Franz, Leonhardt e Thürlimann, e sistematizado por Schlaich & Schaefer (1987), é uma alternativa bastante interessante a ser considerada nestes casos. A modelagem feita pelo modelo de bielas e tirantes reduz o projeto de estruturas bidimensionais de concreto armado ao projeto de treliças com barras comprimidas de concreto (bielas) e barras tracionadas de aço (tirantes).

Um dos maiores problemas na adoção do modelo de bielas e tirantes no projeto deste tipo de estruturas é a definição pelo projetista do mecanismo de transferência ou encaminhamento de cargas dentro da estrutura de concreto em questão. Um procedimento usual é a simulação numérica da estrutura via método dos elementos finitos para obtenção de sua distribuição de tensões. Com base nessa distribuição o projetista precisa conceber um modelo treliçado, estaticamente admissível, com barras comprimidas (bielas) e tracionadas (tirantes) interligadas através dos nós. Esse lançamento estrutural pode ser feito de várias maneiras diferentes e sofre influência direta da experiência do projetista responsável pelo projeto. Desse modo, uma sistemática que auxilie ao projetista nesta tarefa pode ser de grande valia.

Recentemente, os métodos de otimização têm sido utilizados como uma alternativa extremamente atraente na definição de variáveis de projeto para estruturas das indústrias automobilísticas e aeroespacial. A otimização da geometria e topologia no layout destas estruturas têm um grande impacto no desempenho das mesmas, uma vez que possibilitam a obtenção de estruturas com menor quantidade de material possível, ainda assim atendendo os requisitos de estados limites últimos e de serviço. Sendo assim, a extensão desses mesmos procedimentos para as estruturas civis se mostra de extrema relevância. Também a obtenção de um encaminhamento de cargas via otimização auxilia o projetista na definição do lançamento da estrutura treliçada a ser concebida diminuindo, o tanto quanto possível, a necessidade de uma experiência anterior vasta.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma formulação que utiliza os métodos de otimização topológica

para definição do modelo de bielas e tirantes a serem considerados no dimensionamento das estruturas de concreto armado e protendido. O algoritmo SIMP, que faz uso de densidades artificiais, é utilizado como base para busca de um encaminhamento de cargas ótimo e estaticamente admissível. Alguns parâmetros, cuja influência têm relevância na definição dos encaminhamentos de carga, são mostrados e discutidos. Exemplos de vigas-parede com e sem elementos indutores, antes do processo de otimização, são discutidos de forma a demonstrar a validade e efetividade da técnica como alternativa racional e confiável para o projeto de estruturas de concreto.

## **2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COMO PROCEDIMENTO DE PROJETO**

A otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de sintetizar estruturas através da distribuição de material em uma determinada região do espaço. Para tal ela faz uso do método dos elementos finitos (MEF) e de um algoritmo de otimização. Assim, uma região do espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa analisar seu comportamento, sendo então, o material distribuído de forma racionalizada através de algoritmos de otimização.

Uma vantagem da otimização topológica é sua capacidade de fornecer o layout ótimo de um componente estrutural ou mesmo da própria estrutura, para certa aplicação. Assim, esse método pode ser aplicado durante a fase do projeto conceitual, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização de dimensões ou de forma, que só podem ser aplicados após a definição do layout da estrutura. Desse modo, a otimização topológica pode ser definida como um processo de síntese estrutural.

Um problema típico de otimização topológica é a seleção da melhor configuração possível para o projeto de uma estrutura. Na última década, muita atenção tem sido dada para o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica do contínuo. Bendsoe & Kikuchi (1988) propuseram um método de otimização, baseado em homogeneização, que trata a otimização topológica do contínuo como um problema de redistribuição dos materiais. Atualmente existe uma série de técnicas utilizadas na resolução dos problemas de otimização topológica. A adotada neste trabalho é a formulação SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization).

A formulação via método SIMP surgiu como uma opção simples de introduzir o material com propriedades intermediárias similares às que se obtêm com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso da metodologia SIMP,

este material intermediário, normalmente definido na forma de densidade artificial, é usado apenas como artifício matemático enquanto na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado. A função densidade artificial definida pelo SIMP é então utilizada como variável de projeto, definida no domínio  $\Omega$ , no intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias.

Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido com uma densidade artificial  $\rho = 1$  e o vazio com  $\rho = 0$ , variando entre esses dois limites. No presente contexto, as densidades artificiais intermediárias não têm nenhum interesse prático, logo técnicas que penalizem estes valores devem ser utilizadas no intuito de se evitar a incidência desse tipo de região no domínio analisado.

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA VIA MÉTODO SIMP

#### 3.1 Minimização da energia de deformação com aplicação das restrições

No problema de otimização a ser considerado, a variável de projeto  $x^e$  representa a densidade relativa do material em cada elemento  $e$ , assim  $\rho = x^e \rho_0$ . A densidade  $\rho_0$  é a densidade de apenas um elemento no domínio de projeto  $\Omega$ . Caso o elemento do domínio seja sólido teremos  $x^e = 1$ . Podemos representar a rigidez para um elemento como

$$k_e = (x^e)^p k^0$$

Sendo  $k_0$  a rigidez inicial. A função objetivo da formulação adotada será a flexibilidade ou energia de deformação da estrutura será:

$$C = F^t u = u^t k u = \sum_{e=1}^N u^e k^e u^e = \sum_{e=1}^n (x^e)^p u^e K^0 u^e$$

O número de elementos será denominado  $N$  e  $p$  é um fator de penalidade. Fazendo o fator de penalidade igual à unidade, elementos com densidades intermediárias irão ocorrer com frequência. Conforme demonstrado em Bendsøe & Sigmund (1999), o fator de penalidade tomado igual a 3, leva de uma forma consistente, o projeto final a conter elementos que estão totalmente preenchidos de material (sólido) ou com nenhum material (vazio). Esta formulação é normalmente denominada

como problemas do tipo 0-1. Considerando como o vetor que contém os volumes de cada elemento e chamando o volume de material  $V$ , podemos então definir:

$$V = x^T v$$

Denominaremos  $V_0$  o volume inicial do domínio de projeto e  $x$  o vetor das variáveis de projeto. Podemos então partir para formulação de um problema de otimização onde queremos minimizar a flexibilidade ou a energia de deformação da estrutura, na forma:

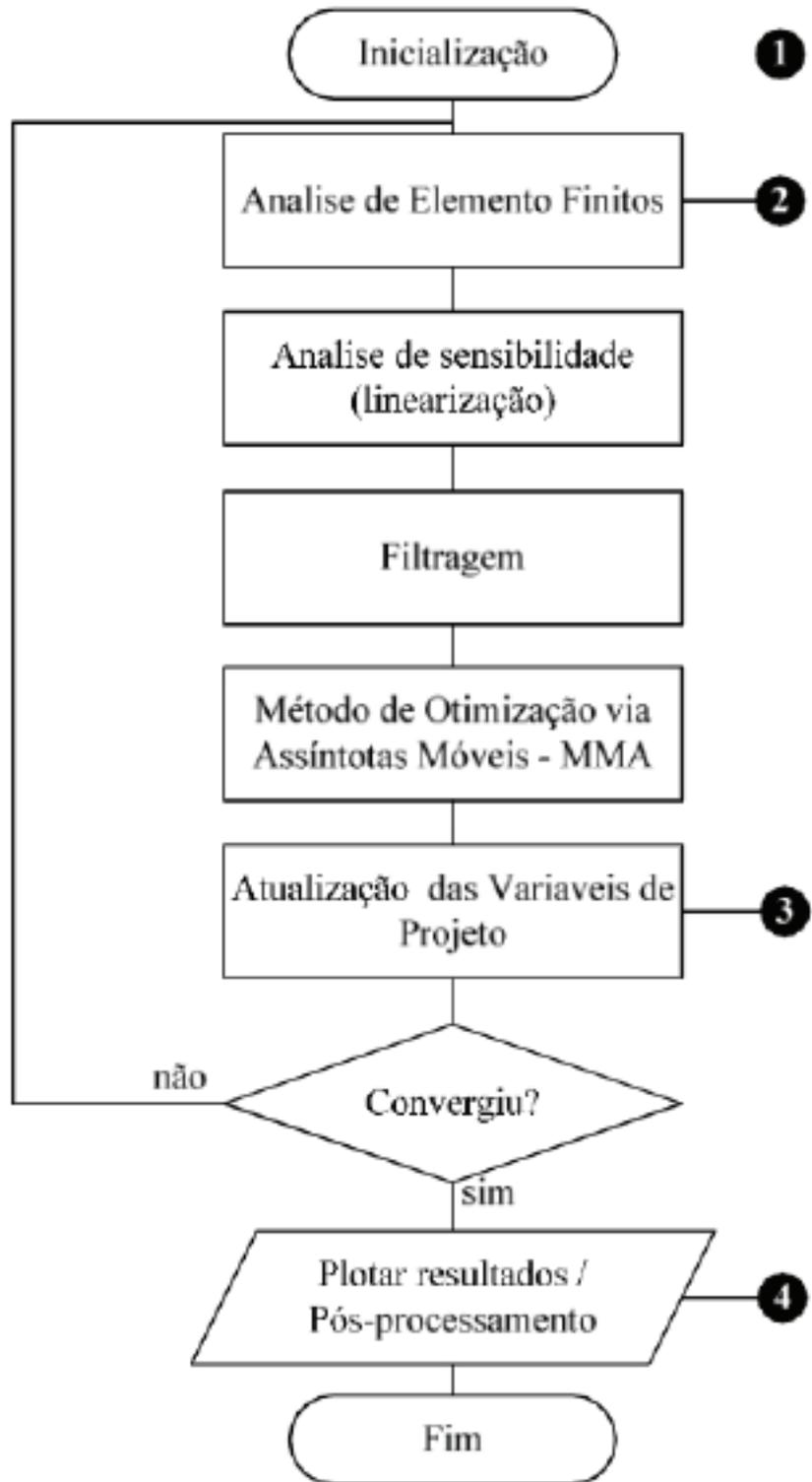
<b>Minimizar:</b>	$C = F^T u$	
<b>Sujeito a:</b>	$f = V / V_0$	(Restrição de volume)
	$F = ku$	(Restrição de Equilíbrio)
	$0 < x_{\min} \leq x^e \leq x_{\max}$	(Restrições Laterais)

Pode-se notar que  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$  serão os limites inferiores e superiores da variável de projeto. Neste caso, escolheremos  $x_{\max} = 1$  e  $x_{\min} = 0.001$ . A função do limite inferior é prevenir contra uma possível singularidade na matriz de rigidez da estrutura.

Na formulação SIMP algumas prerrogativas são feitas de modo que as características do material, como por exemplo, o módulo de elasticidade, num elemento discreto é considerado constante. Se  $x_0$  é a densidade inicial do elemento e  $x$  é a densidade após a otimização, então é preciso impor ao problema de otimização uma taxa de redução no volume de material existente representado pela relação entre as densidades na forma  $x = x^e / x_0$ . A restrição de volume apresentada no problema de otimização têm essa função.

As características do material dentro de um elemento podem ser modificadas através de uma relação exponencial na densidade do elemento. Se  $E_0$  e  $E$ , são os módulos de elasticidade do elemento antes e depois da otimização, respectivamente, então vale a relação  $E = (x^e)^p E_0$ . Se  $k_0$  e  $k$ , são a rigidez inicial e posterior à otimização, respectivamente, também a relação  $k = (x^e)^p k_0$  é válida. O parâmetro  $p$  têm a função de penalizar as densidades intermediárias, de maneira a decrescer o número de elementos com esse tipo de densidades e induzir que a maioria das densidades dos elementos fique entre 0 e 1.

Uma vez consideradas as pré-condições acima, cada elemento possui apenas uma variável de projeto. Comparado com o método da homogeneização, a formulação do método SIMP traz excelentes progressos na diminuição do número de variáveis de projeto. Outra vantagem do método SIMP é que as características do material após as modificações são escritas como uma função exponencial da densidade e das características do material no instante inicial da análise. Sendo assim, essa formulação simplifica muito a solução da otimização topológica.



**Figura 1**  
 Diagrama de fluxo – Método  
 SIMP  
 Fonte: Autor (2009)

Um diagrama de fluxo para a formulação de um problema de otimização topológica via método SIMP é mostrado na Figura 1.

## 4 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

### 4.1 Método das Assíntotas Móveis - MMA

Uma forma de resolver o problema de otimização proposta por Svanberg (1987) nos leva a uma classe de métodos de otimização com convergência global, que é baseado em funções aproximadoras separadas conservativas convexas, denominadas CCSA.

Os métodos CCSA são aplicados a problemas de programação não-linear com restrições de desigualdade, que podem ser encarados na forma de problemas de minimização com restrições do tipo menores ou iguais. Existem iterações externas e internas nestes métodos. Uma iteração externa inicia a partir da iteração atual  $x^{(k)}$  e termina com uma nova iteração  $x^{(k+1)}$ . Em cada iteração, entre uma iteração externa e outra, um subproblema convexo é gerado e resolvido. Nesse subproblema, a função objetivo original e suas restrições são representadas por certas funções separadas convexas que aproximam a função original nos arredores de  $x^{(k)}$ . A solução ótima do subproblema pode ser aceita ou rejeitada. Se for aceita, torna-se  $x^{(k+1)}$  e outra iteração externa é completada. Se for rejeitada, uma nova iteração interna é feita, com um subproblema modificado baseado em alguma modificação feita nas funções de aproximação. As iterações internas serão repetidas até que as funções aproximadoras da função objetivo e das restrições se tornem maiores ou iguais às funções originais na solução ótima do subproblema. Quando isso acontece, é dito que as funções de aproximação são conservativas. Isso não implica que o conjunto de soluções viáveis do subproblema está completamente contido no conjunto de soluções viáveis originais, mas implica que a solução ótima do subproblema é uma solução viável do problema original, com valor da função objetivo menor do que a iteração anterior. Cada nova iteração externa requer valores para a função e as derivadas de primeira ordem da função objetivo original e de suas restrições, calculados na iteração atual  $x^{(k)}$ . Cada nova iteração interna requer apenas os valores da função e não de suas derivadas, calculados a partir da solução ótima do subproblema mais recente.

Utilizar esquemas baseados em uma resolução de uma seqüência de subproblemas não é uma idéia nova. Podemos citar problemas do tipo SQP (*Sequential Quadratic Programming*) onde, em cada iteração, um problema de programação quadrática convexa (QP) é resolvido e uma busca em linha é

feita via função de mérito. No entanto, as restrições lineares no subproblema QP não garantem que os pontos de iteração sejam viáveis com respeito às restrições originais, o que os torna não conservativos conforme definido anteriormente. Em contraposição aos métodos SQP, os métodos CCSA introduzem uma curvatura tanto na função objetivo quanto nas funções de restrição do subproblema. Esta curvatura é atualizada durante as iterações internas uma vez que as funções aproximadoras são conservativas, não sendo assim necessária a execução de nenhuma busca em linha. Outra classe de métodos que gera pontos de iteração viáveis são os métodos de pontos interiores. Mas nesses métodos a viabilidade é garantida adicionando à função objetivo uma função de barreira logarítmica e não usando funções aproximadoras conservativas para as funções de restrição conforme proposto pelos métodos CCSA.

Um ponto que deve ser enfatizado é que os métodos CCSA podem ser aplicados com sucesso a problemas com número muito grande de variáveis, sem que as matrizes Hessianas da função objetivo e das restrições fiquem densas. Esta propriedade também pode ser estendida pelo uso das funções aproximadoras separadas.

Um dos métodos CCSA adotados neste trabalho é denominado Método das Assíntotas Móveis ou MMA, que têm aplicação no campo da otimização estrutural, onde o cálculo das funções objetivo e seus gradientes conduzem a um grande consumo de tempo (envolvendo um enorme número de cálculo de elementos finitos). Uma consideração normalmente importante aos usuários, nesses casos, é que os pontos de cada iteração gerada, sejam viáveis. Isto é garantido pelo método MMA.

A formulação em MMA é baseada numa expansão em série de Taylor de primeira ordem da função objetivo e funções das restrições. Com esse método, um subproblema convexo explícito é gerado para aproximar um problema não linear implícito. Uma vez que o problema é separado e convexo, uma formulação dual ou um método de pontos interiores primal-dual pode ser utilizado para resolvê-lo. A solução de uma seqüência de subproblemas pode convergir em direção ao problema original.

Dessa maneira, o problema de otimização estrutural pode ser montado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar:} & f_0(x) \\ \text{Sujeito a:} & f_i(x) \leq f_i \quad i = 1, \dots, M \\ & 0 < x_{\min} \leq x^e \leq x \quad i = 1, \dots, N \end{array}$$

Onde  $M$  é o número de restrições e  $N$  é o número de elementos. A função  $f_0$  é a função objetivo. As funções  $f_i$  representam as restrições e os contornos das variáveis de projeto serão  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$ . As funções implícitas  $f_i$  são aproximadas pelas funções

explícitas  $f_i^{(k)}$  que são caracterizadas por serem separáveis e convexas. A escolha dessas funções aproximadoras é baseada em cálculos prévios dos valores das funções calculadas e dos seus gradientes. É assumido que tanto a função objetivo quanto as funções das restrições podem ser aproximadas através das funções aproximativas. Podemos então modificar o problema de otimização anterior para:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & f_i^{(k)}(x) \\ \text{Sujeito a: } & f_i^{(k)}(x) && i = 1, \dots, M \\ & 0 < x_{\min} \leq x^e \leq x && i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Sendo  $k$  o número da iteração atual e o vetor  $x^{(0)}$  é o ponto de inicial para as densidades relativas. Na MMA, cada função aproximativa  $f_i^{(k)}(x)$  é obtida pela linearização de  $f_i(x)$  por variáveis do tipo  $1/(U_e - x_e)$  e  $1/(x_e - L_e)$ , dependendo do sinal das derivadas em  $x^{(k)}$ , onde  $U$  e  $L_e$  são parâmetros denominados assíntotas que devem satisfazer  $L_e < x^{e(k)} < U_e$ . Assim teremos:

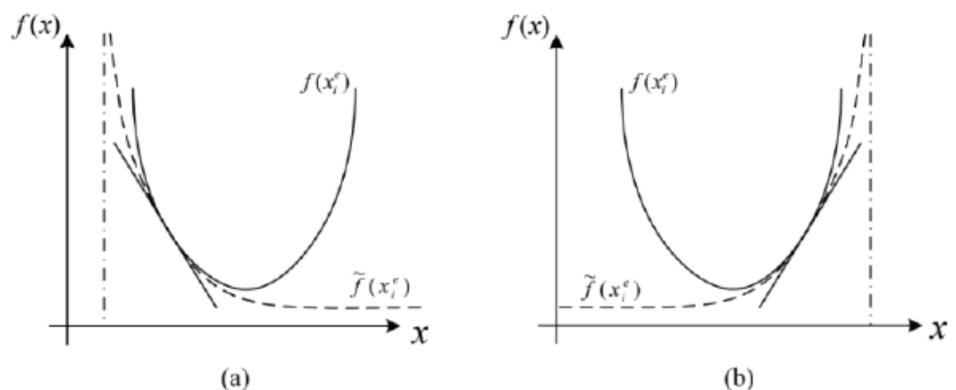
$$f_i^{(k)}(x) = \sum_{e=1}^N \left( \frac{p_{ie}}{U_e - x^e} + \frac{q_{ie}}{x_e - L^e} \right) + r_i$$

Onde:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^e} > 0 \quad \text{em} \quad x^{(k)} \quad \text{então:} \quad p_{ie} = (U_e - X^{e(k)})^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \wedge q_{ie} = 0$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^e} < 0 \quad \text{em} \quad x^{(k)} \quad \text{então:} \quad q_{ie} = -(X^{e(k)} - L_e)^2 \frac{\partial f_i}{\partial x^e} \wedge p_{ie} = 0$$

Observe que  $r_i$  é escolhido de forma que  $f_i(x^{(k)}) = f_i^{(k)}(x^{(k)})$ . Os valores dos pontos assintóticos  $U_e$  e  $L_e$  são normalmente modificados entre as iterações e, por conseguinte, esses pontos são também uma função de  $k$ .



**Figura 2**

Formulação via MMA para variável de projeto  $x_e$  sendo (a) assíntota à esquerda e (b) assíntota à direita.

Fonte: Autor (2009)

A Figura 2 mostra o procedimento para utilização da MMA para uma variável de projeto  $x^e$  num espaço unidimensional. A função  $f(x)$  e a função  $f_i(x)$  é a função aproximativa. Os pontos assintóticos  $U_e$  e  $L_e$  são normalmente representados por valores finitos. Um procedimento heurístico pode então ser utilizado para atualizar os pontos assintóticos  $U_e$  e  $L_e$ . As assíntotas serão movidas para cada vez mais perto uma da outra de modo a obter iterativamente o ponto de projeto ótimo.

Observe que se  $U_e \rightarrow +\infty$  e  $L_e \rightarrow -\infty$  a aproximação MMA torna-se, no limite, igual a uma aproximação linear via Programação Linear Seqüencial (SLP). Nos casos considerados a flexibilidade ou energia de deformação é igual a  $f_0(x)$  e a estrutura é restringida a certa porção do domínio de projeto  $V_0$ , assim  $f_1(x) = fV_0$ .

A derivada da função objetivo é encontrada utilizando o equilíbrio:

$$ku = F \rightarrow \frac{dk}{dx^e}u + k \frac{du}{dx^e} = 0$$

Derivando a função objetivo com respeito à variável de projeto e usando a expressão anterior conforme apresentado em Pedersen & Buhl (1997):

$$\frac{dC}{dx^e} = \frac{du^t}{dx^e}ku + u^t \frac{dk}{dx^e}u + u^t k \frac{du}{dx^e} = -p(x^e)^{p-1}u^e k^0 u^e$$

A expressão anterior assume que os carregamentos são independentes das variáveis de projeto, ou seja,  $dFdx = 0$ .

A derivada das funções de restrição será então:

$$\frac{dV}{dx^e}$$

A maior vantagem na utilização da MMA é que nela a função  $f_i(x)$  é convexa logo aproxima de maneira fechada o comportamento da função objetivo e as funções das restrições, conforme mostrado na Fig. 2.

## 5 ELEMENTOS INDUTORES

Os elementos indutores são formados através de *arrays* inclusos dentro do algoritmo de resolução do método SIMP de modo a garantir que durante o processo de otimização sejam assegurados valores máximos e mínimos de densidade para alguns elementos da malha. Assim um determinado trecho pré-definido para um encaminhamento de carga possa ser obedecido de modo a possibilitar uma interação do projetista com o processo de otimização a ser executado. Vale salientar

que apesar disso, em função da atualização das variáveis de projeto ser feita através da filtragem das densidades, conforme recomendado por Bendsøe & Sigmund (2003), de modo a evitar problemas do tipo instabilidades de tabuleiro e dependência da malha, não necessariamente o modelo de encaminhamento de carga final obrigatoriamente possua o trecho inicialmente pré-definido. Bielas e tirantes poderão então ser definidos de uma forma mais livre através destes arrays modificando o resultado da otimização via novos encaminhamentos de carga, conforme será mostrado adiante nos exemplos apresentados. Elementos de natureza similar com aplicação em outras áreas foram propostos por Bendsøe & Sigmund (2003).

Essa técnica possibilita ao projetista determinar uma série de modelos de bielas e tirantes que cumpram o Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade resultando em estruturas estaticamente admissíveis, segundo Souza (2004).

## 6 EXEMPLOS

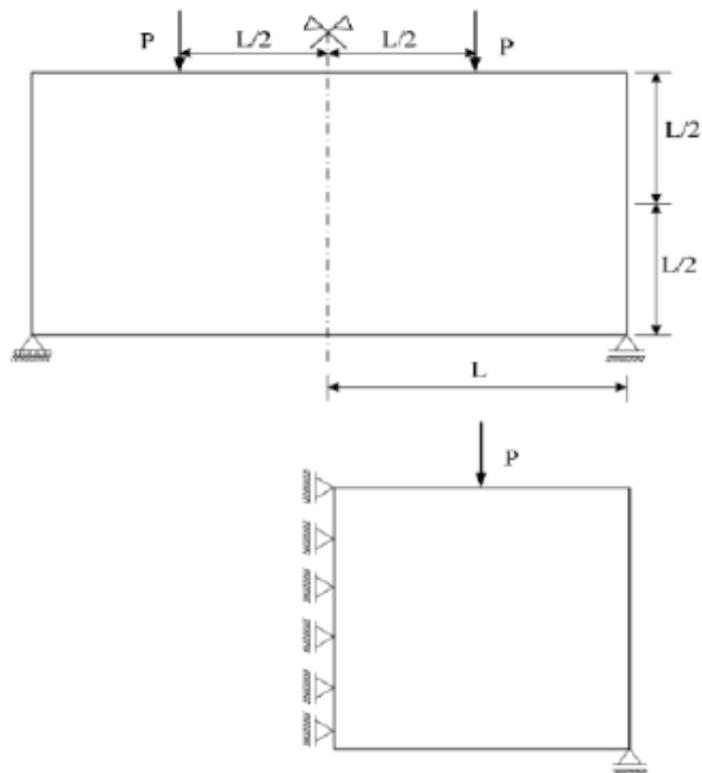
A formulação via método SIMP para resolução de problemas de otimização topológica é aplicada a dois exemplos nesta seção. Estruturas de concreto armado do tipo vigas paredes são otimizadas utilizando o método proposto. A utilização de elementos indutores no interior das estruturas de concreto armado é feita e sua influência no processo de otimização mostrada. A modelagem dos elementos indutores é feita através da fixação das densidades dos elementos. Sendo assim são apresentados nos exemplos dois tipos de processos. Processos sem indução, ou seja, onde o processo de otimização não conta com nenhuma imposição proposta pelo projetista e processos induzidos onde a presença de elementos indutores necessários ao modelo podem ser pré-definidos de acordo com o modelo de biela e tirantes imaginado pelo projetista. Devido a esse fato, uma gama variada de modelos de bielas e tirantes pode ser testada e de acordo com a experiência do projetista. A eficiência das topologias estruturais obtidas pelo processo de otimização proposto são apresentadas e seus resultados comparados com modelos clássicos presentes na literatura do modelo de bielas e tirantes existentes.

### 6.1 Estrutura de Viga Parede – VP1

O domínio de projeto para uma viga parede com duas cargas concentradas atuantes na face superior e distantes dos apoios  $\frac{1}{4}$  do vão é apresentado na Fig. 3. O domínio de projeto é discretizado por uma malha de elementos finitos quadriláteros

com quatro nós em um estado plano de tensões, cujo número de elementos foi variado, de modo a demonstrar a influência do refino da malha sobre o processo de otimização. As restrições de apoio são apresentadas através de vínculos de 1 e 2 gêneros e cargas concentradas  $P$  de 1 KN aplicadas de cada lado entre o centro e os apoios da viga parede. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson são definidos como 300 Pa e 0.3 respectivamente.

Primeiramente o modelo obtido através da otimização topológica é feito sem o processo de indução, sendo o resultado mostrado na Fig. 4. Nota-se que o modelo obtido é compatível com os modelos em Souza (2004) e normalmente utilizados na prática. Os parâmetros fixos considerados no processo de otimização sem indução foram  $n_{elx} = 80$  e  $n_{ely} = 80$  que são os números de elementos nas direções horizontal e vertical, a fração do volume inicial a ser obtida adotada foi de 10%, fator de penalidade de igual a 3 e o raio de influência para o filtro igual a 2 (filtragem). Para cada iteração dentro do processo de otimização, o programa gera um resultado da distribuição corrente de densidade sobre os elementos da malha.



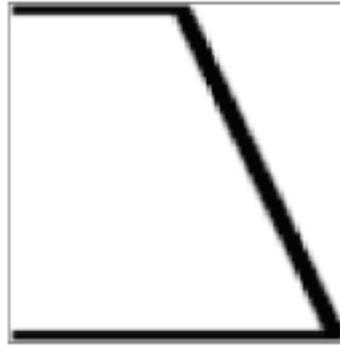
**Figura 3**

Viga parede VP1  
com carregamento  
na parte superior  
Fonte: Autor (2009).

**Figura 4**

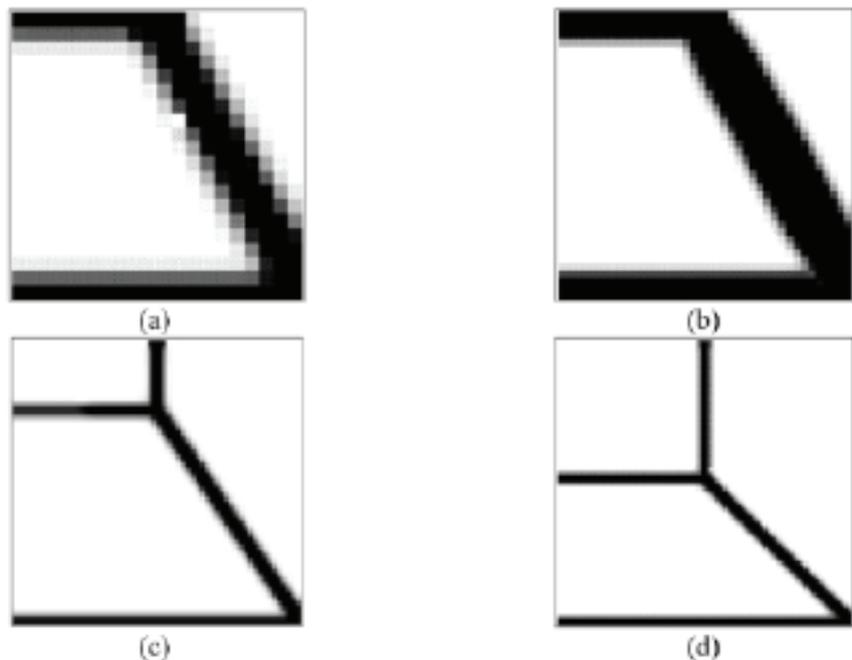
Resultado obtido via simetria para VP1 num processo sem indução.

Fonte: Autor (2009).



Em seguida, um novo processo de otimização topológica foi feito com acréscimo do processo de indução. Um elemento indutor saindo de baixo da carga P e indo a metade da malha foi acrescido e um elemento indutor em toda parte inferior também foi colocado. Isto conduziu a uma modificação no modelo obtido pela otimização topológica.

Através da Fig.5 observam-se as modificações ocorridas à medida que o refinamento da malha de elementos é aumentado. O resultado dos modelos pelo processo de otimização acarretou numa modificação nos modelos obtidos. De acordo com os exemplos malhas pouco refinadas pode levar a ineficiência num processo de otimização com indução. Durante a modificação do número de elementos na malha foi preciso variar a fração do volume inicial considerada de modo a garantir a convergência do modelo.



**Figura 5**

Influência do refinamento da malha no OT com indução

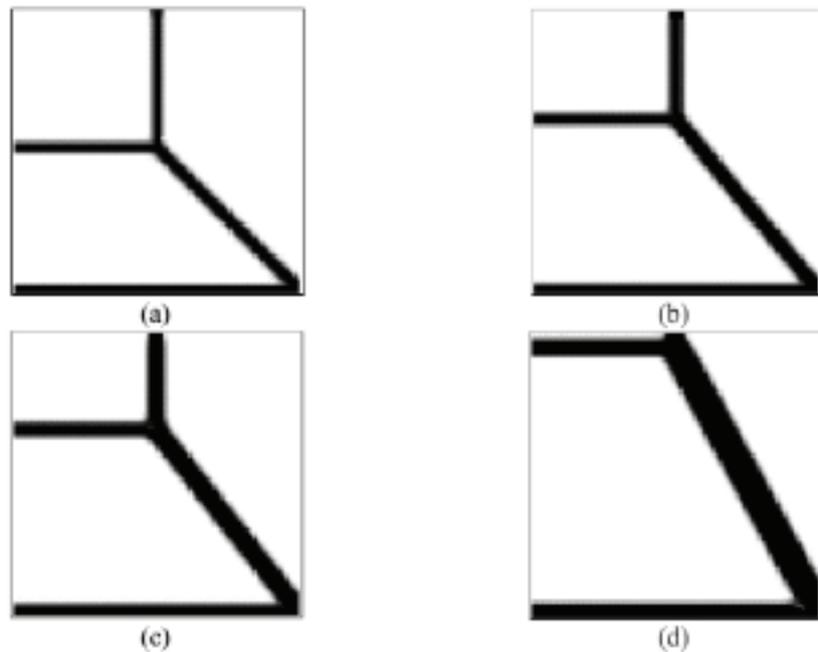
(a) 400, (b) 1600, (c) 3600 e (d) 6400 elementos.

Fonte: Autor (2009).

Variou-se então a fração de volume no problema proposto de modo a verificar sua influência na otimização (Fig. 6).

Essa variação também levou a uma modificação substancial nos modelos obtidos. Nota-se que, com o aumento da fração de volume final considerada o resultado final tende ao modelo obtido via processo sem indução. O número de elementos da malha foi mantido igual ao modelo sem indução.

Durante o estudo numérico feito para definição da fração de volume mais adequada ao problema proposto, os valores abaixo de 10% não obtiveram convergência enquanto valores superiores a este levam a um aumento muito grande no número de iterações necessárias e tempo de processamento para convergência.

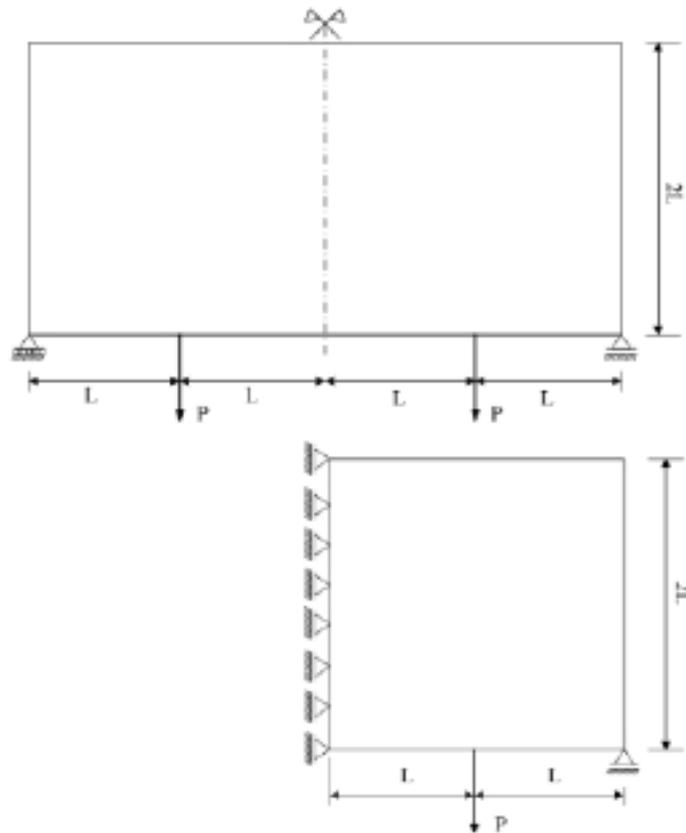


**Figura 6**  
 Modificações nos resultados da OT com indução devido à variação na fração de volume adotada  
**(a)** 10%, **(b)** 12%,  
**(c)** 15% e **(d)** 20%.  
 Fonte: Autor (2009)

Assim, ao aplicar otimização topológica com processos de indução, os parâmetros referentes ao número de elementos da malha e frações de volume a serem considerados, devem ser tomados com bastante critério.

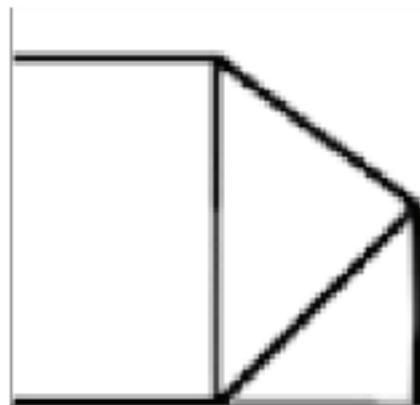
## 6.2 Estrutura de Viga Parede – VP2

Neste exemplo o domínio de projeto considerado para a viga parede VP2 foi modificado de forma que as duas cargas concentradas atuantes no meio do vão foram deslocadas para a parte inferior da viga parede, conforme mostrado na Fig. 7. O domínio de projeto é discretizado por uma malha de elementos finitos quadriláteros com quatro nós em um estado plano de tensões, cujo número de elementos foi de 6400 (80x80). As restrições de apoio são mantidas através de vínculos de 1 e 2 gêneros e cargas concentradas P de 1 KN são \*\* aplicadas. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson são definidos como 300 Pa e 0.3 respectivamente.



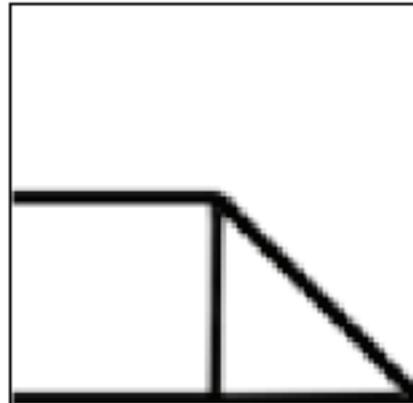
**Figura 7**  
Viga parede VP2  
com carregamento  
na parte inferior.  
Fonte: Autor (2009).

Novamente foi primeiramente obtido o modelo através da otimização topológica sem o processo de indução, sendo o resultado mostrado na Fig. 8. O modelo obtido é compatível com os modelos considerados em Liang (2005). Os parâmetros fixos considerados no processo de otimização sem indução foram  $n_{elx} = 80$  e  $n_{ely} = 80$ , que são os números de elementos nas direções horizontal e vertical, fração do volume inicial a ser obtida adotada foi de 8%, o fator de penalidade igual a 3 e o raio de influência para o filtro igual a 2.



**Figura 8**  
Viga parede VP2 com  
carregamento na parte  
inferior. Fonte: Autor (2009).

Em seguida um novo processo de otimização topológica foi feito com acréscimo do processo de indução. Um elemento indutor foi colocado entre as duas cargas P que atuam na estrutura real. Depois o elemento indutor foi inclinado a 45º graus encaminhando a carga até o apoio. A função deste elemento indutor é simular uma biela de compressão. Também em toda parte inferior foi acrescido um elemento indutor horizontal. O resultado do modelo induzido pode ser visto na Fig. 9.



**Figura 9**

Resultado obtido da OT com processo induzido. Fonte: Autor (2009).

Fica demonstrado assim que a otimização topológica com processos induzidos leva a modelos diferentes do que obtidos via processos sem indução. Isso leva a uma vantagem muito grande do ponto de vista do engenheiro estrutural que pode utilizar o processo de indução para gerar um encaminhamento de cargas mais adequado ao seu critério pessoal quando da concepção do modelo de bielas e tirantes a ser utilizado.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a influência da presença de elementos indutores do tipo armaduras existentes e bielas pré-definidas no processo de otimização para obtenção do encaminhamento de carga via otimização topológica. O método de otimização MMA foi utilizado na atualização das variáveis de projeto. Exemplos foram apresentados e os resultados obtidos para vigas paredes com e sem os processos de indução. Modificações dos parâmetros de refinamento de malha e fração do volume inicial foram feitas de modo a entender sua influência dentro do processo de otimização proposto. De acordo com os resultados obtidos, pode-se concluir que a otimização topológica com processos de indução é uma alternativa viável e bastante eficaz na definição do encaminhamento de cargas pelo engenheiro estrutural na concepção do modelo das bielas e tirantes a ser utilizado.

## 8 AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Krister Svanberg do Royal Institute of Technology de Stockholm Sweden pelo fornecimento do código do algoritmo MMA em linguagem Matlab e ao Eng. Anderson Pereira da TecGraf - PUC Rio pelas informações e posteriores discussões durante meus primeiros estudos em otimização topológica.

## 9 REFERÊNCIAS

- ARORA**, J. S., 2006. *Optimization of Structural and Mechanical Systems*. World Scientific.
- BENDSØE**, M. P. & **KIKUCHI**, N., 1988. *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71(2):197-224.
- BENDSØE**, M. P. & **SIGMUND**, O., 1999. *Material interpolation schemes in topology optimization*, Archives of Applied Mechanics 69(9-10): 635-654.
- BENDSØE**, M. P. & **SIGMUND**, O., 2003. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- CARDOSO**, E. L., 2005. *Otimização Topológica de Transdutores Piezelétricos considerando Não-Linearidade Geométrica*. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – URS. Departamento de Engenharia Mecânica. Porto Alegre/RS.
- FU**, C. C., 2001. *The Strut and Tie Model of Concrete Structures*. Presented to Maryland State Highway Administration. University of Maryland.
- LIANG**, Q. Q., 2005. *Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications*. Spon Press - Taylor & Francis Group.
- PEDERSEN**, C. B. W. & **BUHL**, T., 1997. *Topology Optimization (A one-semester project from the fall-semester of 1997)*. Web-pages of Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark(DTU).

- ROZVANY, G. I. N. & ZHOU, M.**, 1991. *The COC algorithm, part I: Cross-section optimization or sizing*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89:281-308.
- SIGMUND, O.**, 2006. *Morphology-based black and white filters for topology optimization*, Structural Multidisciplinary Optimization, 33:401-424.
- SILVA, R. C. & GIONGO, J. S.**, 2000. *Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado*. EESC USP.
- SOUZA, R. A.**, 2004. *Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades*. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP.
- SVANBERG, K.**, 1987. *The method of moving asymptotes - A new method for structural optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24:359-373.
- SVANBERG, K.**, 2002. *A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations*. SIAM Journal on Optimization, 12(2):555-573.
- ZUO, K. T., CHEN, L. P., ZHANG, Y. Q. & YANG, J.**, 2007. *Study of key algorithms in topology optimization*. International Journal Adv. Manuf. Technol., 32:787-796.

# Um critério baseado em confiabilidade para avaliação do desempenho de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado

**João da Costa Pantoja**

Universidade de Brasília,

Faculdade de Arquitetura e Urbanismo

Brasília-DF, Brasil

Pesquisador do Grupo CONSTRUCT-LESE - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

joaocpantoja@gmail.com

lattes: <http://lattes.cnpq.br/6879105340639188>

**Luiz Fernando Martha**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

lfm@tecgraf.puc-rio.br

lattes: <http://lattes.cnpq.br/2540733672905515>

**Luiz Eloy Vaz**

Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro-RJ, Brasil

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4321281058166070>

# Um critério baseado em confiabilidade para avaliação do desempenho de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado

João da Costa Pantoja | Luiz Fernando Martha | Luiz Eloy Vaz

## Resumo

Esse trabalho apresenta um critério de confiabilidade para avaliação de desempenho de estruturas de concreto armado dimensionadas usando o modelo de bielas e tirantes. O Método de simulação de Monte Carlo é utilizado para calcular o índice de confiabilidade e as razões de probabilidades referentes aos diversos modos de falha do modelo, considerando os aspectos de segurança e ductilidade. Três diferentes formulações existentes na literatura para determinação da resistência efetiva à compressão do concreto são consideradas. Tanto o índice de confiabilidade quanto as razões de probabilidade relativas aos modos de falha existentes são comparados para as formulações consideradas. Um exemplo de uma viga parede é apresentado, dois tipos de topologias são propostas como modelo de bielas e tirantes e uma análise de confiabilidade utilizada para a avaliação do desempenho dos mesmos.

## Palavras-chave

Confiabilidade, Otimização topológica, Modelo de bielas e tirantes, Estruturas de concreto.

# ***A reliability criterion to evaluate the performance of strut-and-tie models applied in design and analysis of reinforced concrete structures***

## **Abstract**

*This paper presents a reliability criterion for the analysis of reinforced concrete structures using the strut-and-tie model. The Monte Carlo simulation method is used to calculate the reliability index and probability of failure modes, considering both the safety and ductile behavior of the strut-and-tie model. Three different formulations presented in the literature to compute the effective compression resistance of the concrete are considered. Both the reliability index value and the ductility behavior are considered in this comparison. Two examples for the design of a deep beam using reliability analysis for validation of safety and ductility aspects are presented.*

## **Keywords**

*Reliability, Topology optimization, Strut-and-Tie model, Concrete structures.*

## 1 INTRODUÇÃO

O método das bielas e tirantes pode ser utilizado para o projeto de regiões da estrutura onde as hipóteses básicas da teoria de flexão, propriamente a que as seções transversais permanecem planas antes e depois da flexão, não podem ser aplicáveis. Nessas regiões ocorrem descontinuidades no campo de deslocamentos e tensões provenientes da aplicação de forças concentradas, reações de apoio e mudanças bruscas de geometria na estrutura. A utilização do método das bielas e tirantes para projeto se baseia na hipótese que certas regiões nas estruturas de concreto podem ser analisadas e projetadas segundo uma estrutura treliçada idealizada no interior do contínuo, formada por bielas e tirantes conectados pelos nós.

O desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes em peças de concreto armado utilizando métodos convencionais envolve um processo iterativo de tentativa e erro, baseado na intuição e experiência do projetista estrutural. É uma difícil tarefa para os projetistas estruturais encontrar um modelo de bielas e tirantes adequado em peças de concreto com condições de carregamento e geometrias complicadas. Como resultado disso, técnicas de computação gráfica e otimização topológica vem sendo utilizadas no auxílio à modelagem via modelo de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado, conforme apresentado nos trabalhos de Ali (2003), Liang (2005), Tje N.T. e Kuchma D.A. (2007) e Bruggi (2009).

A técnica da otimização topológica do contínuo, que consiste na seleção da melhor configuração a ser utilizada no projeto de estruturas contínuas, têm se tornado extremamente popular nos últimos anos. Um trabalho pioneiro na área de otimização de layout foi apresentado por Rozvany et al (1991). Também trabalhos na área de homogeneização baseada em métodos de otimização foram apresentados por Bendsøe et al (1988). Nesse último, a otimização topológica é tratada como um problema de redistribuição de material compósito em microestruturas num domínio de projeto. Uma formulação baseada na função de densidade com variável de projeto foi apresentada por Bendsøe et al (1999), propondo sua variação em cada elemento. Os métodos de otimização que utilizam esse tipo de formulação buscam o ótimo através da remoção de material inutilizado dentro do domínio de projeto. O denominado método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) tem sido utilizado na determinação do encaminhamento de cargas ótimo dentro do contínuo da estrutura de concreto conforme apresentado em Pantoja et al (2009) e Bruggi (2009). Dessa maneira, considerando o teorema do limite inferior da plasticidade pode-se obter então um modelo de bielas e tirantes estaticamente admissível a ser aplicado no dimensionamento da estrutura de concreto.

Uma alternativa bastante interessante para avaliação do desempenho dos modelos de bielas e tirantes obtidos com relação ao seu nível de segurança e de ductilidade. A ductilidade é necessária de modo que seja possível garantir o funcionamento correto da treliça idealizada no interior do contínuo. Uma opção proposta por Pantoja et al (2010) é de um critério baseado em confiabilidade para verificar esse desempenho. Um método de simulação do tipo Monte Carlo pode então ser utilizado de forma a obter os índices de confiabilidade do sistema e relação de probabilidade de falhas dos diversos modos de falha existentes.

Esse trabalho faz uma comparação de desempenho de dois modelos diferentes utilizados para dimensionamento de uma mesma viga parede. O modelo 1 foi retirado dos compêndios da norma americana ACI 318-02 (2002). O modelo 2 foi obtido via otimização topológica e dimensionado segundo as orientações normativas do ACI 318-02 (2002). Também diversas formulações para cálculo da resistência efetiva à compressão do concreto segundo Schlaich et al (1987), EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002) são utilizadas e comparadas entre si.

## **2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COMO PROCEDIMENTO DE PROJETO**

A otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de sintetizar estruturas através da distribuição de material em uma determinada região do espaço. Para tal ela faz uso do método dos elementos finitos (MEF) e de um algoritmo de otimização. Assim, uma região do espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa analisar seu comportamento, sendo então, o material distribuído de forma racionalizada através de algoritmos de otimização.

Uma vantagem da otimização topológica é sua capacidade de fornecer o layout ótimo de um componente estrutural ou mesmo da própria estrutura, para certa aplicação. Assim, esse método pode ser aplicado durante a fase do projeto conceitual, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização de dimensões ou de forma, que só podem ser aplicados após a definição do layout da estrutura. Desse modo, a otimização topológica pode ser definida como um processo de síntese estrutural.

Um problema típico de otimização topológica é a seleção da melhor configuração possível para o projeto de uma estrutura. Na última década, muita atenção tem sido dada para o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica do contínuo. Bendsoe & Kikuchi (1988) propuseram um método de otimização, baseado em homogeneização, que trata a otimização topológica do contínuo como um problema de redistribuição dos

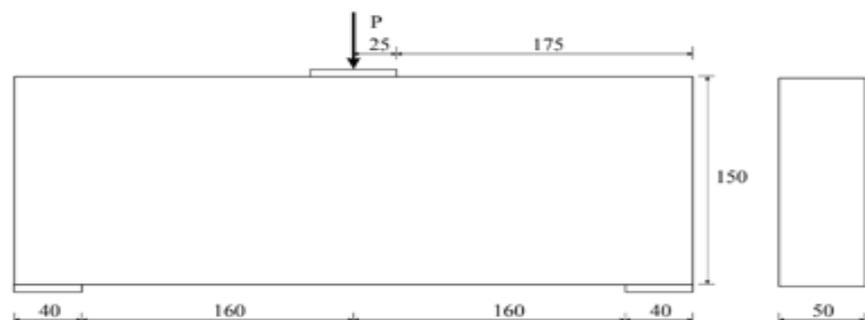
materiais. Atualmente existe uma série de técnicas utilizadas na resolução dos problemas de otimização topológica. A adotada neste trabalho é a formulação SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization).

A formulação via método SIMP surgiu como uma opção simples de introduzir o material com propriedades intermediárias similares às que se obtêm com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso da metodologia SIMP, este material intermediário, normalmente definido na forma de densidade artificial, é usado apenas como artifício matemático enquanto na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado. A função densidade artificial definida pelo SIMP é então utilizada como variável de projeto, definida no domínio  $\Omega$ , no intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias.

Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido com uma densidade artificial  $\rho = 1$  e o vazio com  $\rho = 0$ , variando entre esses dois limites. No presente contexto, as densidades artificiais intermediárias não têm nenhum interesse prático, logo técnicas que penalizem estes valores devem ser utilizadas no intuito de se evitar a incidência desse tipo de região no domínio analisado.

## 2.1 Exemplo

O exemplo de viga parede a ser analisado foi retirado do ACI 318-02 (2002) sendo suas unidades transformadas para o sistema internacional de unidades-SI e seus valores arredondados. A estrutura representa uma viga parede bi-apoiada de seção retangular constante cujos valores de cargas e propriedades geométricas e do material são mostrados na Figura 1.



**Figura 1:**  
Exemplo de viga parede  
presente no  
ACI 318-02 (2002).  
Fonte: Autor (2010).

$$P = P_p + P_q$$

$$P_p = 800 \text{ KN (Carga permanente)}$$

$$P_q = 1112 \text{ KN (Carga acidental)}$$

$$F_{ck} = 25 \text{ MPa (Resistência Característica do concreto)}$$

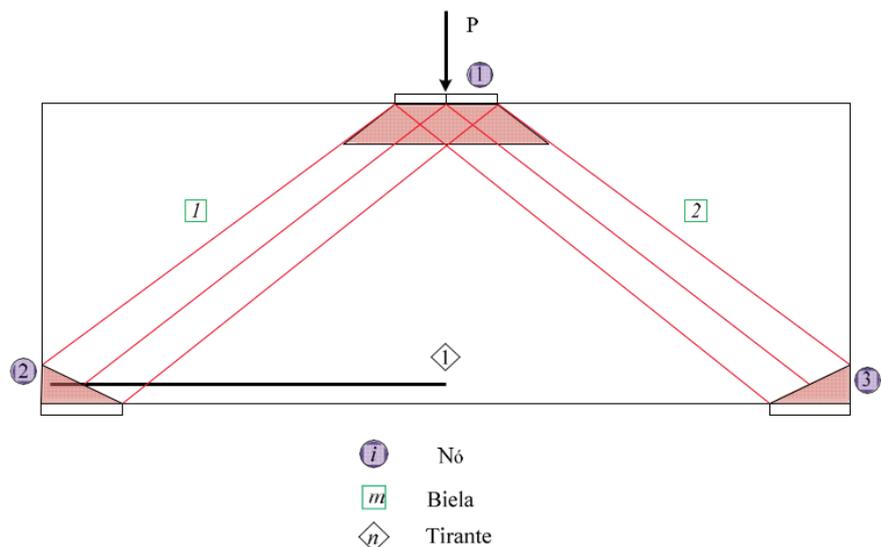
$$F_{yk} = 500 \text{ MPa (Resistência Característica à tração das armaduras – CA50A)}$$

### 3 MODELO PROPOSTO PELO ACI 318-02 (2002)

O modelo de bielas e tirantes apresentado na Figura 2 é apresentado no ACI 318-02 (2002) como exemplo ilustrativo para aplicação do modelo de bielas e tirantes. O modelo apresenta dois tipos de regiões nodais uma referente ao ponto de aplicação da carga  $P$  e outra referente aos pontos de apoio. Utilizando a nomenclatura originalmente proposta por Schlaich et al (1987), pode-se classificar o nó 1 como nó do tipo CCC, típicos nas regiões de introdução de cargas ou de reações de apoio, onde o estado tensional é decorrente das três forças de compressão existentes (carga  $P$  e bielas). Nesse caso o comprimento vertical do nó deve ser tal que a pressão sobre a placa de apoio governe o dimensionamento do nó.

Os nós 2 e 3 são idênticos e representam nós do tipo CCT, típicos de suportes de extremidades nos quais a altura de distribuição da armadura deverá ser definida. Foram adotados os valores apresentados no exemplo do ACI 318-02 (2002).

As bielas 1 e 2 serão responsáveis pelo encaminhamento de cargas dentro do contínuo até os apoios existentes. Conforme mostrado por Schlaich et al (1987), os campos em forma de leque ou garrafas são freqüentemente encontrados em regiões D, onde cargas concentradas são introduzidas na estrutura e nela se espriam. As bielas foram consideradas do tipo leque.



**Figura 2:**  
Modelo de bielas e tirantes proposto pelo ACI 318-02 (2002).  
Fonte: Autor (2010)

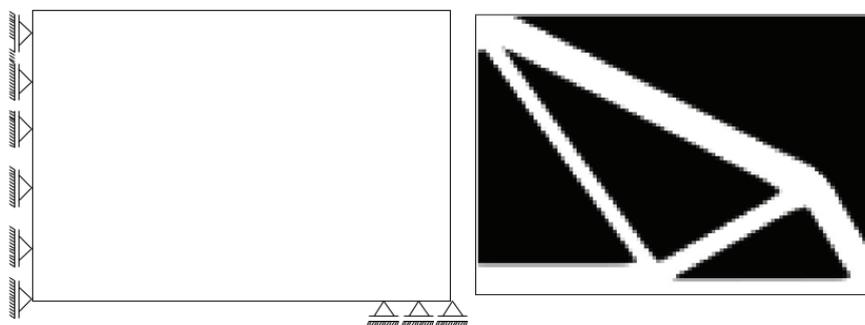
No tirante existente a força atuante será suportada pela armadura, sem que a resistência do concreto à tração seja considerada. Para dimensionamento do modelo o considerou-se o centro de gravidade das armaduras coincidentes com centro de gravidade do modelo (nós).

## 4 MODELO OBTIDO VIA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A figura 2 apresenta uma topologia obtida via otimização topológica com aplicação de simetria, para o modelo proposto. O problema de otimização de topologia foi formulado como um problema de distribuição de material no contínuo via modelo SIMP (Solid Isotropic Material Penalization). Essa modelagem busca a topologia ótima para uma estrutura através da aplicação de um material isotrópico com penalização na modelagem do problema. Uma malha com 75x100 elementos quadriláteros de 4 nós foi utilizada de forma a distribuir o material no seu interior. Uma fração de volume de 25% do volume inicial foi adotada como equação de restrição no processo de otimização. Exemplos da aplicação de técnicas de otimização na geração de topologias podem ser vistos em Ali (2003), Liang (2004), Bruggi (2009) e Pantoja et al (2009). Nesse exemplo não foi necessário o uso dos elementos indutores propostos por Pantoja et al (2009).

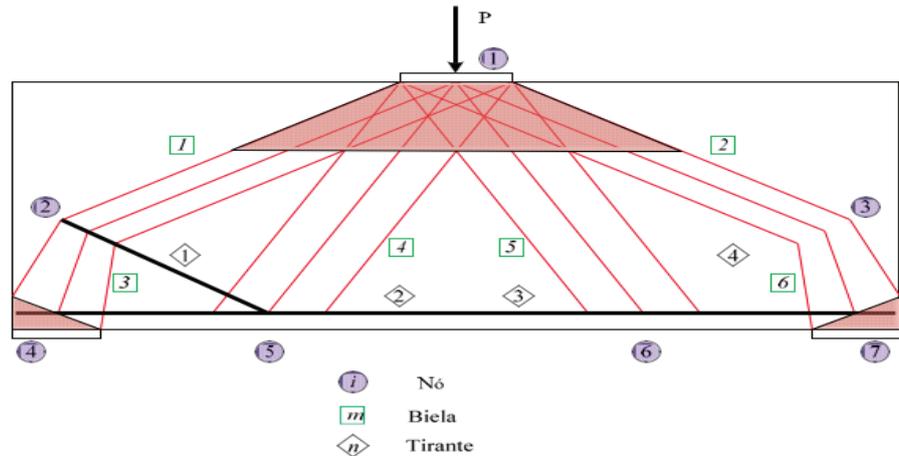
Observa-se uma razoável modificação na topologia do modelo se comparamos o modelo proposto pelo ACI 318-02 (2002) com esse. Isso mostra como é possível a obtenção de modelos topológicos distintos, estaticamente admissíveis, capazes de representar o encaminhamento de cargas no interior do contínuo.

**Figura 2:**  
Resultado do processo de otimização topológica com utilização.  
Fonte: Autor (2010)



A Figura 3 mostra o modelo de bielas e tirantes referente à topologia obtida. Verifica-se que o novo modelo apresenta um significativo aumento tanto das regiões nodais quanto do número de bielas e tirantes. Aplicando ao modelo às imposições geométricas referentes às placas de apoio e de aplicação de carga foi possível obter as espessuras limites e alturas das regiões nodais necessárias a montagem das equações de falha do modelo. Esse metodologia segue as orientações presentes originalmente no trabalho de Schlaich et al (1987) e apresentadas também em Silva e Giongo (2000) e Souza (2004).

**Figura 3:**  
Modelo de bielas e tirantes obtido via processo de otimização topológica.  
Fonte: Autor (2010)



## 5 CRITÉRIO BASEADO EM CONFIABILIDADE

Uma vez obtidos os dois modelos de bielas e tirantes estaticamente admissíveis conforme mostrado anteriormente, a adoção de um critério para avaliação do desempenho de cada um deles pode ser bastante interessante. O artigo apresentado por Schlaich et al (1987) propõe um critério baseado no Princípio da Energia de Deformação Mínima. Com base nesse critério modelos que possuam tirantes mais curtos são os melhores uma vez que a contribuição das bielas pode ser geralmente omitida devido aos seus pequenos valores de deformação. Posteriormente, no entanto, Mohamed e White (2001) mostraram que modelos baseados nesse critério podem levar a estruturas com uma fissuração excessiva e baixos valores de resistência.

Uma opção bastante interessante utiliza um critério baseado em confiabilidade para avaliar os aspectos relativos tanto a segurança quanto a ductilidade relativa aos modelos propostos. Um trabalho nessa área foi inicialmente proposto e mostrado em Pantoja et al (2010) para avaliação comparativa do desempenho de uma viga parede considerando as diversas formulações existentes para consideração da resistência efetiva à compressão do concreto presentes no ACI 318-02 (2002), CEB (1990) e Schlaich et al (1987). A formulação baseada em confiabilidade proposta considera os aspectos randômicos existentes nas variáveis do problema através de suas correspondentes distribuições de probabilidades e valores médios e desvios padrão. Assim, um método de simulação do tipo Monte Carlo pode ser aplicado e os valores de índices de confiabilidade e razões de probabilidade obtidas para avaliação do modelo. Nesse trabalho, em cada iteração do processo de simulação, 15.000.000 de valores randômicos para cada uma das variáveis foram gerados para obtenção de valores médios e coeficientes de correlação relativos aos resultados obtidos.

Esse enorme número de dados só foi possível devido à relativa simplicidade dos modelos considerados e suas respectivas equações de falha.

No presente trabalho foram consideradas as orientações propostas pelo comitê normativo de segurança estrutural JCSS (2001). A tabela 1 mostra os principais valores considerados para avaliação dos modelos de bielas e tirantes considerados.

**Tabela 1:**

Variáveis aleatórias do modelo. Fonte: Autor (2010).

Variável aleatória	Distribuição	Média	Desv. Padrao	Coef. de var.
Carregamento permanente	Normal	$P_{gm}$ (kN)	0,03 $P_{gm}$	0,03
Carregamento acidental	Gamma	$P_{qm}$ (kN)	1,5 $P_{qm}$	1,5
Resist. compressão - concreto	Lognormal	$f_{cm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	0,17 $f_{cm}$	0,17
Resist. tração - Aço	Lognormal	$f_{ym}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	0,05 $f_{ym}$	0,05

Vale salientar que o dimensionamento dos modelos de bielas e tirantes foi feito anteriormente a análise de confiabilidade executada. Apenas após a determinação dos valores de projeto do modelo é possível aplicar uma análise de confiabilidade no modelo e avaliação do seu desempenho. Os modos de falha referentes aos dois modelos considerados são: esmagamento dos nós, esmagamento das bielas e escoamento das armaduras. Não foram verificados os modos de falha referentes aos comprimentos de ancoragem das armaduras.

**Tabela 2:**

Modos de falha dos modelos. Fonte: Autor (2010)

Tipo de falha	Bielas	Nós	Tirantes
Modo de falha 1	Inclinada*		
Modo de falha 2		Superior*	
Modo de falha 3		Inferior*	
Modo de falha 4			Escoamento

\* Esmagamento

## 6 FUNÇÕES DE ESTADO DOS MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

As funções de estado consideradas são definidas abaixo para a verificação do estado limite último de resistência. Assim o modelo é considerado satisfatório quando são verificadas simultaneamente as seguintes condições (sistema em série):

### 7 MODELO 1 E 2

- **Bielas:**  $G_1(x_1, x_2, x_3) = R_1(x_1, x_2) - S_1$

onde:

$S_1(x_3)$  - Força solicitante atuante na biela comprimida;

$R_1(x_1, x_2) = F_e * A_p$  - Força resistente (Resistência efetiva X Área da biela)

- **Nós:**

$$G_2(x_1, x_2, x_3) = R_2(x_1, x_2) - S_2(x_3) \text{ e } G_3(x_1, x_2, x_3) = R_3(x_1, x_2) - S_3(x_3)$$

onde:

G2, equilíbrio dos nós tipo 1 e G3, equilíbrio dos nós tipo 2:

$$\sum \text{Forças} = 0$$

$S_2(x_2), S_3(x_3)$  - Forças solicitantes na placa (apoio ou carregamento);

$$R_2(x_1, x_2) = R_3(x_1, x_2) = F_e * A_p \text{ - Força resistente}$$

Muda conforme tipo de nó.

- **Tirantes:**  $G_4(x_1, x_2, x_3) = R_4(x_1, x_2) - S_4(x_3)$

onde:

$S_4(x_3)$  - Força solicitante atuante na tirante tracionado;

$$R_3(x_1, x_2) = F_e * A_p \text{ - Força resistente}$$

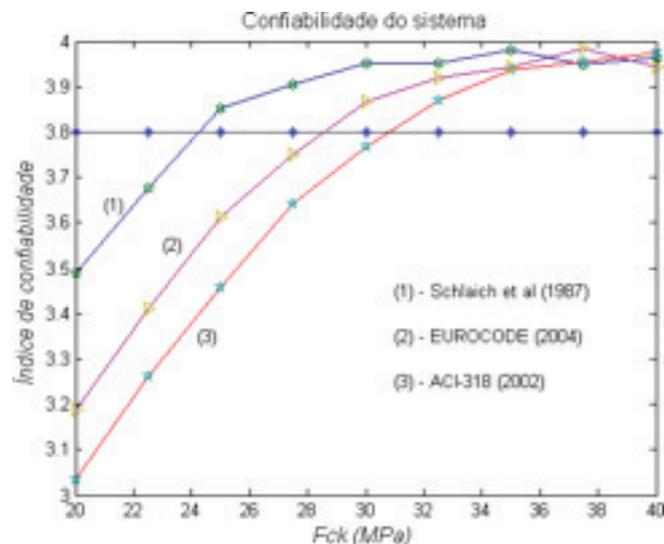
Todas formulações

$$F_e = f_y (i)$$

## 8 RESULTADOS

Os modelos 1 e 2 considerados nessa análise foram inicialmente dimensionados pelas orientações normativas presentes no ACI 318-02 (2002). Como já apresentado em Pantoja et al (2010), a área principal de armadura encontrada não atende os critérios de segurança e ductilidade solicitados pelo JCSS (2001). Esses resultados iniciais foram obtidos via método de simulação de Monte Carlo. Em seguida, um acréscimo de 50% nos valores das armaduras existentes foi feito. A área de armadura utilizada no tirante mais solicitado é de 110,00 cm<sup>2</sup>. Uma vez que o valor da maior força normal atuante nos tirantes é a mesma nos dois modelos devido a topologia adotada, uma mesma área, porém com detalhamento diferente foi utilizado (Figura 2 e 3). Os valores de resistência efetiva à compressão das bielas e nós a serem computados nas respectivas funções de falha, foram considerados segundo três diferentes formulações: Schlaich et al (1987), EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002).

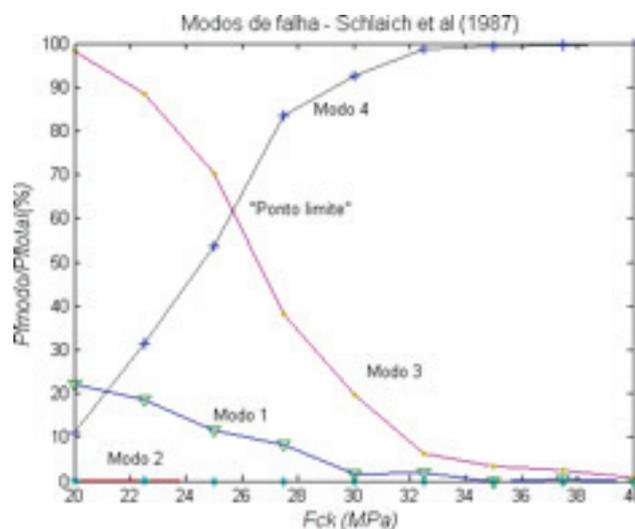
O modelo 1 foi primeiramente analisado, e os resultados são mostrados na Figura 1 abaixo. Todas as formulações apresentadas conseguiram cumprir o índice de confiabilidade alvo, no entanto, foram necessários diferentes valores de resistência característica do concreto para isso.



**Figura 1:**  
Índice de confiabilidade do sistema do modelo1.  
Fonte: Autor (2010).

A formulação proposta por Schlaich et al (1987) foi a que obteve maiores valores para o índice de confiabilidade, conseguindo cumprir o valor do índice de confiabilidade alvo para valores superiores a 25 MPa. A formulação apresentada pelo EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002) necessitaram de valores superiores a 29 MPa e 31MPa para atingir os mesmos níveis de segurança.

De modo a caracterizar o comportamento dos modos de falhas do modelo 1, as relações entre a probabilidade de cada modo de falha existente e a probabilidade de falha total do sistema foram obtidas em porcentagem. A Figura 2 apresenta os resultados obtidos para resistência efetiva à compressão considerada segundo a formulação de Schlaich et al (1987). Interessante observar que, considerando as funções de falha propostas, apenas a partir de valores superiores a 26 MPa foi possível obter porcentagem maiores para falha do tipo dúctil (escoamento da armadura) representado pelo modo de falha 4 do que para o modo de falha 3 (esmagamento da biela inclinada). Ao ponto onde há essa inversão de valores denominou-se ponto limite ou de controle de ductilidade.

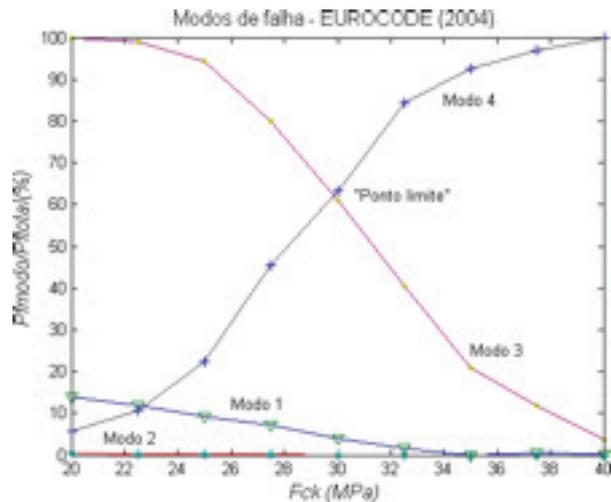


**Figura 2:** Modos de falha do modelo1 segundo a formulação de Schlaich *et al* (1987).  
Fonte: Autor (2010)

Observa-se que o modo de falha 3 governa o rompimento frágil do modelo 1 uma vez que o modo de falha 1 (esmagamento do nó superior) e modo de falha 2 (esmagamento do nó inferior) têm valores bastante inferiores a esse. No caso de garantir uma ruptura dúctil para a estrutura do modelo 1, seria necessário definir valores mínimos de  $F_{ck}$  de modo que um alto valor para modo 4 e um baixo valor para modo 3 ocorressem simultaneamente.

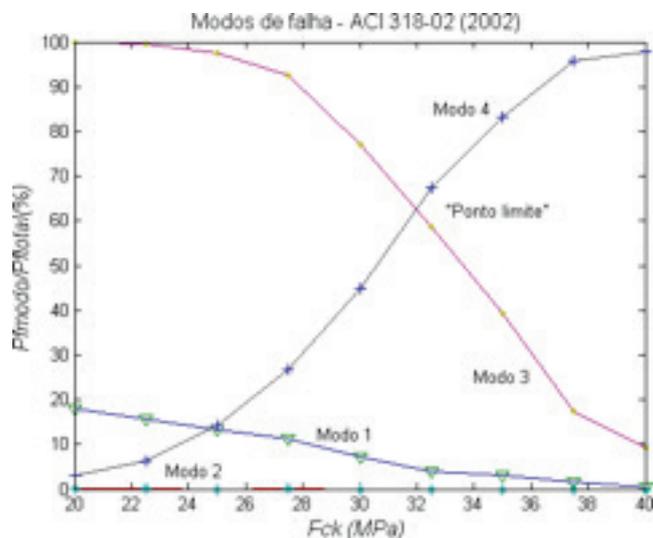
A formulação proposta pelo EUROCODE (2004) tem seu comportamento para os modos de falha apresentado na Figura 3. O ponto limite nesse caso foi obtido próximo a 30 MPa, o que mostra a necessidade de um aumento no valor da resistência característica do concreto  $F_{ck}$  para atingir um comportamento semelhante ao apresentado por Schlaich et al (1987) na busca por um comportamento dúctil. Apesar de bastante semelhantes o modo de falha 1 nessa formulação obteve valores menores do que na formulação anterior.

**Figura 3:**  
Modos de falha do modelo1 segundo a formulação de EUROCODE (2004).  
Fonte: Autor (2010).



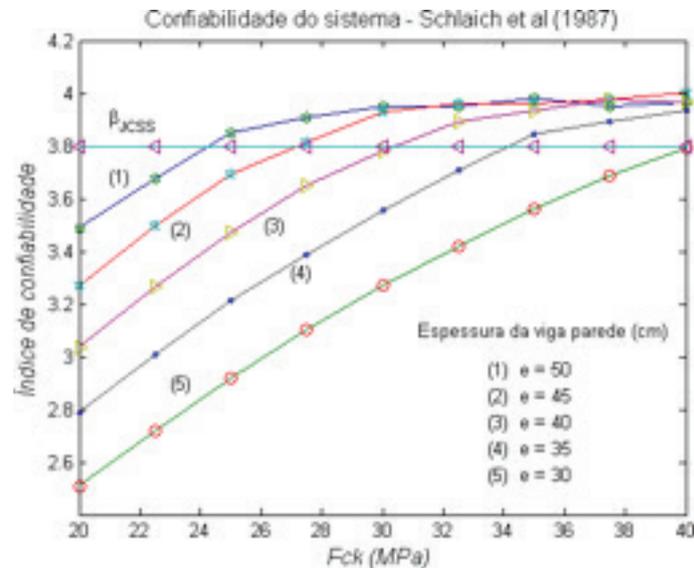
Também a formulação apresentada pelo ACI 318-02 (2002) apresentou a necessidade de maiores valores de  $F_{ck}$  para atingir o ponto limite, com relação as formulações anteriores. Isso significa uma probabilidade maior da ocorrência de ruptura frágil na estrutura. Uma vez que a mobilização da estrutura treliçada dentro da massa de concreto se faz necessária, uma ruptura frágil poderia comprometer o funcionamento do modelo dentro da mesma, conforme apresentado em Schlaich et al (1987).

**Figura 4:**  
Modos de falha do modelo1 segundo a formulação de ACI (2002).  
Fonte: Autor (2010).



A delimitação entre vigas-parede e vigas esbeltas é normalmente feita de acordo com a relação  $l/h$ , sendo  $l$  o vão de cálculo e  $h$  a altura da viga. Os limites de esbeltez convencionados são baseados nesse critério conforme apresenta Araújo (2003). No entanto, a espessura de uma viga parede pode ser muitas vezes um item determinante na escolha do modelo, pois tem uma influência direta sobre o custo da estrutura (volume de material aplicado) e também devido ao seu dimensionamento com relação à segurança e tipo de ruptura considerada.

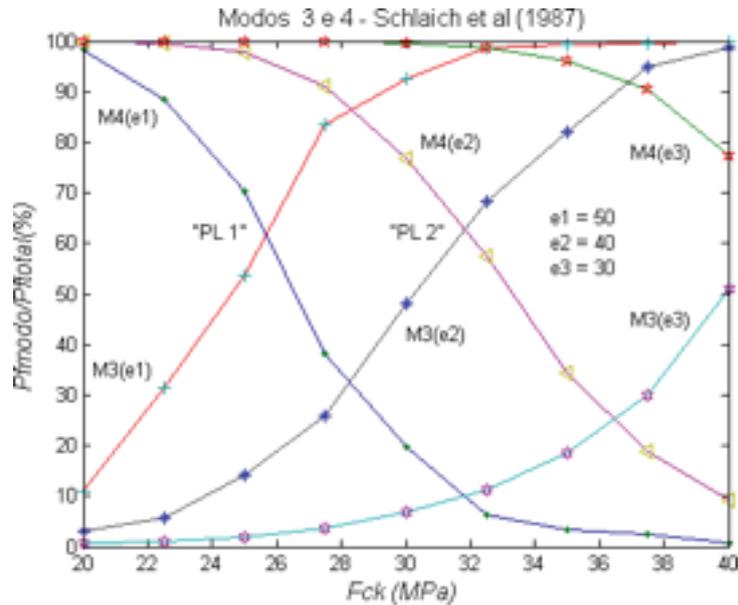
A Figura 5 abaixo mostra a variação do índice de confiabilidade do sistema do modelo 1 quando a espessura do mesmo. Nota-se um decréscimo bastante acentuado no índice de confiabilidade quando sua espessura é diminuída.



**Figura 5:**  
Confiabilidade do sistema do modelo1 com variação da espessura.  
Fonte: Autor (2010)

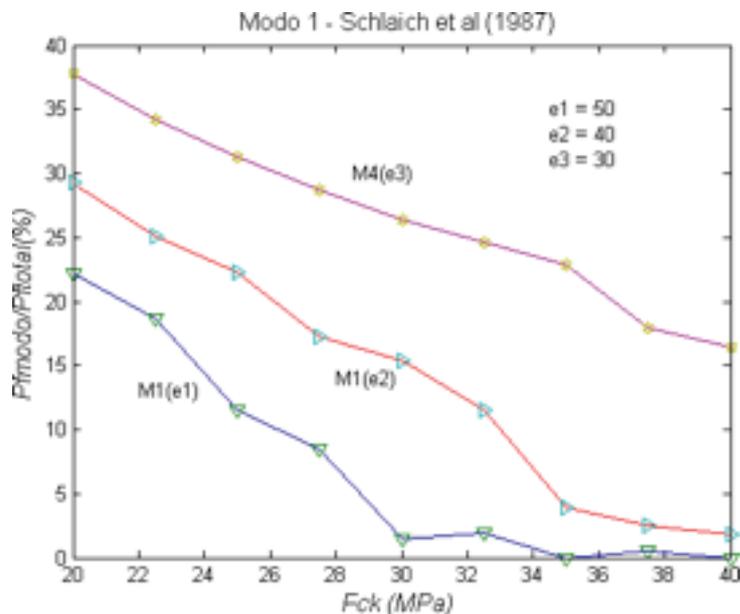
Um aumento significativo no valor da resistência característica do modelo é necessário para que o nível alvo do índice de confiabilidade seja atingido. Isso mostra como a diminuição na espessura da viga parede leva a um modelo menos seguro. Um aumento no  $F_{ck}$  então é necessário para cumprir o quesito de segurança. Um estudo mais apropriado seria considerar uma função de custo que se considera as variáveis  $F_{ck}$  e volume de material e que poderia ser otimizada levando a uma relação de  $F_{ck}$  e espessura ótima para um determinado modelo.

Com relação à ductilidade do modelo 1, a Figura 6 mostra seu comportamento quando há uma variação na espessura. Observa-se que à medida que a espessura da viga parede diminui o ponto limite, que mede a ductilidade do modelo, sofre um deslocamento horizontal conduzindo a um modelo com comportamento mais frágil. Quando a espessura atinge 30 cm, o ponto limite não pode ser obtido mesmo com valores de  $F_{ck}$  iguais a 40 MPa. Nessa figura, apenas os modos mais críticos, ou seja, o modo 3 (esmagamento da biela inclinada) e modo 4 (escoamento do aço) foram apresentados para melhor clareza do comportamento.



**Figura 6:**  
Ductilidade do modelo1 com a variação da espessura.  
Fonte: Autor (2010)

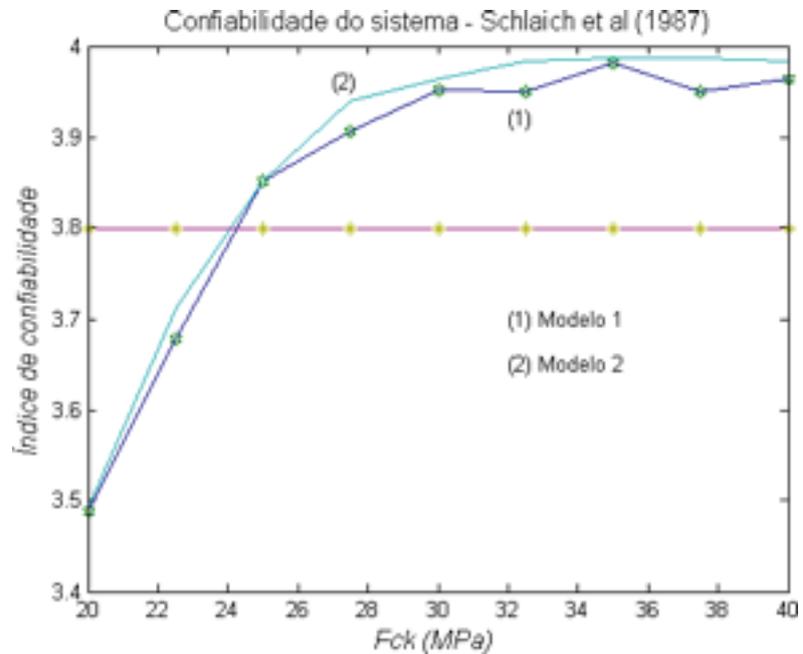
Também a relação de probabilidade do modo 1 (esmagamento do nó superior) teve seus valores aumentados com diminuição da espessura da viga parede conforme mostra a Figura 7.



**Figura 7:**  
Ductilidade do modelo1 com a variação da espessura para modo 1.  
Fonte: Autor (2010)

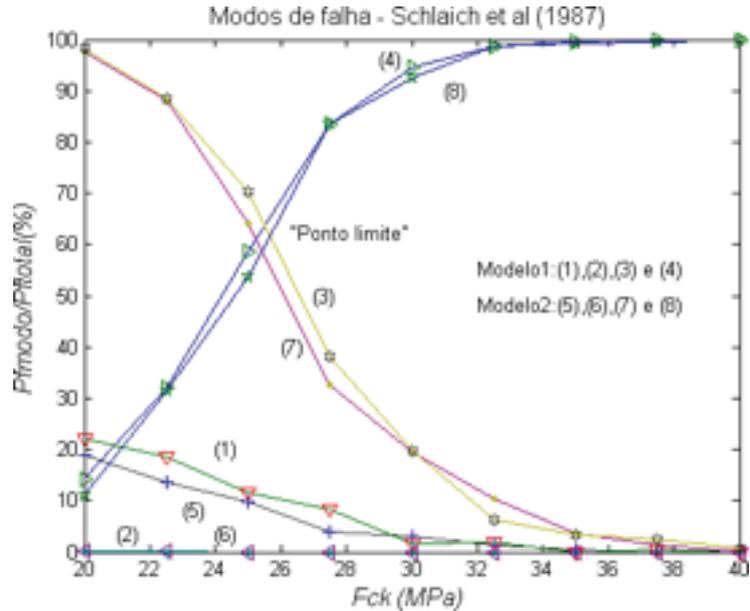
A seguir o modelo 2, obtido via otimização topológica, é analisado e seu desempenho comparado com o do modelo 1. Sua diferença de topologia conduziu a menores valores nos esforços de compressão das bielas e valores semelhantes em partes dos tirantes. Mesmo assim, devido a geometria dos nós, bielas e tirantes os esforços tiveram valores não muito discrepantes dos valores máximos. A Figura 8 mostra como o modelo 1 e 2 obtiveram desempenhos semelhantes com relação

a obtenção dos índices de confiabilidade devido a variação do  $F_{ck}$ . Isso em parte pode ser atribuído a dois fatores. Primeiro que os modos de falha dominantes continuaram os mesmos ou seja os modos de esmagamento da biela inclinada e escoamento do aço conduziram o comportamento principal da peça. O segundo motivo se refere a pouca diferença existente entre os esforços nas barras de bielas e tirantes. Isso conduziu a valores de índices de confiabilidade semelhantes em ambos os modelos. Mesmo assim, o modelo 2 conduziu a valores de índice de confiabilidade ligeiramente superiores o que parece estar coerente uma vez que os esforços na barras do modelo 2 são ligeiramente inferiores. Os dois modelos atingiram o índice de confiabilidade de referência praticamente no mesmo ponto.



**Figura 8:**  
 Comparação entre os índices de confiabilidade do sistema do modelo 1 e 2.  
 Fonte: Autor (2010).

Assim fica claro que os modelos 1 e 2 obtiveram desempenho bastante semelhantes com relação a obtenção do índice de confiabilidade e relação de probabilidade referente aos modos de falha.



**Figura 9:**  
Comparação da ductilidade do modelo 1 e 2 com a variação da espessura.  
Fonte: Autor (2010).

Vale salientar que apesar dos modelos possuírem um número de modos de falha diferentes em cada modelo, os modos de falha governantes do problema foram os mesmos, o que provavelmente conduziu a comportamentos semelhantes no seu desempenho.

## 9 CONCLUSÕES

Esse trabalho apresentou um critério de confiabilidade para análise do desempenho de modelos de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado. O método de simulação de Monte Carlo foi adotado para cálculo dos valores de índice de confiabilidade e relações de probabilidade para os diversos modos de falha existentes. Dois modelos foram testados, sendo seu desempenho com relação à segurança e confiabilidade dos modelos obtida. Os resultados apresentados revelaram um comportamento bastante semelhante para os dois modelos. Isso provavelmente se deve ao fato dos modos de falha que governam o problema ser os mesmos nos dois modelos.

No modelo 1 três formulações diferentes para cálculo da tensão resistente efetivas nos nós e bielas foram testadas. A formulação original proposta por Schlaich et al (1987) levou a valores mais seguros e mais dúcteis para o sistema do modelo considerado. As formulações do EUROCODE (2004) e ACI 318-02 (2002) necessitaram de valores maiores de Fck para obtenção de índices de confiabilidade e ponto limites semelhantes à formulação de Schlaich et al (1987). O EUROCODE (2004) levou a valores mais seguros que os do ACI 318-02 (2002). Uma análise com relação a influência da espessura da viga

parede na segurança e ductilidade da estrutura foi apresentada. Segundo os resultados obtidos valores baixos de espessura podem levar a ruptura frágil, mesmo para valores de  $F_{ck}$  altos. A obtenção de uma topologia para montagem do modelo de bielas e tirantes também foi feita através do algoritmo de otimização topológica do modelo SIMP. Assim foi possível confirmar a validade da utilização desse tipo formulação na obtenção de modelos estaticamente admissíveis na prática de projeto.

## 10 REFERÊNCIAS

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE.** ACI 318-02 – *Building Code Requirements for Structural Concrete*, 2002.
- ALI, M.** *Automatic generation of truss models for the optimal design of reinforced concrete structures*. Dissertation. Cornell University, Ithaca, NY, USA, 1997.
- ARAÚJO, J.M..** *Curso de Concreto Armado Vol. 1, 2, 3 e 4*. Editora Dunas, Rio Grande do Sul, 2003.
- BENDSØE, M. P. & KIKUCHI, N.,** *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2):197-224, 1988.
- BENDSØE, M. P. & SIGMUND, O.,** *Material interpolation schemes in topology optimization*, *Archives of Applied Mechanics* 69(9-10): 635-654, 1999.
- BENDSØE, M. P. & SIGMUND, O.,.** *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2003
- BRUGGI, M.** *Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization*. *Computers and Structures*, 87:1483-1495, 2009.
- EUROCODE 2.** *European Standard – First Draft*, 2004.
- JCSS – Probabilistic model code.** *The Joint Commite on Structural Safety. The Probabilistic Model Code*, 2001.
- LIANG, Q. Q.,** *Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications*. Spon Press - Taylor & Francis Group, 2005.

- PANTOJA, J. C.; VAZ, L. E.; MARTHA, L. F.** *Modelo de Bielas e Tirantes Gerados por Otimização Topológica e Elementos Indutores*. Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais – XXX CILAMCE. Búzios. Rio de Janeiro/RJ, 2009.
- PANTOJA, J. C.; VAZ, L. E.; MARTHA, L. F.** *Reliability analysis of concrete structures applied to strut-and-tie model*. SEMC – The Fourth International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation, Cape Town – South Africa, 2010
- ROZVANY, G. I. N. & ZHOU, M.,.** *The COC algorithm, part I: Cross-section optimization or sizing*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89:281-308, 1991.
- SANTOS, S. H. C.** – *Detalhamento de Estruturas de Concreto Armado*. Apostila do curso da UFRJ, 2010.
- SCHÄFER, K. E SCHLAICH, J.** *Consistent Design of Structural Concrete using Strut and Tie Models*. In: Colóquio sobre Comportamento e Projeto de Estruturas, PUC Rio., Rio de Janeiro/RJ, 1988
- SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; Jennewein, M.** *Towards a Consistent Design of Structural Concrete*. *PCI Journal*, v.32, n.3, p.74-150. May-June, 1987.
- SILVA, R. C. E GIONGO, J. S.** *Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado*. Livro. Editora EESC-USP. São Carlos/SP, 2000.
- SOUZA, R. A.** *Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades*. Tese de doutorado. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP, 2004.

# O impacto das incertezas epistêmicas sobre o nível de segurança das vigas de concreto armado sujeitas a torção pura e reforçadas com polímero reforçado com fibra de carbono – CFRP

**Oswaldo Luiz C. Souza**

Universidade Federal rural do Rio de Janeiro, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo  
Rio de Janeiro-RJ, Brasil  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5413841619454533>

**João da Costa Pantoja**

Universidade de Brasília,  
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo  
Brasília-DF, Brasil  
Pesquisador do Grupo CONSTRUCT-LESE - Faculdade de Engenharia  
da Universidade do Porto  
[joaocpantoja@gmail.com](mailto:joaocpantoja@gmail.com)  
lattes: <http://lattes.cnpq.br/6879105340639188>

**Luiz Eloy Vaz**

Universidade Federal Fluminense  
Rio de Janeiro-RJ, Brasil  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4321281058166070>

**Emil S. Sanchez Filho**

Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Civil  
Rio de Janeiro-RJ, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/7266906180520143>

# O impacto das incertezas epistêmicas sobre o nível de segurança das vigas de concreto armado sujeitas a torção pura e reforçadas com polímero reforçado com fibra de carbono – CFRP

João da Costa Pantoja | Luiz Fernando Martha |

Luiz Eloy Vaz | Emil S. Sanchez Filho

## Resumo

O objetivo deste trabalho é avaliar a variação da segurança de vigas de concreto reforçadas com aço e polímero reforçado com fibra de carbono - CFRP, sujeitas à torção pura como resultado da consideração das incertezas do modelo do fator de resistência. Os resultados são obtidos a partir da análise de confiabilidade utilizando metodologia e configurações de reforço existentes na literatura. Os valores de concepção dos momentos de torção para a configuração são obtidos com o método semi-probabilístico (L.E.) de acordo com a NBR 6118 (2007). A variação do índice de confiabilidade das vigas em consequência da alteração dos valores para os modelos probabilísticos do fator de resistência é analisada, tendo sido demonstrada a influência do fator de resistência e do coeficiente de variação sobre a confiabilidade do sistema.

## Palavras-chave

Índice de confiabilidade, probabilidade de falha, reforço a torção.

# ***The impact of epistemic uncertainties over safety level of reinforced concrete beams subjected to pure torsion and reinforced with carbon fiber reinforced polymer - CFRP***

## **Abstract**

*The aim of this paper is to evaluate the variation of security of concrete beams reinforced with steel and Carbon Fiber Reinforced Polymer – CFRP, subjected to pure torsion as a result of the consideration of the uncertainties of the resistance factor model. The results are obtained from reliability analysis using methodology and configurations of reinforcement existent in the literature. The design values of the torsion moments for the configuration are obtained with the semi-probabilistic method (L.E.) in accordance with the NBR 6118 (2007). The variation of the index of reliability  $\beta_{\text{sis}}$  of the beams in consequence of the change of the values for the probabilistic models of the resistance factor  $\phi_R$  is analyzed. It was shown the influence of resistance factor and variation coefficient over the system reliability.*

## **Keywords**

*Reliability Index, Probability of Failure, Torsion Reinforcement.*

## 1 INTRODUÇÃO

O funcionamento adequado, a segurança e a durabilidade são os requisitos fundamentais aos elementos estruturais quando solicitados por diversos tipos de carregamento.

A intensidade e distribuição das ações permanentes e variáveis, os parâmetros geométricos, as propriedades mecânicas, hipótese e limitações dos modelos de cálculo e de análise estrutural constituem um conjunto de incertezas a ser considerado na elaboração de um projeto estrutural. Essas incertezas mantêm-se presentes durante toda a vida útil da construção

ANBR 6118 (2007) tem como filosofia de dimensionamento o método dos estados limites (E. L. U.), que considera as incertezas referentes às variáveis envolvidas no dimensionamento, indiretamente, a partir de um enfoque semi-probabilístico por meio de coeficientes parciais, que aplicados sobre os valores característicos das resistências e solicitações, transformam-nas em resistência de cálculo  $R_d$  e solicitação de cálculo  $S_d$ , respectivamente.

A análise de confiabilidade permite a consideração analítica dessas incertezas a partir das suas respectivas distribuições estatísticas, e por meio dessa é possível avaliar o nível de desempenho e segurança da estrutura analisada.

Este artigo avalia os resultados obtidos na análise de confiabilidade de viga de concreto armado solicitada pelo seu respectivo valor médio de resistência à torção pura, reforçada longitudinalmente e transversalmente com compósito de fibras de carbono (CFC), em conformidade com a metodologia de SILVA FILHO (2007).

## 2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

A confiabilidade de uma estrutura consiste na avaliação da probabilidade de não ocorrência de falha da mesma ao desempenhar os objetivos para os quais foi dimensionada. Considerando-se a impossibilidade da inexistência de falha define-se a confiabilidade de uma estrutura como o complemento da probabilidade de falha da mesma:

(1)

$$C = 1 - P_f$$

A probabilidade de falha, em termos de análise de confiabilidade, é definida a partir de um valor mínimo de índice de confiabilidade de referência  $\beta_a$ . A definição do índice de referência está vinculada a fatores que ultrapassam o âmbito de atuação do engenheiro, tais como: fatores sociais, econômicos, políticos e outros.

O problema básico de confiabilidade estrutural é definido por meio de duas variáveis independentes  $R$  e  $S$ , que representam, respectivamente, uma resistência e uma solicitação.

Esse problema é resolvido por meio da definição da margem de segurança representada por uma variável  $Z$ , dada por:

(2) 
$$Z = R - S$$

A violação do Estado Limite Último – ELU é representada a partir dos valores negativos de  $Z$ , caracterizada a partir de uma resistência  $R$  inferior a uma solicitação  $S$ .

Nesse caso, a probabilidade de falha é dada por:

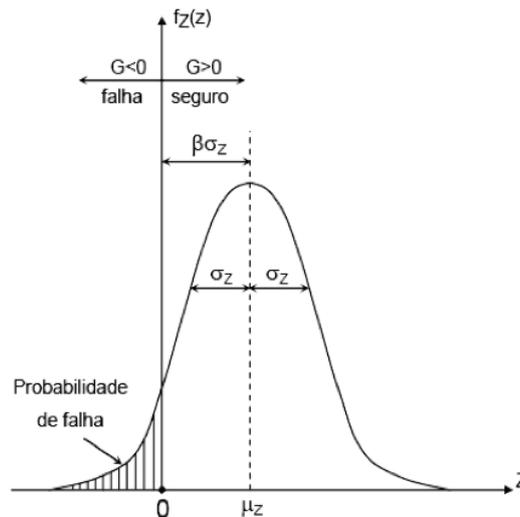
(3) 
$$P_f = P(Z = R - S \leq 0)$$

Para uma situação particular, em que  $R$  e  $S$  são variáveis Normais com médias  $\mu_R$  e  $\mu_S$  e variâncias  $\sigma_R^2$  e  $\sigma_S^2$ , a margem de segurança é representada por uma variável normal  $Z$ , com média  $\mu_Z$  e variância  $\sigma_Z^2$  obtidas por:

(4) 
$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S$$

(5) 
$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$$

A Figura 1 ilustra a função densidade de probabilidade da margem de segurança, onde se encontram representados a probabilidade de falha  $P_f$  e o índice de confiabilidade  $\beta$  para esse problema.



**Figura 1:**  
 Distribuição da margem de segurança.  
 Fonte: Adaptado de MELCHERS (2002)

A variável normal  $Z$  pode ser escrita como:

(6) 
$$Z = \mu_Z - \beta\sigma_Z = 0$$

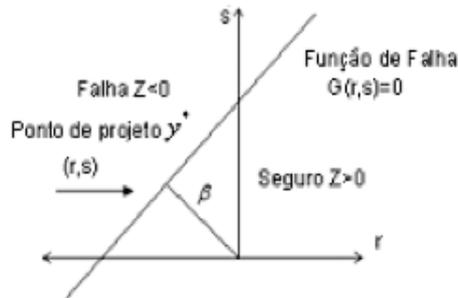
Considerando-se que a falha se dá a partir de  $Z = 0$ , o índice de confiabilidade do problema básico  $\beta$  é obtido na forma:

$$(7) \quad \beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$$

$$(8) \quad \beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}}$$

A Figura 2 ilustra graficamente o problema básico de confiabilidade no espaço das variáveis normais reduzidas não-correlacionadas. O ponto sobre a função de falha,  $G(\mathbf{r},\mathbf{s}) = 0$ , mais próximo à origem no espaço reduzido é definido como ponto de projeto  $y^*$ . A distância de  $y^*$  a essa mesma origem é o valor do índice de confiabilidade  $\beta$  do modo de falha considerado.

**Figura 2:**  
 Problema básico de confiabilidade no espaço reduzido  $r, s$ .  
 Fonte: Autor (2011)



A segurança estrutural a partir da definição do índice de confiabilidade  $\beta$ , que é associado à probabilidade de falha é dada a partir da expressão:

$$(9) \quad P_f = P(Z = R - S \leq 0) = \Phi(-\beta)$$

A maioria dos casos em análise de confiabilidade apresenta diversas variáveis dependentes, não normais e funções de falha não lineares, tornando a obtenção do índice de confiabilidade complexa. Este trabalho utiliza o método analítico FORM (*FirstOrderReliabilityMethod*), cuja ideia original baseia-se no significado geométrico, no espaço reduzido, do índice de confiabilidade  $\beta$  do problema básico com variáveis normais independentes (Figura 2).

O problema geral de análise de confiabilidade parte da definição de uma função de falha  $G(\mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{X}$  representa o vetor das variáveis aleatórias que podem ter diferentes tipos de distribuição e serem correlacionadas. A falha se dá quando a função de falha  $G(\mathbf{X}) \leq 0$ . A probabilidade de falha  $P_f$  associada à  $G(\mathbf{X}) \leq 0$  pode ser obtida por:

$$(10) \quad p_f = P(G(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} f(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$$

Onde  $f(\mathbf{X})$  é a função densidade de probabilidade multivariável. O cálculo do índice de confiabilidade do problema geral pode ser obtido com a solução do seguinte problema de programação matemática que fornece o ponto  $X^*$  e o valor de  $\beta$ :

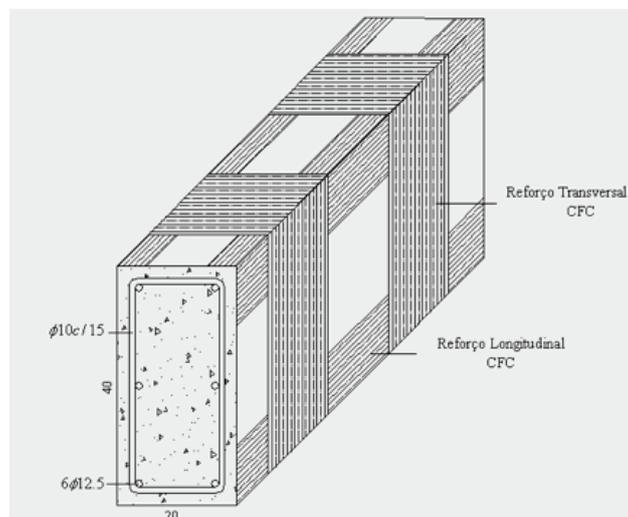
$$(11) \quad \begin{aligned} \text{Min } \beta &= \|\mathbf{X}\| \\ \text{s.t: } G(\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned}$$

O algoritmo mais utilizado para resolver o problema definido na Eq.(11) é o HLRF desenvolvido por HASOFER e LIND (1974) e RACKWITS e FIESSLER (1978). O algoritmo possibilita o cálculo do índice de confiabilidade a partir da transformação das variáveis aleatórias  $X$  (espaço original), podendo essas ter distribuições quaisquer e serem dependentes entre si ou não, em variáveis normais equivalentes reduzidas não-correlacionadas  $y$  (espaço reduzido), e vice-versa, em cada iteração. Uma vez feito,  $X^*$  e seu valor correspondente no espaço reduzido,  $y^*$ , a probabilidade de falha  $P_f$  é calculada com o uso da Eq.(9) o que representa uma aproximação, uma vez que esse valor corresponde à probabilidade de falha de uma função de falha linear que passa por  $y^*$  e é tangente à função de falha original nesse ponto. Um estudo mais apurado sobre o método encontra-se em HALDAR e MAHADEVAN (2000).

### 3 DESCRIÇÃO DA ANÁLISE

#### 3.1 Modelo Considerado

A Figura 3 mostra as características geométricas e a configuração de reforço em aço e CFC da viga analisada.



**Figura 3:**  
Características geométricas e configuração de reforço da viga analisada.  
Fonte: Autor (2011)

### 3.2 Variáveis Aleatórias do Problema

O valor médio de resistência à torção  $T$ , obtido segundo a NBR 6118 (2007), considerando-se as ações permanentes e variáveis normais, é constante, sendo esse, no entanto, constituído por parcelas de momentos permanente e variável, que caracterizam as razões de carga variável adotada  $r_q = 0,4$ ,  $r_q = 0,5$  e  $r_q = 0,6$ .

A análise considera a aleatoriedade das variáveis inseridas na metodologia de reforço utilizada: resistência à compressão do concreto  $f_c$ , tensão de escoamento do aço  $f_s$ , do módulo de elasticidade do compósito  $E_f$  e das solicitações permanente  $T_g$  e variável  $T_q$ , ressaltando aspectos intrínsecos à variável fator de modelagem de resistência  $\phi_R$  que tem como objetivo levar em conta as imprecisões nos modelos de cálculo advindas de simplificações nos mesmos.

A Tabela 1 mostra os valores dos modelos probabilísticos das variáveis envolvidas no dimensionamento cujas aleatoriedades foram consideradas na análise.

**Tabela 1:** Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias.  
 Fonte: Autor (2011)

Variáveis Básicas	Média ( $\mu$ )	Coef. Var. ( $\delta$ )	FDP
Tensão Concreto (MPa) – $f_c$	36,6	0,11	Lognormal
Tensão Escoamento Aço (MPa) – $f_s$	560	0,05	Lognormal
Módulo de Elasticidade Compósito (GPa) – $E_f$	256,72	0,04	Weibull
Solic. Perm. (kNm) – $T_g$	11,25	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm) – $T_q$			
Solic. Perm. (kNm) – $T_g$	9,38	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm) – $T_q$			
Solic. Perm. (kNm) – $T_g$	7,50	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm) – $T_q$			
Solic. Perm. (kNm) – $T_g$	11,25	0,25	Gumbel
Solic. Varia. (kNm) – $T_q$			
Fator de Modelagem de Resistência – $\phi_R$	Variável	Variável	Normal

A análise é conduzida com o objetivo de avaliar a variação do nível de segurança da viga em consequência dos vários valores adotados para as médias  $\mu_{\phi_R}$  e coeficientes de variação  $\delta_{\phi_R}$  da variável fator de modelagem de resistência  $\phi_R$ .

A Tabela 2 mostra os valores adotados para as médias  $\mu_{\phi_R}$  e coeficientes de variação  $\delta_{\phi_R}$  da variável considerada  $\phi_R$ .

**Tabela 2:** Médias  $\mu_{\phi_R}$  e coeficientes de variação  $\delta_{\phi_R}$ .  
Fonte: Autor (2011)

Fator de Modelagem de Resistência – $\phi_R$	
Média $\mu_{\phi_R}$	0,80,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5
Coeficiente de Variação $\delta_{\phi_R}$	0,100,15 0,20 0,25 0,30

### 3.3 Funções de Estado

O modelo teórico para dimensionamento do reforço adota o modelo da Treliça Espacial Generalizada e a metodologia do Eurocode2, sendo a tensão efetiva de aderência CFC – concreto e o ângulo de inclinação das bielas flexo-comprimidas considerados, respectivamente, a partir de CHEN e TENG (2003), e APRILE et al. (2004). A partir do modelo teórico adotado foram definidas as funções de falha ou funções de estado, que determinam o limite de violação de um estado limite a partir de uma resistência  $R$  igual a uma solicitação  $S$ .

A equação de falha relativa à ruína da biela flexo-comprimida de concreto da viga com reforço é:

$$(12) \quad G_1 = 2 \left[ 0,7 \left( 0,7 - \frac{f_c}{20} \right) \right] f_c \left[ \frac{tA_k}{\frac{1}{\text{tg}\theta} + \text{tg}\theta} \right] - (T_g + T_q)$$

Para a equação de falha relativa ao escoamento da armadura longitudinal de aço e reforço longitudinal da viga com reforço tem-se:

$$(13) \quad G_2 = 2A_k \text{tg}\theta \frac{A_{sl} f_s}{u_k} + \frac{A_{fl}}{u} 2bh \left[ \frac{0,192 \sqrt{\frac{E_f}{t_f} \sqrt{10f_c}}}{10} \right] \text{tg}\theta - (T_g + T_q)$$

Para a equação de falha relativa ao escoamento da armadura transversal de aço e reforço transversal da viga com reforço segue-se.

$$(14) \quad G_3 = 2A_k \frac{1}{\text{tg}\theta} \frac{A_{st} f_s}{s} + \frac{\frac{A_{ft}}{s_f} 2bh \left[ \frac{0,192 \sqrt{\frac{E_f}{t_f} \sqrt{10f_c}}}{10} \right]}{\text{tg}\theta} - (T_g + T_q)$$

O ângulo de inclinação das bielas para aplicação das equações de falha definidas na Eq.(12)e na Eq. (14) é obtido por:

$$(15) \quad \operatorname{tg} \theta = \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{1}{\frac{E_s A_{st}}{9500(10f_c + 8)^{\frac{1}{3}} t u_k} + \frac{E_f A_{fl}}{9500(10f_c + 8)^{\frac{1}{3}} t u}}}{1 + \frac{1}{\frac{E_s A_{st}}{9500(10f_c + 8)^{\frac{1}{3}} t s} + \frac{E_f A_{ft}}{9500(10f_c + 8)^{\frac{1}{3}} t s_f}}}}$$

onde:

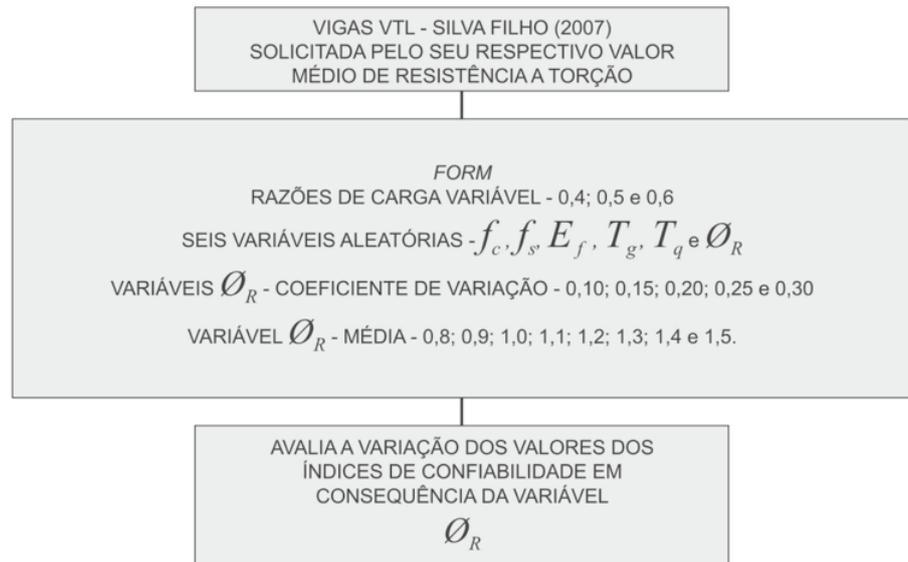
- $A_{fl}$  – área reforço longitudinal de CFC;
- $A_{ft}$  – área reforço transversal de CFC;
- $A_k$  – área limitada pela linha média da parede efetiva;
- $A_{st}$  – área da armadura transversal;
- $A_{sl}$  – área da armadura longitudinal;
- $b$  – largura da viga;
- $E_f$  – módulo de elasticidade CFC na direção das fibras;
- $E_s$  – módulo de elasticidade do aço;
- $f_c$  – resistência média a compressão do concreto;
- $f_s$  – resistência média de escoamento do aço;
- $h$  – altura da viga;
- $s$  – espaçamento da armadura transversal;
- $s_f$  – espaçamento eixo a eixo dos estribos de CFC;
- $t$  – espessura da parede efetiva;
- $t_f$  – espessura do reforço de CFC;
- $u$  – perímetro da seção transversal;
- $u_k$  – perímetro da área  $A_k$ .

### 3.4 Método de Resolução

A análise foi conduzida por etapas, adiante descritas, utilizando-se o método FORM:

- a) cálculo dos índices de confiabilidade dos três modos de falha considerados e suas respectivas probabilidades de falha;
- b) probabilidade de falha do sistema em série, por meio do cálculo da união das regiões de falha dos modos considerados;
- c) obtenção do índice de confiabilidade do sistema em série.

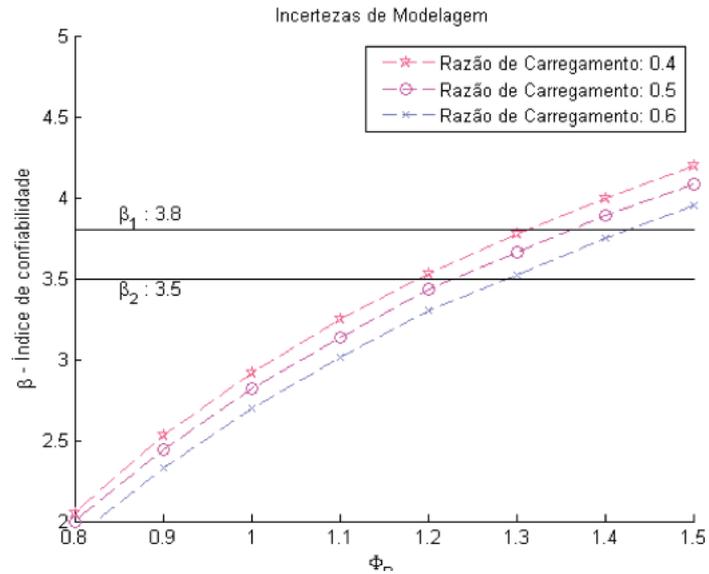
A Figura 4 ilustra o desenvolvimento da análise.



**Figura 4:**  
 Organograma da análise.  
 Fonte: Autor (2011)

#### 4 RESULTADOS OBTIDOS

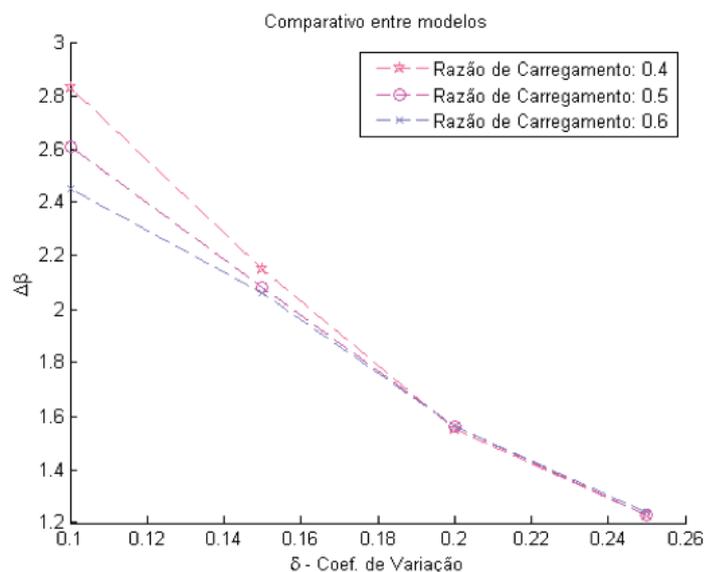
Os exemplos utilizados nesse trabalho têm como objetivo avaliar a influência das incertezas epistêmicas sobre a análise de confiabilidade de uma viga utilizada por Silva Filho (2007) solicitada à torção pura, executada em concreto armado e reforçada com CFC. A configuração de reforço foi a mesma utilizada pelo referido autor no seu trabalho de tese, reforçada com armadura transversal de CFC. Três razões de carga variável foram utilizadas e seus resultados comparados. A Figura 5 mostra como um acréscimo nos valores referentes à variável aleatória das incertezas de modelagens ou epistêmicas pode levar a valores bastante discrepantes no índice de confiabilidade do sistema. Um valor de coeficiente de variação de 0.15 (constante) foi adotado inicialmente. Apenas uma variação na média da variável aleatória relativa às epistêmicas foi executada. Para o caso da viga considerada, os valores superiores a 1.2 e inferiores a 1.4 foram os que apresentaram valores para os índices de confiabilidade dentro do nível de segurança recomendado pelo JCSS 2001. Coerentemente, à medida que o valor da carga variável aumenta o índice de confiabilidade do sistema diminui, pois uma maior variabilidade é associada ao problema.



**Figura 5:**  
Influência das incertezas de modelagem na confiabilidade do sistema.  
Fonte: Autor (2011)

Um processo bastante interessante seria a calibração dos valores dessa variável aleatória com valores obtidos em ensaios de laboratório de modo a permitir que os resultados realmente representem o comportamento estrutural da viga submetida ao reforço. Um cuidado muito especial deve ser tomado na consideração das médias das variáveis aleatórias relacionadas com os erros de modelagem uma vez que pequenas modificações podem ocasionar mudanças consideráveis de resultados inviabilizando análise.

Também um incremento no coeficiente de variação da variável aleatória de erro de modelagem foi executado. A Figura 6 mostra que a adoção de coeficientes de variação superiores a 0.20 nos erros de modelagem podem conduzir a uma convergência na diferença entre os valores mínimos e máximos para relações de cargas diferentes. Isso ocorre devido a uma maior dispersão dos resultados que são retratados a partir dos maiores valores de coeficientes de variação.



**Figura 6:**  
Influência do coeficiente de variação na confiabilidade do sistema.  
Fonte: Autor (2011)

Observa-se que os valores altos de coeficiente de variação conduziram a uma mesma taxa de variação independentemente do valor da razão de carga utilizada.

## 5 CONCLUSÕES

Em vista dos resultados obtidos na análise de confiabilidade da viga de concreto armado solicitada à torção pura e reforçada com compósito de fibras de carbono segundo a metodologia desenvolvida por SILVA FILHO (2007), conclui-se ser necessário à definição de um processo de calibração dos valores das variáveis aleatórias de erro de modelagem ou epistêmica baseado em ensaios que possibilite validar a análise de confiabilidade do modelo, considerando-se que a adoção indiscriminada dos valores de média e coeficientes de variação pode levar a uma análise de confiabilidade não realística com relação ao comportamento real dos modelos.

## 6 REFERÊNCIAS

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** *Projeto de Estrutura de Concreto – Procedimentos: NBR 6118.* Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

**HALDAR, A; MAHADEVAN, S.** *Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons. 2000.

\_\_\_\_\_. *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design.* John Wiley & Sons. 2000.

**HASOFER, A. M., AND LIND, N. C.,** *Exact and Invariant Second Moment Code Format,* Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 100, No EM1, pp 111-121, 1974.

**HART, G. C. UNCERTAINTY ANALYSIS, Loads, and Safety in Structural Engineering.** Prentice – Hall, New Jersey, 1982.

**JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY.** *JCSS: Probabilistic Model Code.*2001.

**LOPES, M. T. A.** *Análise de Confiabilidade de Estruturas Aplicada ao Projeto de Reforço à Força Cortante de Vigas em Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono.*Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2007.

**MELCHERS, R. E.** *Structural Reliability Analysis and Prediction*. New York, John Wiley & Sons. 2002.

**RACKWITZ, R., E FIESSLER, B.,** *Structural Reliability under Random Load Sequences, Computers and Structures*, vol. 9, No 5, pp 484-494, 1978.

**SILVA FILHO, J. J. H.** *Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2007.

# Dimensionamento e verificação da segurança via análise de confiabilidade de uma viga de concreto armado submetida ao esforço cortante

## **Nathaly Sarasty Narvaez**

Centro Universitário de Brasília UniCEUB, Departamento de Arquitetura e Urbanismo  
Brasília-DF, Brasil  
nathaly.narvaez@ceub.edu.br  
lattes: <http://lattes.cnpq.br/1472992513998298>

## **Marta de Souza Lima Velasco**

Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC-Rio, Departamento de Engenharia  
Civil  
Rio de Janeiro, Brasil  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7135506579021728>

## **João da Costa Pantoja**

Universidade de Brasília,  
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo  
Brasília-DF, Brasil  
Pesquisador do Grupo CONSTRUCT-LESE - Faculdade de Engenharia  
da Universidade do Porto  
joaocpantoja@gmail.com  
lattes: <http://lattes.cnpq.br/6879105340639188>

## **Luiz Eloy Vaz**

Universidade Federal Fluminense  
Rio de Janeiro-RJ, Brasil  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4321281058166070>

# Dimensionamento e verificação da segurança via análise de confiabilidade de uma viga de concreto armado submetida ao esforço cortante

Nathaly Sarasty Narvaez | Marta de Souza Lima Velasco |

João da Costa Pantoja | Luiz Eloy Vaz

## Resumo

Este trabalho avalia aspectos de segurança de uma seção de viga de concreto armado submetida ao esforço cortante sem e com reforço com compósitos de fibras de carbono. O reforço é necessário porque se considera que houve uma mudança na utilização da edificação de residência para escritório.

Inicialmente, um dimensionamento semi-probabilístico da seção da estrutura original sem reforço é feito com base na norma NBR 6118-2003. Em seguida, a segurança relativa aos modos de falha é avaliada com base no cálculo do índice de confiabilidade  $\beta$ . As funções de falha adotadas são relacionadas às expressões de E.L.U. da NBR 6118-2003, nomeadamente, à expressão do cálculo da armadura de estribo e à resistência da biela de compressão, assim como ao sistema formado pelas duas funções considerado como sistema em série. As análises mostram que uma redução da armadura de estribo é possível sem comprometer a segurança da seção. É feito então um dimensionamento da armadura de estribo da seção baseado em confiabilidade. Posteriormente, devido ao acréscimo dos carregamentos provocados pela nova utilização da edificação já construída que impossibilita modificações nas dimensões da seção da seção e da armadura, um reforço com fibra de carbono CFC é dimensionado para a seção com base nas expressões apresentadas em Chen & Teng (2003). Na seqüência, uma nova avaliação dos índices de confiabilidade  $\beta$  associados às novas funções de falha da seção da viga reforçada é feita. As análises de confiabilidade comprovam mais uma vez que uma redução da armadura de reforço CFC é possível sem comprometer a segurança da seção. Finalmente um dimensionamento baseado em confiabilidade do reforço da seção com fibra de carbono CFC é

apresentado. Na análise de confiabilidade é utilizado o método de simulação de Monte Carlo e somente quando esse método falha é usado o Método FORM. Quase todas as propriedades estatísticas das variáveis aleatórias usadas nas análises de confiabilidade são as definidas pelo JCSS, apenas aquelas relativas à resistência e ao módulo de elasticidade da fibra de carbono são obtidas de ensaios realizados no LEM-DEC da PUC- Rio. O trabalho mostra a viabilidade de projetos baseados em confiabilidade de vigas de concreto armado sem e com reforço.

### **Palavras-chave**

Confiabilidade, Otimização topológica, Modelo de bielas e tirantes, Estruturas de concreto.

# **Structural design and safety verification via reliability analysis of a reinforced concrete beam subjected to shear stress**

## **Abstract**

*This paper evaluates the safety aspects of a reinforced concrete beam section submitted to shear stress without and with strengthening with carbon fiber composites. Initially, a semi-probabilistic design of the original structure without reinforcement is done based on the NBR 6118-2003 standard. Then, the relative safety to failure modes is evaluated based on the calculation of the reliability index  $\beta$ . The adopted failure functions are related to the E.L.U. expressions of NBR 6118-2003, namely, the expression for calculating the stirrup reinforcement and the compression strut resistance, as well as the system formed by the two functions considered as a series system. The analyses show that a reduction of the stirrup reinforcement is possible without compromising the safety of the section. A design of the stirrup reinforcement of the section based on reliability is then performed. Posteriorly, due to the increase in loads provoked by the new use of the already built building that makes modifications in the dimensions of the section and the reinforcement impossible, a reinforcement with CFC carbon fiber is dimensioned for the section based on the expressions presented in Chen & Teng (2003). In the sequence, a new evaluation of the reliability indexes  $\beta$  associated with the new failure functions of the strengthened beam section is performed. The reliability analyses prove once again that a reduction of the CFC reinforcement is possible without compromising the safety of the section. Finally, a reliability-based design of the section reinforcement with CFC carbon fibre is presented. In the reliability analysis, the Monte Carlo simulation method is used, and only when this method fails, the FORM method is used. Almost all the statistical properties of random variables used in the reliability analyses are those defined by JCSS. Only those related to strength and modulus of elasticity of carbon fiber are obtained*

*from tests performed at LEM-DEC of PUC- Rio. The work shows the feasibility of reliability-based design of reinforced concrete beams without and with strengthening.*

**Keywords**

*Reliability, Topology optimization, Strut-and-Tie model, Concrete structures.*

## 1 INTRODUÇÃO

O dimensionamento de estruturas de concreto armado é feito no Brasil segundo a norma NBR6118-2003. A norma brasileira, como a maioria das normas do mundo, segue a metodologia de projeto semi-probabilístico. Nesse método, as expressões de estados limites são escritas com as variáveis aleatórias representadas por valores chamados de valores cálculo ou de projeto que são valores com baixa probabilidade de ocorrência no sentido de diminuir a probabilidade de falha associada ao estado limite. Todavia, esse método não permite a quantificação dessa probabilidade de falha e, portanto, não é uma medida de segurança uniforme, ou seja, ele pode conduzir a um dimensionamento contra a segurança ou anti-econômico no sentido de levar a um projeto com probabilidade de falha, respectivamente, acima ou abaixo da probabilidade de falha aceitável. A análise de confiabilidade de estruturas é uma técnica que possibilita o cálculo da probabilidade de falha associada a um estado limite e também um dimensionamento para uma probabilidade de falha alvo, entre outras vantagens.

Neste trabalho uma seção de uma viga de um pavimento de uma residência fictícia é inicialmente dimensionada ao esforço cortante pelo método semi-probabilístico segundo a norma brasileira. Em seguida, a probabilidade de falha dessa seção é calculada via análise de confiabilidade. Por fim, a armadura de estribo da seção é dimensionada de modo que a maior probabilidade de falha entre as diversas probabilidades de falha da seção associadas às diversas funções de falha adotadas seja igual a uma probabilidade de falha alvo recomendada pelo JCSS (*Joint Committee for Structural Safety*), ou seja, é feito um dimensionamento da seção baseado em confiabilidade.

Numa segunda etapa, é feita a hipótese de que a residência foi transformada em escritório e as cargas são modificadas. Uma verificação da segurança da seção pré-existente mostra a necessidade de reforço da estrutura com fibra de carbono CFC. A seção então é reforçada com base na metodologia proposta no artigo de Chen & Teng e, em seguida, uma análise de confiabilidade da seção da viga reforçada é executada. Finalmente, como a probabilidade de falha calculada é diferente da probabilidade de falha alvo, um dimensionamento da fibra de carbono baseado em confiabilidade é realizado com metodologia similar ao feito para a viga sem reforço.

As variáveis aleatórias consideradas nas análises de confiabilidade são a resistência do concreto, do aço e da fibra e a carga permanente e a acidental. As propriedades estatísticas das cargas são definidas conforme as recomendações do JCSS assim como as resistências do concreto e do aço. As propriedades estatísticas da resistência da fibra de carbono foram obtidas com

base na amostra obtida de ensaios realizados no Laboratório de Estruturas e Materiais do Departamento de Engenharia Civil (LEM-DEC) da PUC-Rio. A escolha da função de probabilidade mais apropriada para representar a amostra foi feita com base em técnicas de aderência usando os métodos de Chi-quadrado e Kolmogorov-Smirnov. As funções testadas foram a função de distribuição normal, a lognormal e a Weibul.

O método de análise empregado de confiabilidade foi o Monte Carlo e em alguns casos (para valores elevados de  $\beta$ ) o método FORM.

Um programa em matlab foi desenvolvido para realizar todas as tarefas descritas. Tais programas tornam viável o uso dessas técnicas no dia a dia do projeto de estruturas.

## **2 EXPRESSÕES DE DIMENSIONAMENTO DE UMA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA AO ESFORÇO CORTANTE**

### **2.1. Expressões da NBR 6118-2003 pelo Modelo I para viga sem reforço**

A NBR 6118 baseada no modelo de treliça apresenta as seguintes prescrições para dimensionamento de força cortante para Estado Limite Ultimo. No modelo I as bielas de compressão têm inclinação  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da viga. No cálculo, os estribos podem ser inclinados de um ângulo  $\alpha$  situado entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ .

As seguintes variáveis são definidas:

$V_{Sd}$  = força cortante solicitante de cálculo, na seção;  
 $V_{Rd2}$  = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto  
 $V_{Rd3} = V_c + V_{sw}$ , sendo  $V_c$  a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça e  $V_{sw}$  a parcela absorvida pela armadura transversal.

No modelo de cálculo I, a resistência da peça é assegurada pela verificação da compressão diagonal no concreto, com a expressão:

$$(1) \quad V_{Rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd} b_w, \quad \alpha = 1 - \frac{f_{ck}}{250}$$

E pelo calculo da armadura transversal, dado por:

$$(2) \quad V_{sw} = \frac{A_{sw}}{s} 0,9df_{ywd} (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

$V_c = V_{co}$  na flexão simples.

$$(3) \quad V_{co} = 0,6 f_{ctd} b_w d$$

A armadura a cisalhamento por metro é calculada assim:

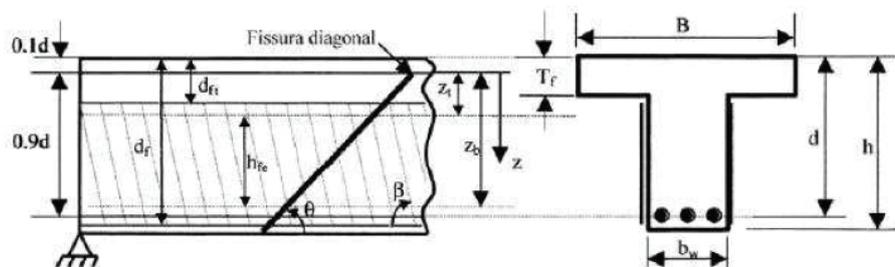
$$(4) \quad A_{sw} = \frac{V_{sw}}{0,9 d f_{yd}}$$

## 2.2. Expressões da NBR 6118-2003 pelo Modelo I para viga sem reforço

Para um esquema geral de reforço, sendo  $\theta$  o ângulo de inclinação da fissura diagonal em relação ao eixo longitudinal da viga, considerando que as faixas de CFC têm a mesma largura e estão coladas nos dois lados da viga, a contribuição do reforço de CFC à resistência ao cortante da viga é dada por:

$$V_f = 2 f_{fe} t_f w_f \frac{h_{fe} (\cot \theta + \cot \beta) \text{sen} \beta}{s_f}$$

(5) Onde  $f_{fe}$  é a tensão média no CFC que costura a fissura diagonal no estado limite último.



**Figura 1:**  
Esquema de reforço à força cortante.  
Fonte: TENG *et al*, (2002).

É assumido que a ponta da fissura está a distância de  $0,1d$  abaixo da face comprimida da viga. Adotando-se um sistema de coordenadas orientado para baixo e com origem na ponta da fissura (Figura 1), a altura efetiva do CFC,  $h_{fe}$ , é expressa como:

$$h_{fe} = Z_b - Z_t$$

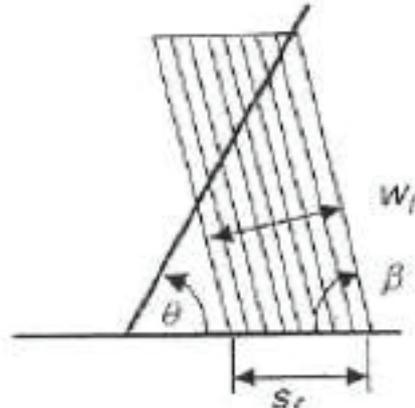
(6) Onde  $z_b$  e  $z_t$  são as coordenadas da base e do topo do CFC respectivamente.

$$Z_b = [d - (h - d_f)] - 0,1d$$

(7) Onde  $d_{ft}$  é a distância da face comprimida à borda superior do

$$(8) \quad Z_t = [0,1d + d_{ft}] - 0,1d = d_{ft}$$

CFC (logo,  $d_{ft} = 0$  para reforço com envolvimento completo da seção) e  $d_f$  é a distância da face comprimida à borda inferior do reforço.



**Figura 2:**  
Detalhe do reforço contínuo  
Fonte: Adaptada de Chen e Teng, 2003a

Deve-se ressaltar que no reforço contínuo, para considerar a direção principal das fibras (Figura 2), a relação entre  $s_f$  e  $w_f$  é:

$$(9) \quad s_f = \frac{w_f}{\text{sen}\beta}$$

A distribuição de tensão no CFC ao longo da fissura não é uniforme no estado limite último, tanto para a falha por ruptura do compósito quanto para a falha por descolamento do CFC. A tensão média no CFC é dada por:

$$(10) \quad f_{fe} = D_f \sigma_{f \max}$$

Onde  $\sigma_{f \max}$  é a tensão máxima alcançada pelo reforço de CFC atravessado pela fissura e  $D_f$  é o fator de distribuição de tensão definido por:

$$(11) \quad D_f = \frac{f_{fe}}{\sigma_{f \max}}$$

### 2.3 Modelo de Cálculo Considerando Falha por Ruptura do Compósito

Este modelo é aplicado a todas as vigas com seção completamente envolvida pelo reforço, e também em vigas com reforço em "U" ou colado apenas nas laterais que possuem um esquema de ancoragem especial. As vigas com reforço em "U" podem falhar tanto por ruptura quanto por descolamento do compósito, portanto deve-se considerar este modelo e o modelo considerando a falha por descolamento do compósito.

Nas vigas reforçadas que têm a resistência ao cortante controlada pela ruptura do compósito, o processo de ruptura se inicia quando o ponto mais tracionado do CFC atravessado pela fissura alcança a sua resistência última de tração. Uma vez

iniciada, a ruptura do CFC irá se propagar rapidamente ao longo da fissura, levando a viga a uma falha catastrófica.

Para desenvolver um modelo cuidadoso para o cálculo da resistência à força cortante de uma viga reforçada, uma distribuição racional de tensão no CFC deve ser assumida e considerada em conjunto com a fragilidade do compósito.

Os autores propuseram uma distribuição geral de tensões parabólica ao longo da fissura, com uma distribuição linear como caso simplificado. Para a distribuição de tensões linear no CFC ao longo da fissura, a tração no CFC aumenta desde zero na ponta da fissura até a resistência última de tração no fim da fissura. A distribuição linear de tensões é recomendada, pelos autores, para um modelo simples e conservativo de uso prático.

Para um esquema geral de reforço mostrado na Figura 1 o fator de distribuição de tensões é expresso por:

$$(12) \quad D_f = \frac{1+\xi}{2}$$

$$(13) \quad \xi = \frac{z_t}{z_b}$$

Para reforço colado em toda a lateral da viga,  $\xi = 0$  logo  $D_f = 0.5$ . A tensão máxima no CFC é:

$$(14) \quad \sigma_{f_{\max}} = f_f$$

Onde  $f_f$  é a tensão é a resistência última à tração do compósito.

Para efeito de dimensionamento a tensão máxima no CFC deve ser obtida por:

$$(15) \quad \sigma_{f_{\max}} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{0,8f_f}{y_f}; \text{ se } \frac{f_f}{E_f} \leq \epsilon_{\max} \\ \frac{0,8f_{\epsilon_{\max}}}{y_f}; \text{ se } \frac{f_f}{E_f} > \epsilon_{\max} \end{array} \right.$$

Onde  $\gamma_f$  é o coeficiente de segurança adotado por Chen e Teng para a resistência à tração no compósito,  $\gamma_f = 1,25$ . O fator de 0,8, introduzido na eq. (15) leva em conta efeitos não considerados neste modelo, como efeito da aresta da viga na resistência à tração do CFC, se estas não forem devidamente suavizadas.

A eq. (15) também inclui um limite para a deformação máxima no CFC ( $\epsilon_{\max}$ ) para controlar a abertura da fissura. O limite

sugerido pelos autores é de 1,5%.

Deve-se ressaltar que as equações (11) e (12) não podem ser usadas nos casos em que a resistência última da viga é alcançada antes da ruptura do compósito.

## 2.4 Modelo de Cálculo Considerando Falha por Descolamento do Compósito

O descolamento do CFC da superfície de concreto é o modo de ruptura predominante de vigas reforçadas com compósito colado apenas nas laterais.

Este modo também controla a resistência da maioria das vigas com reforço em “U”.

Na falha por descolamento do CFC que costura uma fissura, a tensão máxima no compósito ocorre onde o f tem o maior comprimento de ancoragem. A tensão máxima no CFC,  $\sigma_{f\max}$ , é limitada tanto pela resistência última de ancoragem quanto pela resistência à tração do CFC:

$$(16) \quad \sigma_{f\max} = \min \left\{ \begin{array}{l} f_f \\ 0,0427 \beta_w \beta_L \sqrt{\frac{E_f \sqrt{f_c}}{t_f}} \end{array} \right.$$

Onde  $\beta_L$  é o coeficiente que leva em conta o efeito do comprimento de ancoragem e o coeficiente  $\beta_w$  reflete o efeito da razão entre a largura do CFC e do concreto.

$$(17) \quad \beta_L = \begin{cases} 1 & se \lambda \geq 1 \\ \text{sen} \left( \frac{\pi \lambda}{2} \right) & se \lambda < 1 \end{cases}$$

$$(18) \quad \beta_w = \sqrt{\frac{2 - \frac{w_f}{s_f \text{sen} \beta}}{1 - \frac{w_f}{s_f \text{sen} \beta}}}$$

O comprimento máximo de ancoragem normalizado  $\lambda$  é dado por:

$$(19) \quad \lambda = \sqrt{\frac{l_{\max}}{L_e}}$$

O comprimento máximo de ancoragem  $L_{\max}$  depende do tipo de ancoragem do reforço:

Para envolvimento em “U”, o máximo comprimento de ancoragem ocorre na extremidade inferior da fissura (Figura 3-b):

$$(20) \quad L_{\max} = \frac{h_{fe}}{L_e}$$

Para reforço colado apenas nas laterais, o comprimento máximo de ancoragem está localizado no meio da altura (Figura 3-a):

$$(21) \quad L_{\max} = \frac{h_{fe}}{2\text{sen}\beta}$$

O comprimento de ancoragem efetivo  $L_e$  é calculado por:

$$(22) \quad L_e = \sqrt{\frac{E_f t_f}{\sqrt{f_c}}}$$

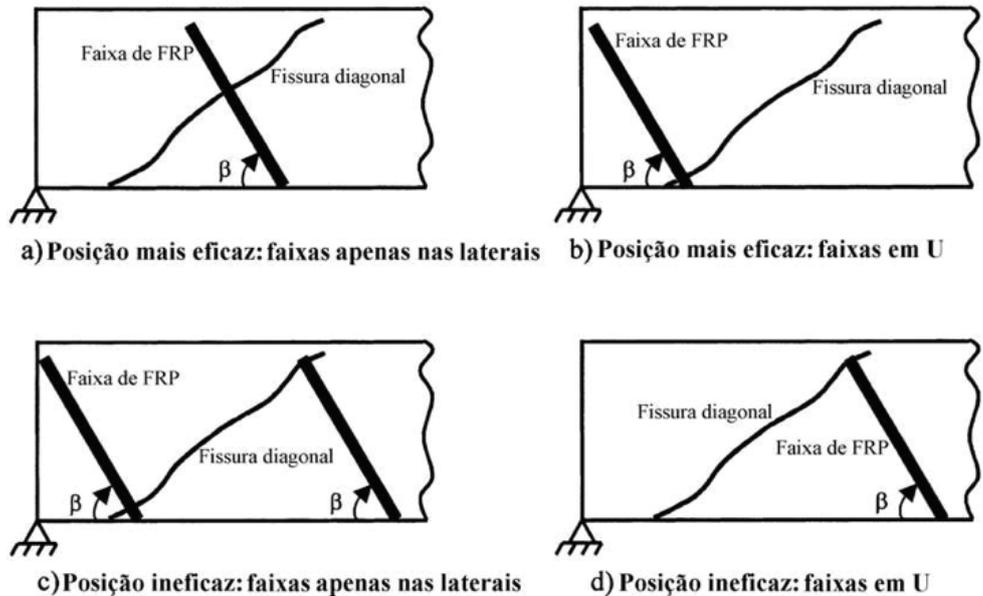
A resistência de ancoragem em um ponto da faixa do reforço depende de onde a fissura se encontra em relação à extremidade do CFC, assim, o fator de distribuição de tensões,  $D_f$ , é dado por:

$$(23) \quad D_f = \begin{cases} \frac{2}{\pi\lambda} - \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)} & \text{se } \lambda \leq 1 \\ \frac{\pi - 2}{\pi\lambda} & \text{se } \lambda > 1 \end{cases}$$

Para uma mesma geometria, o valor de  $D_f$  é maior para reforço colado em “U” do que para o colado apenas nas laterais, por causa da diferença no valor de  $\lambda$ . Esta diferença no valor de  $D_f$  reflete a maior eficiência do reforço em “U” em comparação ao reforço colado apenas nas laterais. Deve-se tomar um cuidado especial no cálculo da resistência de vigas nas regiões de momento negativo, onde a face superior está tracionada e a inferior comprimida. Como nestas regiões a fissura se inicia no topo da viga, as grandezas indicadas na Figura 2.54 devem ser medidas a partir da face inferior da viga.

## 2.5 Espaçamento das faixas

O modelo apresentado leva em conta que o número de faixas que interceptam uma fissura é suficiente (duas ou mais). Entretanto, este tratamento pode levar a resultados conservativos ou não, dependendo da localização das faixas. Alguns casos extremos são mostrados na Figura 3.



**Figura 3:**  
Posições eficazes ou ineficazes das faixas de CFC.  
Fonte: adaptada de Chen e Teng, (2003a)

Para que um esquema de reforço à força cortante seja eficiente, o espaçamento entre as faixas não deve exceder metade do comprimento horizontal da fissura, assim, ao menos duas faixas interceptarão a fissura, e, pelo menos uma de forma eficiente.

$$s_f \leq s_{f \max} = \frac{h_{fe} (\operatorname{sen} \beta + \operatorname{cos} \beta)}{2}$$

## 3 ANÁLISE DA CONFIABILIDADE (VASCONCELLOS, 2000)

As expressões de E.L.U. da norma brasileira são escritas com base no método semi-probabilístico com as variáveis aleatórias representadas por valores determinísticos ditos de cálculo. As funções de falha associadas a expressões de E.L.U. da norma são obtidas substituindo-se os valores de cálculo por variáveis aleatórias e colocando as expressões na forma:

$$g(x, d) \leq 0$$

Onde  $x$  é o vetor das variáveis aleatórias (em geral resistências dos materiais e cargas) e  $d$  o vetor das variáveis determinísticas (em geral dimensões). A probabilidade de falha  $P_f$  associada

à função de falha dada em (5) pode ser obtida integrando-se a função de densidade de probabilidade multi-variável  $f(x)$  no domínio de falha.

**(26)**

$$p_f = \int_{g(x,d) \leq 0} f(x) dx$$

O método de simulação de Monte Carlo pode ser visto como um método numérico de integração que permite o cálculo da probabilidade de falha  $P_f$  dada em (6). Uma vez calculada a probabilidade de falha, pode-se obter o índice de confiabilidade  $\beta$ , muito usado como medida de confiabilidade:

**(27)**

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f)$$

Onde  $\Phi^{-1}(x)$  é a função inversa da função cumulativa de probabilidade da distribuição normal padrão  $\Phi(x)$ .

O método FORM (First Order Reliability Method) é um método eficiente para o cálculo direto do índice de confiabilidade  $\beta$ . Se a função de falha  $g(x,d)$  for uma função linear, a probabilidade de falha associada ao índice de confiabilidade  $\beta$  calculado pelo FORM pode ser obtida de forma exata como:

**(28)**

$$p_f = \Phi(-\beta)$$

Caso a função não seja linear, a probabilidade de falha calculada pela expressão (28) ainda é considerada uma boa aproximação do valor exato de  $P_f$ .

Nesse trabalho a probabilidade de falha é calculada pelo Método de Monte Carlo e o índice de confiabilidade  $\beta$  pela expressão (27). Para se obter uma boa estimativa da probabilidade de falha o tamanho da amostra  $n$  deve satisfazer (André Beck, 2008).

**(29)**

$$n \geq \frac{3}{p_f}$$

Para uma probabilidade de falha alvo  $P_f \approx 10^{-5}$ ,  $n \approx 300000$ . Nesse trabalho adotou-se  $n = 106$ .

O JCSS (Joint Committee for Structural Safety) propõe os valores de índice de confiabilidade alvo  $\beta_t$  indicados na Tabela 1 para um período de referência de um ano, sendo necessário fazer o cálculo para a vida útil da estrutura.

**Tabela 1.** Índices de confiabilidade  $\beta$  alvos relativos a um ano de período de referência

<b>Custo relativo da medida de segurança</b>	<b>Conseqüências menores de falha</b>	<b>Conseqüências moderadas de falha</b>	<b>Grandes conseqüências de falha</b>
Grande (A)	$\beta = 3,1$	$\beta = 3,3$	$\beta = 3,7$
Normal (B)	$\beta = 3,7$	$\beta = 4,2$	$\beta = 4,4$
Pequeno (C)	$\beta = 4,2$	$\beta = 4,4$	$\beta = 4,7$

Nesse trabalho trata-se de um prédio com custo relativo da medida de segurança normal e conseqüências de falha moderadas, sendo o índice de confiabilidade para um ano  $\beta_t = 4.2$ . Calcula-se então o valor  $\beta_t$  para uma vida útil da estrutura de 50 anos a partir da probabilidade de falha obtida da Tabela 1 por:

$$(30) \quad p_f = 1 - (1 - p_f)^n$$

Resultando neste estudo um valor alvo de  $\beta_t = 3,2$ .

#### **4 FUNÇÕES DE FALHA ASSOCIADAS ÀS EXPRESSÕES DE DIMENSIONAMENTO DE UMA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDA AO ESFORÇO CORTANTE**

##### **4.1 Funções de falha para análise de confiabilidade da viga sem reforço**

$$(31) \quad g_1 = 0,27 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_c b_w d - V_s$$

Função de falha relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto  
Função de falha relativa à ruína por tração diagonal

$$(32) \quad g_2 = 0,18 f_c^{2/3} y_2 b_w d + A_{sw} 0,9 d f_{yw} (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) - V_s$$

##### **4.2 Funções de falha para análise de confiabilidade da viga com reforço**

Supondo que o prédio esteja em uso um reforço com fibra de carbono é calculado e a confiabilidade das novas funções de falha é avaliada.

### 4.3 Função de falha relativa à ruína por tração diagonal, devido à ruptura do reforço.

$$(33) \quad g_3 = V_c + V_{sw} + V_{fR} - V_s$$

Onde:

$$(34) \quad V_{fR} = 0,5 + 0,5\xi\rho_f b_w h_{fe} (1 + \cot \beta) \text{sen} \beta f_f$$

Função de falha relativa à ruína por tração diagonal, devido ao descolamento do reforço.

$$(35) \quad g_4 = V_c + V_{sw} + V_{f-D} - V_s$$

Para  $\lambda > 1$

$$(36) \quad V_{f-D} = 0,427 \left( 1 - \frac{\pi - 2}{\pi L_{\max}} \sqrt{\frac{E_f t_f}{f_c}} \right) b_w \sqrt{\frac{E_f \sqrt{f_c}}{t_f}} \rho_f b_w h_{fe} (1 + \cot \beta) \text{sen} \beta$$

Para  $\lambda < 1$

$$(37) \quad V_{f-D} = \frac{0,854}{\pi L_{\max}} E_f \frac{t_f}{\sqrt{f_c}} b_w \text{sen} \left( \frac{1}{2} \pi \frac{L_{\max}}{\sqrt{\frac{E_f t_f}{f_c}}} \right) \sqrt{\frac{E_f \sqrt{f_c}}{t_f}} \rho_f h_{fe} (1 + \cot \beta) \text{sen} \beta$$

$$\lambda = \frac{2N t_f w_f}{b_w s_f}$$

Para  $\lambda = 1$

$$(38) \quad V_{f-D} = \frac{0,854}{\pi L_{\max}^2} E_f \frac{t_f}{\sqrt{f_c}} b_w \sqrt{\frac{E_f \sqrt{f_c}}{t_f}} \rho_f b_w h_{fe} (1 + \cot \beta) \text{sen} \beta$$

Onde:

$$(39) \quad \lambda = \frac{L_{\max}}{\sqrt{\frac{E_f t_f}{f_c}}}$$

O valor da taxa de fibra usada no cálculo de reforço com fibra de carbono é obtida a partir de:

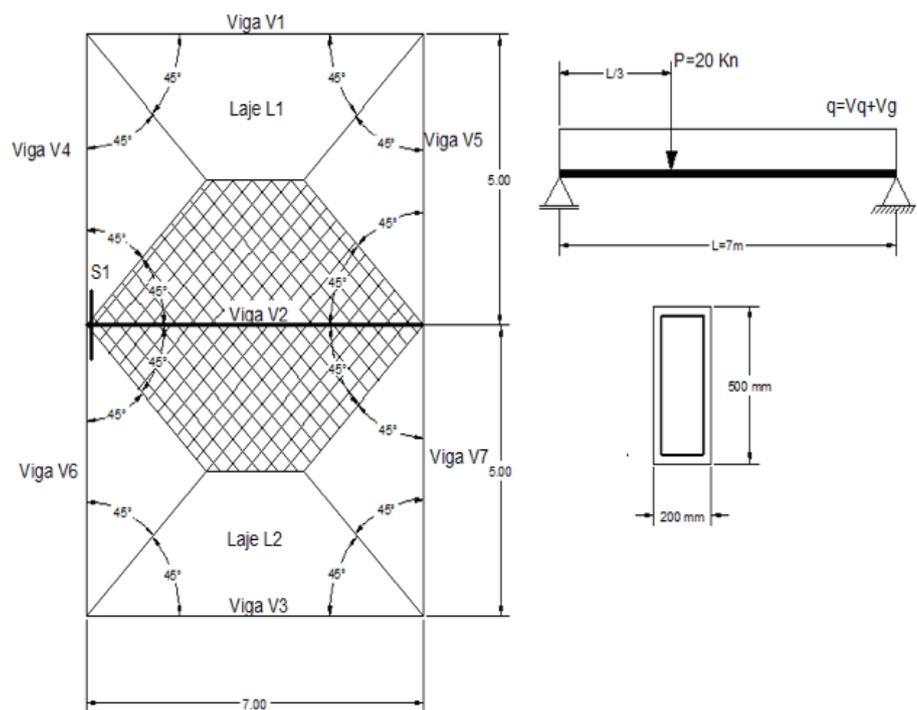
$$(40) \quad \lambda = \frac{2Nt_f w_f}{b_w s_f}$$

Sendo N o número de camadas,  $t_f$  a espessura da fibra,  $w_f$  a largura da fibra,  $b_w$  a largura da viga e  $s_f$  a separação entre as fibras.

## 5 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

### Descrição do pavimento:

O pavimento da edificação estudada é composto de 2 lajes de 10 cm de espessura e 7 vigas. Considera-se que um pilar desce do pavimento superior e morre sobre a viga V2 na posição indicada na figura 4. A seção transversal estudada é a seção S1 da viga V2 assinalada na figura 4. As dimensões da seção transversal S1 da viga V2 são: largura  $b = 200$  mm e altura  $h = 500$  mm.



**Figura 4:**  
Descrição do exemplo proposto.  
Fonte: autor (2011)

### 5.1. Dimensionamento da armadura de estribo da seção S1 da viga V2 pela NBR 6118 – 2003

Considera-se nesta etapa que o uso da edificação é de residência, por tanto é adotada a carga acidental dada na NBR 6120 para lajes de edifícios residências igual a 2 kN/m<sup>2</sup>. Os dados da geometria e dos valores característicos das variáveis aleatórias do problema (resistências e cargas) são apresentados na tabela 3. Os pesos específicos dos materiais foram obtidos da NBR 6120.

**Tabela 3:** Variáveis do exemplo. Fonte: autor (2011)

Variável determinística	Descrição	Valor	Und.
$b_w$	Largura da viga	200	mm
$h$	Altura da viga	500	mm
$d$	Altura útil da viga	470	mm
$L$	Comprimento da viga	5	mm
$A_i$	Área de influência	22,5	m <sup>2</sup>
$\alpha$	Ângulo de inclinação dos estribos	90	rad
$\theta$	Inclinação das bielas de compressão	45	rad
$\beta$	Ângulo de inclinação entre a fibra de carbono e o eixo longitudinal da viga	90	rad
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto a compressão	20	MPa
$f_{yk}$	Resistência característica do aço a tração	500	MPa
$p_{plk}$	Peso proprio laje	2,5	kN/m <sup>2</sup>
$r_{vlk}$	Revestimento laje	1	kN/m <sup>2</sup>
$p_{pvk}$	Peso proprio viga	1,2	kN/m
$q_{Lk}$	Carga acidental sobre a laje sobre viga	2,0	kN/m
$q_{Vk}$	Carga alvenaria sobre viga	0,50 7	kN/m
$V_{gk}$	Carga distribuída permanente	14,2 57	kN/m
$P_{qk}$	Carga acidental em residência	2	kN/m <sup>2</sup>
$V_{qk}$	Carga distribuída acidental	6,42 9	kN/m
$P_{gk}$	Carga pontual permanente	12	kN
$P_{qk}$	Carga pontual acidental	8	kN

Os valores de cálculo das resistências são obtidos afetando os valores característicos com os coeficientes para condições normais da Norma NBR 6118, sendo  $\gamma_c = 1,4$  para a resistência do concreto e  $\gamma_s = 1,15$  para a resistência do aço.

Os valores de cálculo das cargas da viga V2 obtidas com o uso da área hachurada de influência indicada na figura 4 são afetados pelo coeficiente  $\gamma_m = 1.4m$ .

Para o exemplo apresentado e usando as expressões da NBR-6118 a armadura obtida é 314,784 mm<sup>2</sup>/m.

## 5.2 Análise de confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item

As variáveis usadas na análise de confiabilidade são mostradas na tabela 4.

**Tabela 4.** Variáveis aleatórias do exemplo com os parâmetros estatísticos. Fonte: autor (2011)

Variável aleatória	Descrição	Und	Valor médio	Coef. variação	Tipo de distribuição
$f_c$	resistência do concreto a compressão	MPa	26,6	0,17	lognormal
$Y_2$	parâmetro de resistência a tração do concreto	-	1	0,3	lognormal
$f_{yw}$	resistência do aço a tração	MPa	560	30	lognormal
$V_g$	carga distribuída permanente	kN/m	14,257	0,03	normal
$q_L$	carga acidental sobre a laje para residência	kN/m <sup>2</sup>	2,562	0,869	Gumbel
$g_v$	carga permanente sobre a viga para residência	kN/m <sup>2</sup>	2,0	0,03	normal
$V_q$	carga distribuída acidental na viga	kN/m	8,235	0,339	Gumbel
$P_g$	carga pontual permanente	kN	12	0,03	normal
$P_q$	carga pontual acidental	kN	8	0,339	Gumbel
$f_{fu}$	resistência à tração da fibra de carbono	MPa	3214,9 56	253,75 1	Weibul
$E_f$	módulo de elasticidade	GPa	238,01 7	28,332	Weibul

O índice  $Y_2$  da tabela 4 é o parâmetro dado pelo JCSS que permite obter a média da resistência à tração do concreto a partir da sua resistência à compressão usando a equação 41. As propriedades estatísticas da carga permanente de alvenaria  $q_a$  sobre a viga foi calculada com base na NBR 6120. As propriedades estatísticas das cargas acidentais sobre a laje  $q_L$  são obtidas seguindo as recomendações do JCSS superpondo adequadamente as contribuições das cargas de curta e longa duração para uma vida útil da estrutura de 50 anos.

(41)

$$f_{ct} = 0,3 f_c^{2/3} Y^2$$

Os coeficientes de variação das variáveis aleatórias são tomados dos exemplos de aplicação da JCSS. Para a carga distribuída permanente o valor médio é o valor característico do dimensionamento. A carga distribuída acidental sobre a laje é calculada de forma análoga à obtida no item anterior

A análise de confiabilidade é feita por FORM no programa FERUM do programa Matlab para a função de falha  $g_1$  e por Método de Monte Carlo para  $g_2$ , obtendo com os respectivos índices de confiabilidade  $\beta_t = 8,075$  e  $\beta_t = 3,92$ . Sendo esses valores muito altos em relação ao índice de confiabilidade alvo  $\beta_t = 3,2$  a armadura de estribo da seção pode ser reduzida sem comprometer a segurança da seção.

### 5.3 Dimensionamento baseado em confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.1.

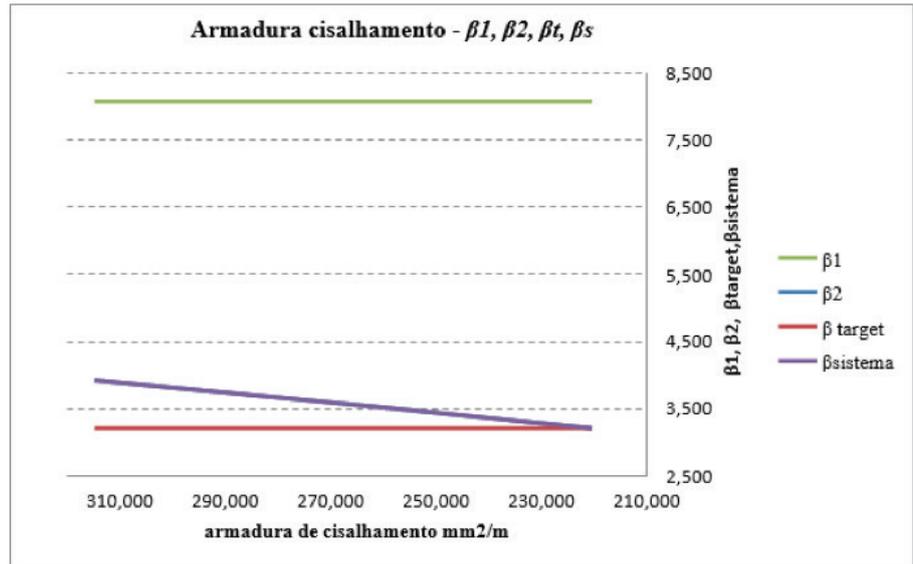
A análise de confiabilidade feita no item anterior mostra que é possível reduzir a armadura de estribo da seção sem comprometer a segurança da mesma. É feito então um dimensionamento da seção baseado em confiabilidade. De modo que o índice de confiabilidade mais desfavorável associado à seção se iguale ao índice de confiabilidade alvo  $\beta_t$ . Os resultados do processo iterativo são mostrados na Tabela 5 e Fig. 5.

**Tabela 5:** Iteração de cálculo da armadura a cisalhamento  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Fonte: autor (2011)

Método de análise	FERUM/ FORM	Monte Carlo	Monte Carlo
Armadura (mm <sup>2</sup> /m)	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_s$
314,784	8,075	3,922	3,922
283,305	8,075	3,692	3,692
254,975	8,075	3,479	3,479
229,477	8,075	3,279	3,279
220,298	8,075	3,209	3,209

Os valores do índice de confiabilidade  $\beta_1$  da função de falha  $g_1$  associada ao comportamento da biela comprimida são muito altos em relação aos valores de  $\beta_2$ , sendo, portanto, descartados no análise do  $\beta_s$ .

**Figura 5:**  
Gráfica do processo iterativo do cálculo da armadura de cisalhamento e valores de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_t$ ,  $\beta_{\text{sistema}}$ .



Segundo o anterior o valor da armadura necessária a partir do análise de confiabilidade seria de 220,298 mm<sup>2</sup> / m

#### 5.4 Mudança na solicitação. Análise de confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.3.

No exemplo estudado considera-se que, após a construção, há uma mudança no uso da edificação de tipo residencial para escritório. Esta hipótese implica uma carga acidental maior representada pela carga distribuída sobre a laje  $q_L$  e carga pontual  $P_q$  como se indica na tabela 6. As propriedades estatísticas da carga  $q_L$  e de  $P_q$  para escritório são obtidas do JCSS de modo análogo ao que é feito para a carga de residência. As cargas permanentes são mantidas.

**Tabela 6:** Cargas acidentais após a mudança de ocupação.  
Fonte: autor (2011)

Variável aleatória	Descrição	Und	Valor médio	Coef. variação	Tipo de distribuição
$V_g$	Carga distribuída permanente	kN/m	14,57	0,03	normal
$q_L$	Carga acidental para escritório	kN/m <sup>2</sup>	3,071	0,388	Gumbel
$g_v$	Carga permanente sobre a viga	kN/m	2	0,03	normal
$V_q$	Carga distribuída acidental na viga	kN/m	9,871	0,388	Gumbel
$P_g$	Carga pontual permanente	kN	12	0,03	normal
$P_q$	Carga pontual acidental	kN	8	0,388	Gumbel

Mantendo-se o valor da armadura de cisalhamento calculada por análise confiabilidade, ou seja,  $A_{s_{ws}} = 220,298 \text{ mm}^2/\text{m}$ , uma análise de confiabilidade para avaliar as funções de falha  $g_1$  e  $g_2$  é feita para esta nova configuração obtendo como resultado um valor de  $\beta_1 = 2,7501$  que é menor que o  $\beta$ .

### 5.5 Dimensionamento da área da seção de fibra de carbono CFC da seção S1 da viga V2 submetida às novas cargas acidentais conforme a metodologia de Chen e Teng (2003 a, b)

Dado que o valor do  $\beta_1$  é menor do que o  $\beta$  e que a estrutura já está construída não permitindo a modificação das armaduras, um reforço da estrutura é necessário. A opção recai sobre o uso de fibras de carbono CFC. Um dimensionamento baseado da área da seção transversal da fibra baseado nas teorias de Chen e Teng é realizado. As fibras são colocadas somente na direção transversal ao eixo da viga.

O valor da força cortante absorvida pela fibra de carbono é obtido a partir da equação 41.

$$(42) \quad A_{fpm} = \frac{v_f}{\cot \theta \cot \beta \sin \beta h_f \sigma_{fvd}}$$

$$(43) \quad \rho_f = \frac{A_{fpm}}{b_w s_f}$$

O valor da taxa de fibra usada no cálculo de reforço com fibra de carbono é obtida a partir de

Sendo  $A_{fpm}$  a área de reforço de fibra de carbono por metro. Para o caso estudado a taxa de fibra com o reforço aplicado em forma de U é  $\rho_f = 7.637 \cdot 10^{-4}$

### 5.6 Análise de confiabilidade da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.5.

Com o valor da taxa de fibra de carbono CFC calculada pelo método semi-probabilístico é feita uma análise de confiabilidade, desta vez das funções de falha  $g_3$  e  $g_4$  correspondentes a ruptura e descolamento do compósito de modo a avaliar a segurança da seção. As variáveis usadas na análise de confiabilidade são mostradas na tabela 7.

**Tabela 7.** Variáveis aleatórias do exemplo com os parâmetros estatísticos. Fonte: autor (2011)

Variável aleatória	Descrição	Und	Valor médio	Coef. variação	Tipo de distribuição
$V_g$	carga distribuída permanente	kN/m	14,257	0,03	normal
$q_L$	carga acidental para escritório	kN/m <sup>2</sup>	3,071	0,388	Gumbel
$V_q$	carga distribuída acidental	kN/m	9,871	0,388	Gumbel
$P_g$	carga pontual permanente	kN	12	0,03	normal
$P_q$	carga pontual acidental	kN	8	0,388	Gumbel
$f_r$	resistência a tração da fibra de carbono	MPa	3214,956	253,751	Weibul
$E_r$	módulo de elasticidade	GPa	238,017	28,332	Weibul

Para a taxa de fibra de carbono calculada no item 5.5. os valores de índices de confiabilidade são apresentados na tabela 8.

**Tabela 8:** Valores dos índices de confiabilidade  $\beta_1$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_4$  para a taxa de fibra pf. Fonte: autor (2011)

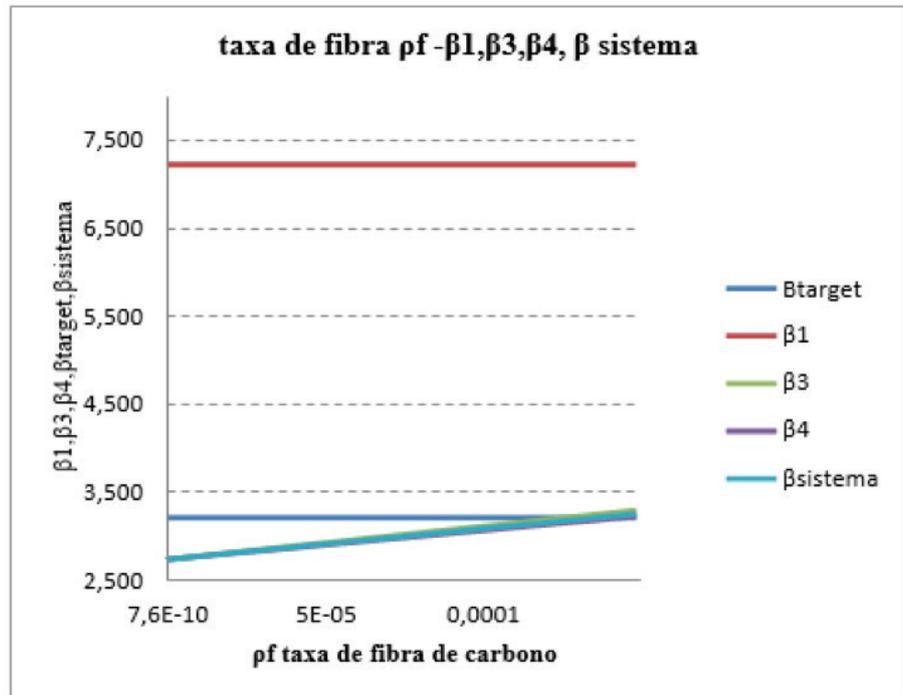
$\rho_f$	$\beta_1$	$\beta_3$	$\beta_4$
$7,6377^{-10}$	7,224	2,7358	2,7358

### 5.7 Dimensionamento baseado em confiabilidade da área da seção de fibra de carbono CFC da seção S1 da viga V2 dimensionada no item 5.5.

Os valores dos índices de confiabilidade obtidos anteriormente são inferiores ao valor de  $\beta_t$  por tanto é necessário fazer um novo cálculo iterativo, ou seja, um projeto da fibra de carbono baseado em confiabilidade aplicada para obter o valor de  $\beta_2$  e  $\beta_3 \geq \beta_t$  como se apresenta na tabela 9.

**Tabela 9:** Iteração de cálculo da taxa de fibra de carbono e  $\beta_{\text{sistema}}$ . Fonte: autor (2011)

$\rho_f$	$\beta_1$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_s$	$\beta_t$
$7,6377^{-10}$	7,224	2,7358	2,7358	2,7358	3,209
$1,60^{-8}$	7,224	2,739	2,739	2,739	3,209
$3,37^{-7}$	7,224	2,737	2,7371	2,7371	3,209
$7,07^{-6}$	7,224	2,7637	2,7617	2,7621	3,209
$1,49^{-4}$	7,224	3,293	3,226	3,254	3,209



**Figura 6:**

Representação gráfica do processo iterativo do cálculo da taxa de fibra de carbono e  $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_s$ .

Fonte: autor (2011)

Adotando-se então o valor de taxa de armadura como  $\rho_f = 0,0149\%$  com uma largura da fibra de 40 mm por faixa.

## 6 CONCLUSÕES

Uma seção transversal S1 de uma viga de concreto armado V2 de um pavimento de uma residência é dimensionada pela norma brasileira NBR 6118-2003 para uma solicitação de esforço cortante.

Uma análise de confiabilidade das funções de falha dessa seção mostra que a armadura de estribo da seção pode ser reduzida sem comprometer a segurança da seção. É feito então um dimensionamento da armadura transversal da seção baseado em confiabilidade, ou seja, a armadura é calculada de modo que o menor índice de confiabilidade entre os índices de confiabilidade associados às funções de falha definidas para a seção seja igual ao índice de confiabilidade alvo.

Em seguida, supõe-se que, após construída, a edificação mudou seu uso de residência para escritório. As novas cargas de projeto e a impossibilidade de se mudar as dimensões da seção transversal da viga e a área da armadura, levam ao uso de reforço da seção com fibra de carbono CFC. O dimensionamento da área necessária é feito conforme as expressões definidas em Chen & Teng.

Uma análise de confiabilidade análoga aquela feita para a viga sem reforço, mas agora com novas funções de falha, é feita para a seção reforçada. Os resultados mostram que é necessário um aumento da área da seção transversal da fibra na seção Si

da viga V2 de modo a não comprometer sua segurança. Um dimensionamento baseado em confiabilidade é então realizado.

O exemplo comprova a viabilidade do projeto baseado em confiabilidade de seções de concreto armado sem e com reforço de fibra de carbon CFC.

## 7 REFERÊNCIAS

**AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM)** D3039/ D3039M. *Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials*. USA, 2000.

**BECK, ANDRÉ.** *Curso de Confiabilidade Estrutural*, apostila da USP / São Carlos, 2008.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT).** *Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações*. Procedimento: NBR 6120. Rio de Janeiro, Brasil, 1980.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT).** *Projeto de Estruturas de Concreto* –Procedimento: NBR 6118. Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT).** *Ações e Seguranças nas Estruturas* –Procedimento: NBR 8681. Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

**CAMPOS, S. R.,** *Análise da Confiabilidade de Vigas de Concreto Armado com Plástico Reforçado por Fibras*. Tese Doutorado em Engenharia Civil. Universidade Federal De Minas Gerais. Belo Horizonte, 2009.

**CHEN, J.F., TENG, J.G.** *Shear Capacity of FRP-Strengthened RC Beams. FRP Debonding*. *Construction and Building Materials*, Vol.17, 2003a, p.27–41.

**JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY.** *JCSS: Probabilistic Model Code*. Disponível em: <http://www.jcss.ethz.ch>.

**LOPES, M. T., VELASCO, M. S., EBOLI, C. R.** *Análise de confiabilidade de estruturas aplicada ao projeto de reforço à força cortante de vigas em concreto armado com compósitos de fibras de carbono*. Tese Doutorado em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

**PEREIRA, B. S., VELASCO, M. S., EINSFELD, R. A.** *Estudo do reforço externo à força cortante em vigas de concreto armado utilizando compósitos de fibras de carbono.* Dissertação Mestrado em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

**VASCONCELLOS, M. R., CAMPOS, A. F.** Análise probabilística de estruturas de concreto armado. Teoria e Prática na Engenharia Civil, No.1, p.37-46, Nov., 2000.

# Modelo de otimização topológica e critério de confiabilidade para a concepção e análise de regiões-D complexas em estruturas de concreto armado

**João da Costa Pantoja**

Universidade de Brasília,

Faculdade de Arquitetura e Urbanismo

Brasília-DF, Brasil

Pesquisador do Grupo CONSTRUCT-LESE - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

joacpantoja@gmail.com

lattes: <http://lattes.cnpq.br/6879105340639188>

**Luiz Fernando Martha**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

lfm@tecgraf.puc-rio.br

lattes: <http://lattes.cnpq.br/2540733672905515>

**Luiz Eloy Vaz**

Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro-RJ, Brasil

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4321281058166070>

# Modelo de otimização topológica e critério de confiabilidade para a concepção e análise de regiões-d complexas em estruturas de concreto armado

João da Costa Pantoja | Luiz Fernando Martha | Luiz Eloy Vaz

## Resumo

Este documento mostra uma metodologia para a análise da confiabilidade das estruturas de concreto armado aplicando os modelos de bielas e tirantes com base em resultados experimentais. As formulações FORM e Monte Carlo são utilizadas para calcular o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha dos modos, considerando tanto a segurança como o comportamento dúctil do modelo de bielas e tirantes. Um grande número de resultados experimentais obtidos por outras investigações são utilizados para a calibração dos fatores de incerteza dos modelos aplicados durante a análise de confiabilidade. É apresentado um exemplo de concepção de uma viga parede utilizando a análise de fiabilidade para validação dos aspectos de segurança e ductilidade.

## Palavras-chave

Confiabilidade, bielas e tirantes, concreto armado

# ***Topology optimization model and reliability criterion for design and analysis of complex d- regions in reinforced concrete structures***

## **Abstract**

*This paper shows a methodology for reliability analysis of reinforced concrete structures applying the strut-and-tie models based on experimental results. FORM and Crude Monte Carlo formulations are used to calculate the reliability index and probability of failure of modes, considering both safety and ductile behavior of the strut-and-tie model. A large number of experimental results obtained by others researches are used for calibration of model uncertainties factors applied during reliability analysis. An example of design of a wall beam using reliability analysis for validation of safety and ductility aspects is presented.*

## **Keywords**

*Reliability, Strut-and Tie Model, Concrete Structures.*

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de viga paredes via o modelo de bielas e tirantes, está presente nas orientações do ACI 318-05. A utilização desses conceitos permite ao projetista estrutural predizer a capacidade de carga para vários tipos de vigas paredes. Contudo, resultados experimentais demonstraram que a carga resistente das estruturas de concreto armado e sua correspondente estimativa através do ACI 318-05 são diferentes. Collins e Kuchma (1999) mostraram experimentalmente que o código ACI 318-05 subestima a capacidade ao cisalhamento de vigas paredes de concreto armado. Uma vez que isso aconteça, ocorrerão na estrutura, seções demasiadamente grandes e, conjuntamente, taxas de armadura pequenas. Sendo assim, é necessária uma melhor investigação no sentido de ultrapassar essas dificuldades.

O principal objetivo desse trabalho é apresentar uma metodologia baseada em confiabilidade para análise e projeto de vigas paredes de concreto armado via modelo de bielas e tirantes. A metodologia proposta permite que as principais incertezas presentes no projeto estrutural de vigas paredes sejam incorporadas ao processo de dimensionamento da estrutura. Além disso, a análise de confiabilidade proposta estima as probabilidades de falha associadas com cada mecanismo de falha da viga parede, o que permite ao projetista estrutural verificar uma maior ou menor probabilidade de ocorrência de um determinado modo de falha propondo então modificações de projeto de direcionem um modo de falha desejado. Para demonstrar a aplicabilidade da metodologia, uma viga parede testada experimentalmente é analisada. A modelagem das variáveis aleatórias responsáveis pelos erros de modelagem da estrutura (epistêmicas) forma obtidas como base em resultados experimentais de 214 vigas paredes de concreto armado, ensaiadas até a ruptura e descritas na literatura por diversos pesquisadores e mostradas por Park e Kuchma (2007).

## 2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

A análise de estruturas de concreto armado envolve uma série de incertezas referentes às propriedades do concreto a aço, dimensões geométricas e posição das armaduras, carregamentos atuantes e condições de apoio. Além do mais, incertezas associadas aos erros de modelo são pouco conhecidas e consideradas. Para análise realística do problema é necessária atenção para os valores esperados das médias e variâncias da resposta estrutural com relação aos parâmetros de entrada. Uma série de métodos para análise probabilística de estruturas tem sido estudada nos últimos anos. Geralmente,

os métodos mais utilizados são o método de simulação de Monte Carlo e o método analítico FORM (First Order Reliability Method). O método de Monte Carlo é o mais simples e intuitivo para consideração da análise probabilística e, por essa razão é bastante utilizado. Nesse método, propriedades dos materiais, carregamentos, e outras variáveis randômicas são introduzidas via simulação digital, sem nenhuma modificação significativa no algoritmo da análise determinística do problema. Além disso, o método de Monte Carlo é estatisticamente consistente e pode ser empregado para testar outras técnicas e métodos. Contudo, o método de Monte Carlo pode ser computacionalmente muito caro em problemas onde o número de graus de liberdade é muito grande levando a um número de simulações proibitivo. Em caso como esse, o método FORM tem sido amplamente empregado.

Os critérios de projeto de estruturas de concreto armado baseados no método dos Estados Limites Últimos (ELU), o nível de segurança é garantido pelo uso dos coeficientes parciais de segurança. Esses coeficientes são introduzidos com diferentes valores de forma a aumentar ou diminuir a magnitude das variáveis randômicas envolvidas na análise. Usualmente, carregamentos, resistência dos materiais e dimensões estruturais são as variáveis randômicas básicas consideradas no projeto. Os coeficientes parciais de segurança são introduzidos de forma a aumentar os valores dos carregamentos e diminuir as resistências do concreto e aço. Para o concreto e o aço, os coeficientes de segurança cobrem as diferenças existentes entre os valores projetados e reais das dimensões nominais da peça e da resistência do concreto obtida nos ensaios dos corpos de prova.

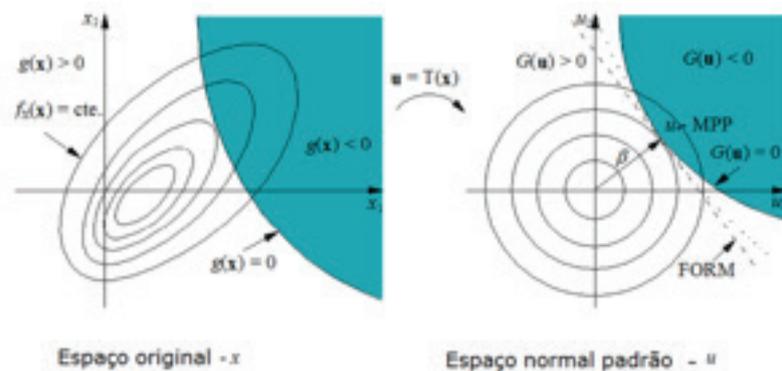
O uso dos coeficientes de segurança, apesar de conveniente, não é suficiente para determinar o nível de segurança obtido pelo projeto. De fato, segurança depende da resposta estrutural devido à ação dos carregamentos e envolve interdependência entre todas as variáveis randômicas. Uma avaliação consistente do nível de segurança requer a determinação da probabilidade de falha da estrutura. Essa probabilidade pode ser estimada se as distribuições de certas variáveis randômicas que sejam responsáveis pela margem de segurança da estrutura são conhecidas. Infelizmente, isso nem sempre é possível ou mesmo prático de se obter. Uma alternativa para obtenção do nível de segurança consiste na avaliação do índice de confiabilidade da estrutura. Esse índice leva em conta todas as variáveis randômicas do problema como também a resposta da estrutura devido às ações. O índice de confiabilidade é associado à probabilidade de falha, apesar de seu relacionamento não ser explícito. Uma série de trabalhos tem sido desenvolvida para estimativa da confiabilidade de estruturas de concreto armado. Contudo, aplicações de análise de confiabilidade em modelos de bielas e tirantes é um novo campo de pesquisa em desenvolvimento.

### 3 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE

O índice de confiabilidade. Das estruturas de concreto armado é uma medida do nível de segurança que leva em conta as incertezas inerentes as variáveis de entrada. Um índice de confiabilidade bastante utilizado é o índice de Hasofer e Lind (1974), definido como a menor distância do ponto de valor médio relativo, às variáveis randômicas, na superfície de estado limite do espaço padrão normalizado denominado  $\beta_{HL}$ . Sua representação na formulação matricial é (Ditlevsen 1981):

$$(1) \quad \beta_{HL} = \min_{x \in F} \sqrt{(x - \mu)^t C^{-1} (x - \mu)}$$

Onde o vetor  $x$  representa as  $n$  variáveis randômicas,  $\mu$  é o vetor dos valores médios,  $C$  é a matriz das covariâncias e  $F$  é a região de falha.



**Figura 1**  
Procedimento de transformação do método FORM.  
Fonte: autor (2011).

A minimização da Equação (1) é feita sujeita à restrição  $g(x) \leq 0$ , onde a superfície de estado limite  $g(x) = 0$ , separa o domínio  $n$  dimensional das variáveis randômicas em duas regiões. Uma região de falha representada  $g(x) \leq 0$  e uma região segura dada por  $g(x) > 0$ . Uma formulação clássica para calcular  $\beta_{HL}$  através da equação (1) é baseada na transformação da superfície de estado limite original numa superfície de estado limite no espaço padrão das variáveis normais reduzidas não correlacionadas,  $G(u)$ . A menor distância da superfície transformada a origem das variáveis reduzidas é o índice de confiabilidade  $\beta = \beta_{HL}$  (Fig. 1).

#### 4 FORM (First Order Reliability Method)

Através do método FORM e do índice de confiabilidade de Hasofer e Lind (1974), é possível aproximar a probabilidade de falha na forma:

$$(2) \quad \rho_f = \Phi(-\beta_{HL})$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulativa de uma variável normal padrão. Nesse método, a função limite é aproximada pelo hiperplano tangente a superfície de estado limite no ponto de projeto.

#### 5 MÉTODO DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo é o mais robusto método de simulação em que amostras são geradas com respeito a função densidade de probabilidade de cada variável. Para cada amostra, a resposta do sistema é calculada. Um estimador da probabilidade de falha então é calculado por:

$$(3) \quad \tilde{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(X_i)$$

onde  $N$  é o número de amostras e o estimador  $I(x)$  é calculado por:

$$(4) \quad I(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } g(x) \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

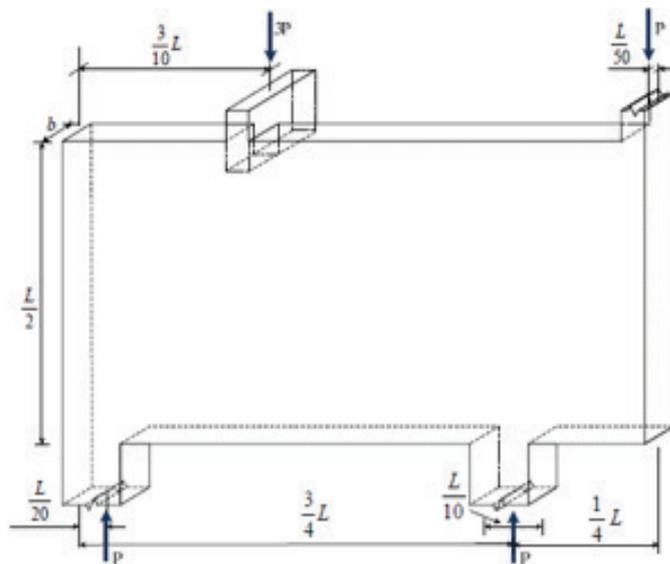
o coeficiente de variação do estimador é dado por:

$$(5) \quad COV(\tilde{p}_f) = \sqrt{\frac{(1-p_f)}{p_f N}}$$

## 6 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

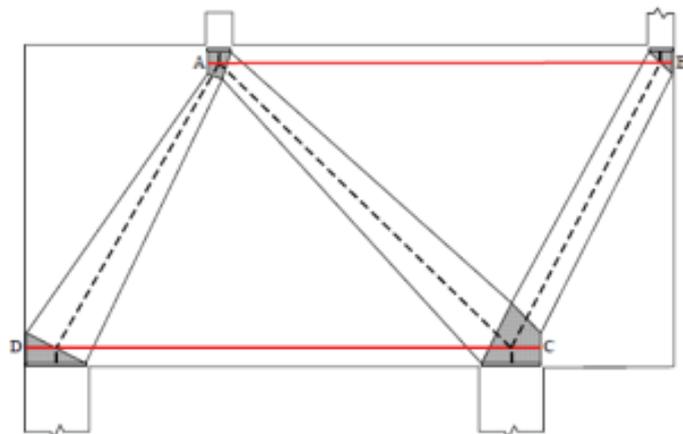
### 6.1 Estrutura analisada

De forma a ilustrar a metodologia proposta para estimativa dos níveis de segurança e ductilidade dos modelos de bielas e tirantes, um exemplo de uma viga parede de concreto armado é apresentado e analisado, considerando as orientações do código normativo ACI 318-05. A resistência à compressão do concreto tem seus valores incrementados para mostrar sua influência no comportamento do modelo. A geometria externa da viga parede usada nesse exemplo é mostrada na Figura 2.



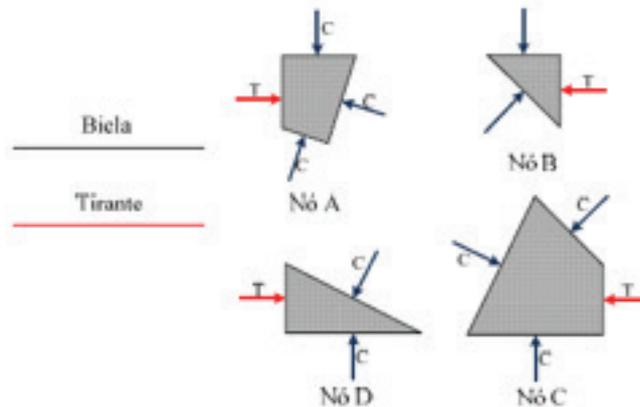
**Figura 2**  
Dimensões e cargas utilizadas no exemplo de viga parede.  
Fonte: autor (2011)

O projeto da viga parede utilizando um modelo treliça plana é apresentado na Figura 3. O modelo de bielas e tirantes é inicialmente aproximado pelo alinhamento das bielas e tirantes com o centroide da zona de compressão e das armaduras de tração dos tirantes.



**Figura 3**  
Modelo de bielas e tirantes baseado em otimização topológica.  
Fonte: autor (2011)

A geometria nodal é baseada na dimensão dos cobrimentos, apoios e ângulos das bielas (Fig. 4). De acordo com o teorema do limite inferior da plasticidade (Livesley 1976), a capacidade do modelo de bielas e tirantes é sempre menor do que a capacidade real da estrutura uma vez que os seguintes requerimentos são obedecidos: o modelo está em equilíbrio, existente deformação plástica suficiente para distribuição de forças de acordo com o modelo assumido e as tensões aplicadas nos elementos não deverá exceder ao limite de escoamento ou a capacidade de fluxo plástico. Para obter as funções de estado, os modos de falha deverão ser identificados. Contudo, geralmente há vários modos de falha potenciais, no entanto, na maioria dos casos apenas uma pequena fração contribuirá significativamente para probabilidade de falha. Esses podem ser referidos como um sistema em falha do tipo em série e sua probabilidade de falha é estimada ter seu valor perto da resposta real.



**Figura 4**  
Representação do modelo de bielas e tirantes.  
Fonte: autor (2011)

## 7 INCERTEZAS ALEATÓRIAS OU RANDÔMICAS

Muitos fenômenos e processos relativos ao interesse da engenharia contêm incertezas. Isso significa que resultados esperados são imprevisíveis (em algum grau). Problemas desse tipo são caracterizados por dados experimentais ou de campo que contêm uma significativa variabilidade representativa da incerteza natural intrínseca a esses fenômenos, isto é, as medidas observadas são diferentes em cada experimento mesmo se o experimento for conduzido ou medido em condições aparentemente idênticas. Mesmo dentro de um conjunto de valores observados ou medidos, certos valores poderão ocorrer mais frequentemente que outros. A variabilidade inerente nesse tipo de dado ou informação é estatística por natureza, e as realizações de um valor específico ou mesmo de um conjunto de valores envolve probabilidade.

Em geral, esse tipo de formulação é considerado através de variáveis básicas que são mais relevantes ao problema. Então, equações de estado limites específicas são desenvolvidas para representar cada modo de falha da estrutura. O cálculo do modelo para cada estado limite considerado deve conter um específico conjunto de variáveis básicas, ou seja, quantidades físicas que caracterizem ações e influências do meio ambiente, além de quantidades de materiais e geométricas. Considera-se que as variáveis básicas carreguem toda a informação necessária ao cálculo do modelo. Cada variável básica é definida pelo número de parâmetros do tipo, média, desvio padrão, tipo distribuição de probabilidade, parâmetros de correlação entre as variáveis, etc. Considerando o problema da viga parede apresentado, quatro variáveis básicas são consideradas: duas representando as incertezas devidas aos materiais (concreto e aço) e duas outras representando as incertezas devido aos carregamentos (permanente e acidental).

Na Tabela 1 os parâmetros estatísticos associados as variáveis básicas são mostrados. As orientações utilizadas nesse trabalho foram tiradas do JCSS 2001.

**Tabela 1:** Propriedades estatísticas do modelo.

Fonte: autor (2011)

Random variable	Distribuição	Média(KN)	$\delta$
Carga Permanente	Normal	136	0,03
Carga Acidental	Gumbel	204	0,30
Resistência à Compressão - Concreto	Lognormal	$f_{cm}^{(*)}$	0,17
Tensão de Escoamento	Lognormal	41.2	0,05

(\*) Variável

## 8 INCERTEZAS EPISTÊMICAS

Na engenharia, são muito utilizados, modelos idealizados do mundo real em nossas análises e estimativas, com propósito de tomar decisões ou planejamentos e desenvolvimento de critérios para projeto em sistemas estruturais. Esses modelos idealizados, que podem ser modelos matemáticos, de simulações ou mesmo de laboratório, são representações imperfeitas do mundo real.

Consequentemente, os resultados da análise, estimativa ou predição obtidos com base nesses modelos são imprecisos,

com algum grau de erro, logo contém incertezas. Esses tipos de incertezas são baseados no conhecimento e são denominadas de incertezas do tipo epistêmicas. Frequentemente, a incerteza epistêmica pode ser mais significativa do que a incerteza aleatória ou randômica. Uma vez feita a predição ou estimativa com um modelo idealizado, o objetivo é invariavelmente obter uma quantidade específica de interesse, que pode ser um valor médio ou valor mediano de uma variável. Sendo assim, na consideração da incerteza epistêmica é razoável na prática limitar nossas considerações de acurácia aos valores centrais estimados ou calculados, como valores médios ou medianos.

$$T = G(X_1, X_2, \dots, X_i)$$

onde T é o resultado do modelo, G é a função representativa do modelo e  $X_i$  as variáveis básicas do problema. De fato, a função representativa do modelo G normalmente será inexata. Então, a diferença entre a estimativa do modelo e a realidade do experimento pode ser escrita como se segue:

$$T = G'(X_1, \dots, X_i, \theta_1, \dots, \theta_j)$$

Os parâmetros denominados  $\theta_j$  são referidos aos parâmetros que contêm as incertezas de modelo e das variáveis randômicas. Suas propriedades estatísticas são derivadas de experimentos ou observações. A média desses parâmetros deverá ser determinada desse modo, na média, com cálculo do modelo calibrado pelas estimativas obtidas via resultados experimentais. Na Tabela 2, os parâmetros referentes às incertezas epistêmicas consideradas no problema apresentado são mostrados. A metodologia proposta usa os valores de média e coeficiente de variação, obtidos por diversos pesquisadores, e mostrada por Park e Kuchma (2007) no cálculo da capacidade portante de viga paredes de 214 vigas paredes de concreto armado utilizando as orientações do código normativo americano ACI 318-05.

**Tabela2:** Incertezas epistêmicas do modelo. Fonte: autor (2011)

Variável Randômica	Distribuição	Média(KN)	$\delta$
Incerteza da resistência	Normal	1,32 *	0,18 *
Incerteza do carregamento	Normal	1	0,05

\* Obtido do modelo versus resultados experimentais sem coeficientes

## 9 METODOLOGIA DE ANÁLISE

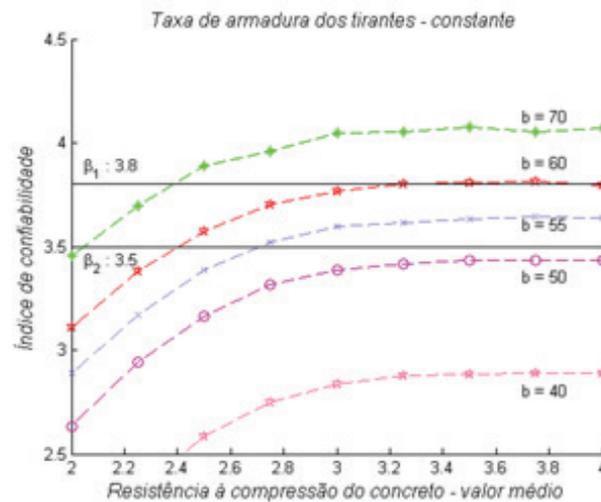
A metodologia de análise desse trabalho foi planejada em dois passos. No primeiro, as condições de laboratório são simuladas de forma a comparar os resultados com os resultados obtidos pelos pesquisadores anteriormente. Os resultados referentes aos modos de falha são então checados e o modelo numérico estocástico calibrado. Isso significa que apenas as cargas permanentes foram consideradas sem nenhuma correção relativa ao seu valor médio, uma vez que o próprio valor representa sua média. Isso é possível uma vez que as condições de carregamento são controladas dentro do laboratório. Da mesma forma, as propriedades do concreto e do aço são utilizadas como valores médios uma vez que representam valores médios obtidos em testes de laboratório. Num segundo passo, as condições reais de projeto são aplicadas. Isso é feito via consideração de que a metade do carregamento é representada pelo carregamento acidental (distribuição normal) e a outra metade pelo carregamento acidental (distribuição Gumbel). Nesse caso, os valores característicos adotados pelas resistências e pelos carregamentos têm que ser corrigidos e seus correspondentes valores médios obtidos para cada tipo de distribuição. Nesse passo as orientações presentes no código probabilístico JCSS 2001 foram adotadas. Para isso, foram consideradas as incertezas de modelo apresentadas na Tabela 2. O método FORM foi utilizado inicialmente como uma primeira aproximação na determinação da probabilidade de falha. Em problema dessa natureza, quando um sistema em série ocorre e um número reduzido de graus de liberdade está envolvido, o método de simulação de Monte Carlo é a melhor escolha (precisão).

## 10 APLICAÇÃO NUMÉRICA E DISCUSSÃO

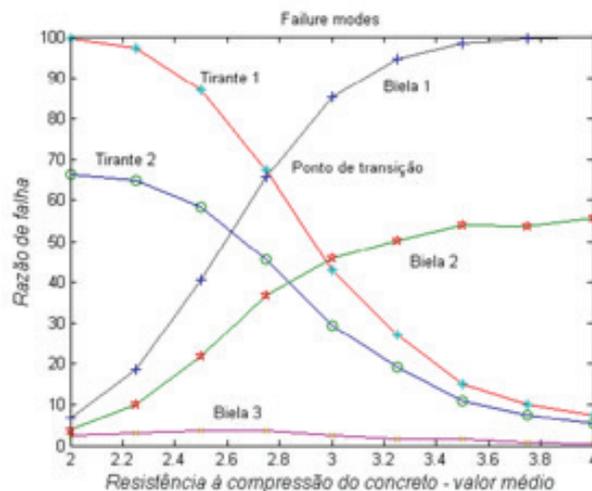
Inicialmente um valor médio de 20 MPa para resistência à compressão média do concreto é adotado conjuntamente com uma taxa de armadura no valor de 0.06% de  $f_{hb}$  para os tirantes. O valor da altura da viga parede é  $L/2$ . Um modo de falha frágil foi obtido pelo modelo numérico. Além do mais, o modelo não obteve um nível de confiabilidade mínimo (Fig. 5). Essa observação é caracterizada pelos valores numéricos menores que 3.5 e 3.8 no gráfico (JCSS 2001). A taxa de armadura adotada foi obtida de forma iterativa. Esse procedimento foi necessário uma vez que não se tinha conhecimento do ponto de transição entre o modo de falha dúctil e frágil anteriormente. Essa região de transição é apresentada na Figura 6.

Depois disso, vários incrementos nos valores da espessura da

viga parede e do valor médio da resistência à compressão foram então feitos, no sentido de elevar o nível de segurança do modelo. A Figura 5 mostra que valores entre 55 e 60 cm acompanhados de uma resistência à compressão média acima de 28 MPa são os valores recomendados para projeto. Valores diferentes do intervalo entre 3.5 e 3.8 podem levar a modelos inseguros, ou mesmo a um aumento de custo devido a uma má utilização do material. A Figura 6 mostra como as relações de falha modificam com o acréscimo na resistência média do concreto. Os valores relativos aos modos de falha frágeis diminuem enquanto que os relativos os modos de falha dúcteis crescem. Uma constatação interessante é que os modos de falha são função apenas da taxa de armadura aditada para cada tirante. Uma vez que esses valores são definidos, as modificações de espessura irão influenciar apenas o índice de segurança do modelo e não mais seus aspectos de ductilidade.



**Figura 5**  
Nível de segurança do modelo. Fonte: autor (2011)



**Figura 6**  
Modos de falha do modelo. Fonte: autor (2011)

Após o ponto de transição, referente ao modo de falha mais importante, o modelo passa a ter um modo de falha predominantemente dúctil. Isso significa que, o escoamento do aço ocorrerá antes do esmagamento do concreto nas bielas. De acordo com essa metodologia é possível assegurar aspectos de segurança e ductilidade a uma viga parede de concreto armado com base em três variáveis principais. Primeiro, é necessário encontrar uma taxa de armadura para os tirantes de modo que o ponto de transição seja determinado. Depois disso, um aumento gradual deverá ser feito na espessura e no valor da resistência à compressão até que o nível de segurança mínimo seja obtido.

## 11 REFERÊNCIAS

- ACI COMMITTEE 318 2007.** *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-05) and Commentary (318R-05)*, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, 2005, 430 pp. 666 ACI Structural Journal/November-December.
- ANG A. H-S., TANG W. H.** *Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering*. John Wiley & Sons. INC.2007, 2nd edition.
- BREITUNG K.** *Asymptotic approximations for multinormal integrals*. J Eng Mech ASCE 1984;110(3):357–66.
- CEB-FIP.** *CEB-FIP Model Code for Concrete Structures*, Comite Euro-International du Beton, Federation International de la Precontrainte, 1993.
- COLLINS M., KUCHMA D. A.,** *How safe are our large, lightly reinforced concrete beams, slabs and footings?.* ACI JOURNAL, Proceedings V. 96, No. 4, Oct. 1999, pp. 482-490.
- DER KIUREGHIAN A, DEStEFANO M.** *Efficient algorithm for second-order reliability analysis*. J Eng Mech ASCE 1991;117(12):2904–23.
- DER KIUREGHIAN A., HAUKAAS T., FUJIMURA, K.** *Structural reliability software at the University of California, Berkeley*, Structural Safety, 2006; 28:44–67.
- HASOFER AM, LIND NC.** *Exact and invariant second-moment code format*. J Eng Mech Div ASCE 1974;100(1):111–21.
- HWANG, S.-J.; LU, W.-Y.; AND LEE, H.-J.,** *Shear Strength Prediction for Deep Beams*, ACI Structural Journal, V. 97, No. 3, May-June 2000, pp. 367-376.

**JCSS - PROBABILISTIC MODEL CODE.** *The Joint Committee on Structural Safety.* The Probabilistic Model Code. 2001

**PARK J.W., KUCHMA D. A.,** *Strut-and-Tie Model Analysis for Strength Prediction of Deep Beams,* ACI Structural Journal, V. 104, No. 6, November-December 2007, pp. 657-666.

**ROGOWSKY, D. M.; MACGREGOR, J. G.; AND ONG, S. Y.,** *Tests of Reinforced Concrete Deep Beams,* ACI JOURNAL, Proceedings V. 83, No. 4, July-Aug. 1986, pp. 614-623.

**SCHLAICH J, SCHÄFER K, JENNEWEIN M.** *Toward a consistent design of structural concrete.* PCI Journal 1987;32(3):74–147 [special report].

**TVEDT L.** *Distribution of quadratic forms in normal space: application to structural reliability.* Eng Mech ASCE 1990;116(6):1183–97.

**QUINTERO-FEBRES, C. G.; PARRA-MONTESINOS, G.; AND WIGHT, J. K.,** *Strength of Struts in Deep Concrete Members Designed Using Strut-and- Tie Method,* ACI Structural Journal, V. 103, No. 4, July-Aug. 2006,pp. 577-586.

**TAN, K. H.; KONG, F. K.; TENG, S.; AND GUAN, L.,** *High-Strength Concrete Deep Beams with Effective Span and Shear Span Variations,* ACI Structural Journal, V. 92, No. 4, July- Aug. 1995, pp. 395-405.

**AGUILAR, G.; MATAMOROS, A. B.; PARRA-MONTESINOS, G.; RAMIREZ, J. A.; AND WIGHT, J. K.,** *Experimental Evaluation of Design Procedures for Shear Strength of Deep Reinforced Concrete Beams,* ACI Structural Journal, V. 99. No. 4, July-Aug. 2002, pp. 539-548.

# Geração automática de envoltórias topológicas aplicadas em modelos de bielas e tirantes utilizando técnicas de otimização multiobjetivo

## **João da Costa Pantoja**

Universidade de Brasília,  
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo  
Brasília-DF, Brasil  
Pesquisador do Grupo CONSTRUCT-LESE - Faculdade de Engenharia  
da Universidade do Porto  
joaocpantoja@gmail.com  
lattes: <http://lattes.cnpq.br/6879105340639188>

## **Luiz Fernando Martha**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
lfm@tecgraf.puc-rio.br  
lattes: <http://lattes.cnpq.br/2540733672905515>

## **Luiz Eloy Vaz**

Universidade Federal Fluminense  
Rio de Janeiro-RJ, Brasil  
Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4321281058166070>

## **Paul Antezana**

Universidade Católica de Brasília  
Brasília-DF, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/3026061815481087>

# Geração automática de envoltórias topológicas aplicadas em modelos de bielas e tirantes utilizando técnicas de otimização multiobjetivo

João da Costa Pantoja | Luiz Fernando Martha  
Luiz Eloy Vaz | Paul Antezana

## Resumo

A proposta deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia que utilize um algoritmo de otimização topológica com técnica de otimização multiobjetivo, para a geração automática de um conjunto topológico de uma envoltória topológica que possa representar uma região viável nas estruturas de concreto bidimensional utilizando o modelo de bielas e tirantes. Devido a uma variação realista das cargas do projeto, são necessárias algumas funções objetivas e deve ser construída uma superfície de Pareto. Isto é realizado utilizando um algoritmo de otimização apropriado. Dois problemas de estruturas de concreto bidimensional são submetidos a múltiplas cargas, após análise e obtenção das regiões viáveis correspondentes, confirmando a validade da metodologia.

## Palavras-chave

Otimização topológica, Otimização multiobjetivo, superfície de Pareto.

# ***Automatic generation of topology envelopes applied in strut and tie models using multiobjective optimization techniques***

## **Abstract**

*The proposal of this work is the development of a methodology that uses an algorithm of topology optimization with multi-objective optimization technic, for automatic generation of a topology set of an envelope that may represent a viable region in the bi- dimensional concrete structures using strut-and-tie model. Due to a realistic variation of project loadings some objective functions are required and a Pareto frontier should be built. That is performed using an appropriate optimization algorithm. Two problems of bi- dimensional concrete structures are submitted to multiple loadings, after analysis is presented and the correspondent viable regions obtained, confirming the validity of the methodology.*

## **Keywords**

*Topology Optimization, Multi-objective Optimization, Pareto Surface.*

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de viga paredes via o modelo de bielas e tirantes, está Em geral, a resposta de uma determinada estrutura aos carregamentos aplicados e de suas correspondentes condições de apoio, pode levar a uma distribuição interna de deformações linear ou não. Isso ocorre quando a estrutura possui alguma forma geometricamente descontínua ou carregamento concentrado. Áreas com uma distribuição linear de deformações são conhecidas como regiões B (Bernoulli) enquanto que áreas como distribuições não lineares são denominadas regiões D (Discontinuity) conforme proposto por Schlaich et al. (1987). Regiões D são pontos estruturais críticos sujeitos a danos, onde fenômenos do tipo fissuração podem ocorrer. Sendo assim, os códigos normativos relativos a estruturas de concreto de vários países como EUA, Alemanha, Espanha entre outros, propõem projetos separados para regiões B e D de modo a garantir eficiência e economia aos mesmos.

Na aplicação prática de projetos estruturais, os critérios utilizados no projeto de regiões B já são bastante conhecidos e difundidos. No entanto, o projeto de regiões D é executado com base na experiência ou por decisões baseadas no conhecimento estrutural do projetista responsável pelo projeto. O modelo de bielas e tirantes introduzido por Schlaich et al (1987) é uma alternativa bastante interessante para o projeto de regiões D. Essa metodologia têm uma série de vantagens (Silva et al., 2000) e suas orientações tem sido utilizadas frequentemente pelos códigos normativos de vários países.

Um projeto estrutural baseado no modelo de bielas e tirante aplicado de modo convencional requer um procedimento de tentativa e erro que é orientado principalmente pela experiência e decisões dos projetistas envolvidos de forma a garantir o funcionamento correto e a segurança das regiões D. Apesar do modelo de bielas e tirantes ser conceitualmente simples, sua aplicação na forma discreta não é na maioria das vezes intuitiva. A direção e espessura das bielas e a posição dos tirantes são determinadas pelas linhas de tração e compressão das tensões principais e calculadas através da análise linear de elementos finitos de barras (treliças). Contudo, na prática é bastante penoso o lançamento de um modelo de treliça quando a distribuição de tensões é complexa devido à ocorrência de múltiplos carregamentos e condições de contorno especiais.

De modo a reduzir o processo de tentativa e erro no modelo de bielas e tirantes e melhorar sua eficiência nas situações onde existam perturbações nas tensões, foi introduzida a ideia de projeto ótimo. Desde então, uma série de métodos de otimização topologia de elementos de treliça têm sido desenvolvidos e utilizados para avaliação dos modelos de treliça nas estruturas de

concreto armado (Ali et al. 2001, Biondini 2001). Métodos dessa natureza porém, possuem a desvantagem de necessitarem de uma geração inicial de barras dentro do domínio de projeto. Também a direção do fluxo de forças fica condicionada as direções das barras previamente definidas.

De maneira a ultrapassar os problemas dos métodos discretos, alguns métodos de otimização topológica do contínuo foram então propostos ( Bendsøe e Kikuchi, 1988 e Xie and Steven, 1993). Nesse estudo um método de otimização topológica de material denominado SIMP (Solid Isotropic Microstructure Penalization) é utilizado na obtenção das topologias ótimas dos modelos de bielas e tirantes a serem empregados em estruturas planas de concreto armado. A estratégia de obtenção de topologia é baseada na remoção de áreas ineficazes para rigidez da estrutura através de um método de tentativa e erro, que conduz a uma estrutura de barras (treliça) apropriada à aplicação do método das bielas e tirantes. Também uma otimização multiobjetivo é aplicada para generalizar a topologia do modelo.

## **2 GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODELOS DE BIELAS E TIRANTES**

Atualmente uma série de trabalhos tem sido feitos no sentido de automatizar a concepção do modelo de bielas e tirantes dentro da estrutura de concreto. Isso se deve a problemática de dispor de forma a mais adequada possível os elementos dentro da estrutura levando a um modelo eficiente. Essa tarefa nem sempre é simples e em alguns casos onde a geometria é complexa, pode ser bastante difícil uma solução coerente. Isso poderia conduzir a modelos inseguros uma vez que não representem o funcionamento correto da estrutura.

Assim a perspectiva de uma metodologia que auxilie o projetista estrutural nessa tarefa pode ser bastante interessante do ponto de vista da utilização do modelo. Uma explicação bastante completa e que abrange uma série de trabalhos nesta área de pesquisa e suas principais características pode ser encontrado em Souza (2004). Nesse trabalho apenas serão mostrados apenas aspectos relativos à utilização da otimização topológica nesse tipo de modelagem.

## **3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Otimização topológica pode ser entendida como um método computacional capaz de sintetizar estruturas através da distribuição de material em uma determinada região do espaço. Para isso utilizada da combinação do método dos elementos finitos (MEF) e os métodos de otimização. Assim, uma região do

espaço é discretizada em elementos finitos de modo que se possa analisar seu comportamento, e então, é distribuído material de forma racionalizada através de algoritmos de otimização.

Uma vantagem da otimização topológica é sua capacidade de fornecer o layout ótimo de um componente estrutural ou mesmo da própria estrutura, para certa aplicação. Assim, este método pode ser aplicado durante a fase do projeto conceitual, diferentemente dos métodos tradicionais de otimização, como a otimização paramétrica ou de forma, que só podem ser aplicados após a definição do layout da estrutura. Desse modo, a otimização topológica pode ser definida como um processo de síntese estrutural.

Um problema típico de otimização topológica é a seleção da melhor configuração possível para o projeto de uma estrutura. Na última década, muita atenção em sido dada para o desenvolvimento dos métodos de otimização topológica do contínuo. Bendsoe & Kirkuchi (1988) propuseram um método otimização baseado em homogeneização que trata a otimização topológica do contínuo como um problema de redistribuição dos materiais. Atualmente existem uma série de técnicas utilizadas na resolução dos problemas de otimização topológica. A adotada neste trabalho é a formulação SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization).

A formulação via método SIMP surgiu como uma opção simples de introduzir o material com propriedades intermediárias similares às que se obtêm com o uso de microestruturas e técnicas de homogeneização. No entanto, no caso da metodologia SIMP, este material intermediário, normalmente definido na forma de densidade artificial, é usado apenas como artifício matemático enquanto na técnica de homogeneização o material intermediário pode corresponder a um material composto ou microestruturado. A função densidade artificial definida pelo SIMP é então utilizada como variável de projeto, definida no domínio  $\Omega$ , no intuito de determinar quais regiões devem possuir material e quais devem ser vazias.

Considerando a necessidade de definição de regiões vazias ou não, representa-se o material sólido como uma densidade artificial  $\rho = 1$  e o vazio  $\rho = 0$ , variando  $\rho$  entre estes dois limites. No presente contexto, as densidades artificiais intermediárias não têm nenhum interesse prático, logo técnicas que penalizem estes valores devem ser utilizadas no intuito de se evitar a incidência deste tipo de região no domínio analisado.

### **3.1 Metodologia SIMP**

No problema de otimização a ser considerado, a variável de projeto  $x^e$  representa a densidade relativa do material em cada

elemento  $e$ , assim  $\rho = x^e \rho_0$ . A densidade  $\rho$  é a densidade de apenas um elemento no domínio de projeto  $\Omega$ . Caso o elemento do domínio seja sólido teremos  $x^e = 1$ . Podemos representar a rigidez para um elemento como  $k^e = (x^e)^p k^0$ . Assim, a formulação via flexibilidade ou energia de deformação da estrutura será:

$$(1) \quad C = F^T u = u^T k u = \sum_{e=1}^N u^e k u^e = \sum_{e=1}^N x^p u^e k^0 u^e$$

O número de elementos será denominado  $N$  e  $p$  é um fator de penalidade. Fazendo o fator de penalidade igual à unidade, elementos com densidades intermediárias irão ocorrer com frequência. Fazendo o fator de penalidade igual a 3, de uma forma contrária, o projeto final conterá elementos que estão totalmente preenchidos de material(sólido) ou com nenhum material(vazio). Esta formulação é normalmente denominada como problemas do tipo 0-1. O volume de material  $V$  pode então ser representado então na forma:

$$(2) \quad V = x^T v$$

Denominaremos de  $V_0$  o volume do domínio de projeto. Podemos então partir para formulação de um problema de otimização onde queremos minimizar a flexibilidade ou a energia de deformação da estrutura, na forma:

Minimizar:  $C = F^T u$

Sujeito a:  $f = \frac{v}{v_0}$  (restrição de volume)

$F = k * u$  (restrição de equilíbrio)

$0 < x_{min} \leq x^e \leq x_{max}$  (restrições laterais)

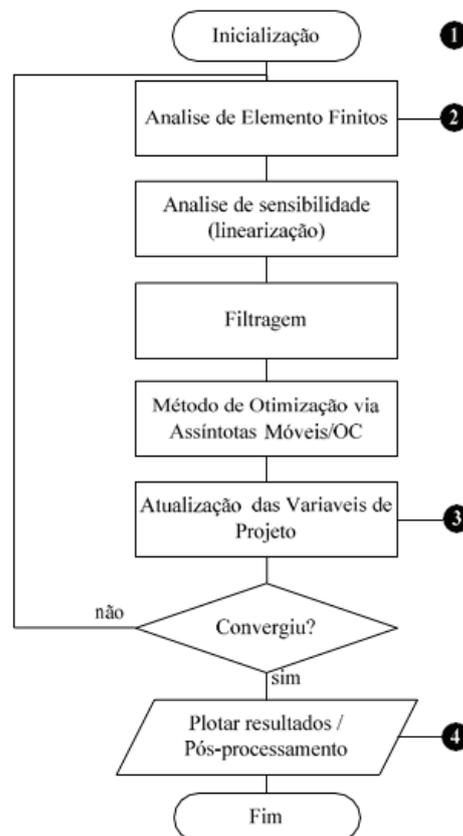
Podemos notar que  $x_{min}$  e  $x_{max}$  serão os limites inferiores e superiores da variável de projeto. Neste caso, escolheremos  $x_{max} = 1$  e  $x_{min} = 0.001$ . A função do limite inferior é prevenir contra uma possível singularidade na matriz de rigidez da estrutura. Nos exemplos a serem apresentados a restrição na fração do volume final do domínio de projeto foi variada de forma a melhor se adequar ao estudo pretendido.

Na formulação SIMP algumas prerrogativas são feitas, de modo que as características do material, como por exemplo, o módulo de elasticidade, num elemento discreto é considerado constante. Se  $\rho_0$  é a densidade inicial do elemento e  $\rho$  é a densidade após a otimização, então é preciso impor ao problema

de otimização uma taxa de redução no volume de material existente representado pela relação entre as densidades na forma  $\rho = \rho_e / \rho_0$  a restrição de volume apresentada no problema de otimização têm essa função.

As características do material dentro de um elemento podem ser modificadas através de uma relação exponencial na densidade do elemento. Se  $E_0$  e  $E$ , são os módulos de elasticidade do elemento antes e depois da otimização, respectivamente, então vale a relação  $E = (\rho_e)^\rho E_0$ . Se  $k_0$  e  $k$ , são a rigidez inicial e posterior à otimização, respectivamente, também a relação  $k = (\rho_e)^\rho E_0$  é válida. O parâmetro  $\rho$  têm a função de penalizar as densidades intermediárias, de maneira a decrescer o número de elementos com esse tipo de densidades e induzir que a maioria das densidades dos elementos fique entre 0 e 1.

Uma vez consideradas as pré-condições acima, cada elemento possui apenas uma variável de projeto. Comparado com o método da homogeneização, a formulação do método SIMP traz excelentes progressos na diminuição do número de variáveis de projeto. Outra vantagem do método SIMP é que as características do material após as modificações são escritas como uma função exponencial da densidade e das características do material no instante inicial da análise, sendo assim esta formulação, simplifica muito a solução da otimização topológica. Um diagrama de fluxo para formulação de um problema de otimização topológica via método SIMP é mostrado na Figura 3.9.



**Figura 1**  
Diagrama de fluxo  
– Método SIMP.  
Fonte: autor (2011)

### 3.2 Envoltória topológica

Um problema existente na aplicação de topologias para modelos de bielas e tirantes é quando há mais de uma carga cujos valores relativos podem mudar, por exemplo, cargas acidentais não correlacionadas do tipo vento e carga móvel de uma ponte, podem ter intensidades diferentes. Sendo assim, cada par de valores relativos, levaria a uma nova topologia. Esse artigo apresenta uma metodologia para geração de um único modelo topológico que satisfaça as restrições de todos os possíveis casos de carga. Esse problema pode ser formulado como um problema de otimização multiobjetivo cuja obtenção da topologia ótima deve passar pela geração e consideração de uma série de modelos topológicos ótimos diferenciados. Denominou-se a esse modelo final de envoltória topológica.

## 4 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

O projeto ótimo de aplicado a problemas reais muitas vezes envolve várias metas, na forma de funções objetivo, a serem aprimoradas e várias restrições a serem satisfeitas. No entanto, os algoritmos usualmente utilizados na literatura sobre otimização são capazes de resolver apenas problemas que possuam somente uma função objetivo. Problemas de otimização que resolvem simultaneamente várias funções objetivo são denominada como problemas de otimização multiobjetivo (Arora, 2006).

A estratégia mais usual nos problemas de otimização multiobjetivo é: O conceito de Pareto. No presente trabalho apenas a formulação através do conceito de Pareto será utilizada na obtenção das topologias ótimas.

### 4.1 Definição do problema

Um problema multiobjetivo (POM) pode ser expresso na forma:

$$(3) \quad \min_x F(x) = [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_{nobj}(x)], n_{obj} \geq 2$$

Sujeito as seguintes restrições:

$$(4) \quad h_k(x) = 0 \quad k = 1, \dots, n_e$$

$$(5) \quad x_{lj} \leq x_j \leq x_{ju} \quad j = 1, \dots, npv$$

onde:

- $x \rightarrow$  Vetor das variáveis de projeto;
- $F(x) \rightarrow$  vetor das funções a serem minimizadas
- $h_k(x) \rightarrow$  Função restrição de igualdade;
- $g_i(x) \rightarrow$  Função restrição de desigualdade;
- $ne \rightarrow$  Número de funções de igualdade;
- $ni \rightarrow$  Número de funções de desigualdade;
- $npv \rightarrow$  Número de variáveis de projeto;
- $\mathbb{R}^{npv} \rightarrow$  Espaço das variáveis de projeto;

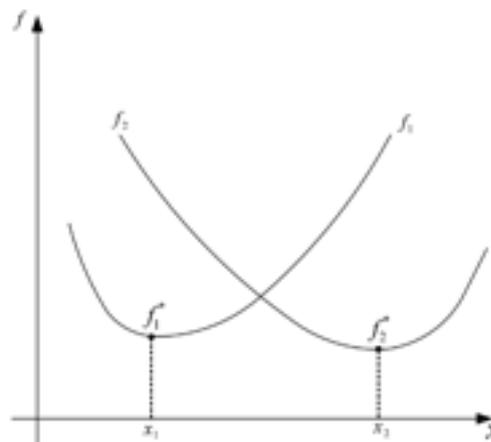
## 4.2 Conceito de ótimo de Pareto

Nos problemas de otimização multiobjetivo encontrar um  $x^*$  que minimize várias funções objetivo simultaneamente é uma tarefa extremamente difícil. Uma forma de determinar uma solução que satisfaça em parte as equações presentes na otimização multiobjetivo está contida na definição de Otimalidade de Pareto segundo Arora (2006).

Pontos de Pareto são pontos  $x^p$  tais que não exista nenhum ponto  $x$  o qual:

- $f_k(x) \leq f_k(x^p)$  para  $k = 1, \dots, n$
- $f_k(x) < f_k(x^p)$  para uma função objetivo a menos.

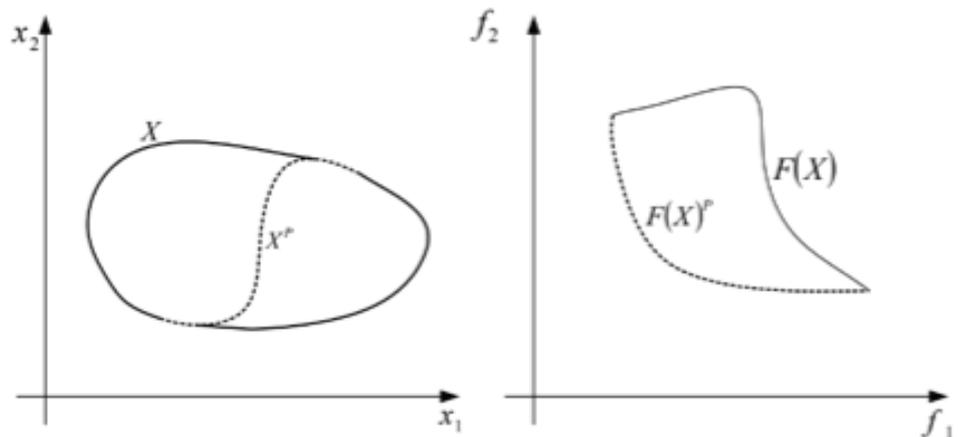
Os pontos de pareto apresentam a propriedade de que quando se movem na direção decrescente de uma das funções, pelo menos uma das outras funções restantes tem seu valor aumentado. Na Figura 2 podemos perceber isso, onde o ponto de ótimo de Pareto é qualquer ponto no intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Também, devido às restrições, pode estar localizado ao longo do contorno da região viável.



**Figura 2**  
Problema de otimização com uma variável e duas funções objetivo.  
Fonte: autor (2011)

Em problemas de otimização multiobjetivo é muito importante formular o problema no espaço das funções objetivo. Isto pode ser feito usando-se um sistema de equações geradas pelas funções objetivo e conjunto das restrições ativas. Para cada projeto viável, haverá correspondentes valores das funções objetivo que definirão o espaço viável das funções objetivo. Sobre o seu contorno se localizam os pontos ótimos de Pareto. Na figura 3, um problema com duas variáveis de projeto e duas funções objetivo é mostrado. Em ambas as figuras, a linha tracejada representa os pontos ótimos de Pareto.

O interesse do projetista em problemas multiobjetivo é encontrar um vetor de variáveis de projeto  $x^*$  tal que as equações (4) e (5) sejam satisfeitas. Normalmente, pode não existir tal  $x^*$  devido ao aspecto de conflito comum entre as funções objetivo. Usando o conceito de Pareto, o projetista tem encontrar tantos pontos quanto possíveis. A partir desses pontos, será escolhido o projeto o qual irá satisfazer, mais adequadamente, cada função objetivo.



**Figura 3**  
Região viável e pontos de Pareto no espaço das variáveis de projeto e no espaço das funções objetivo.  
Fonte: autor (2011)

### 4.3 Métodos de geração de pontos de Pareto

Neste trabalho apenas uma técnica para geração dos pontos de Pareto será aplicada. Essa técnica será desenvolvida diretamente no algoritmo de otimização SIMP que através de uma geração contínua de pontos de projeto ótimos (par de valores relativos) com base combinação linear dos carregamentos. Esse método é conhecido como método dos coeficientes de ponderação (Ibañez 1990).

#### 4.4 Método dos coeficientes de ponderação

No método dos coeficientes de ponderação um vetor  $\lambda$ , relativo aos coeficientes de ponderação, é definido de forma a modificar a função objetivo mediante o produto:

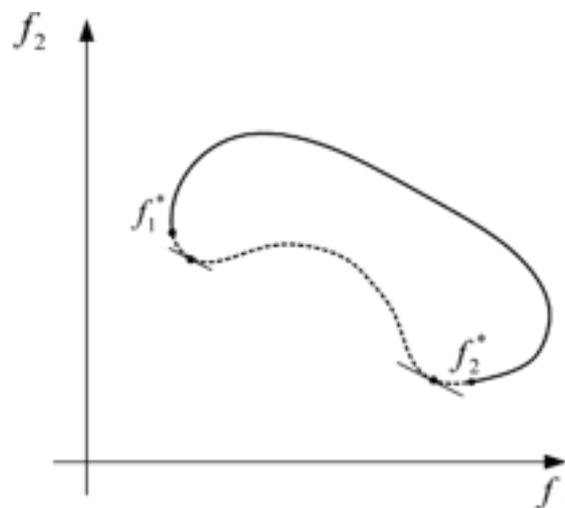
$$(6) \quad F = \alpha^T F = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$$

onde os coeficientes do vetor  $\lambda$  são convenientemente normalizados de forma que cumpram:

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = 1, 0 \leq \alpha_k \leq 1$$

e  $f_{0k}$  é a função objetivo  $k$  no projeto inicial  $x_0$ .

A função  $F$  da Equação (6) é otimizada nesse método. Variando os coeficientes  $\alpha_k$ , uma série de topologias aparecerá correspondente aos mínimos de Pareto. Esse método apresenta inconveniente quando o conjunto é não convexo, sendo esse o caso quando não é possível a obtenção de todos os valores de mínimo mediante a combinação linear da equação (6) conforme mostrado na Figura 3. A escolha dos valores dos coeficientes é muito importante uma vez que é necessário identificar completamente a geometria do conjunto de soluções. Problemas na obtenção dos pontos de Pareto através da utilização do método poderão surgir quando o contorno da região viável no espaço das funções for não-convexo, como mostra a figura 4. Neste caso, não existirá nenhum  $\alpha_k$ , capaz de fornecer uma solução que esteja na parte não-convexa.



**Figura 4**  
Região viável não-convexa  
no espaço das  
funções objetivo.  
Fonte: autor (2011)

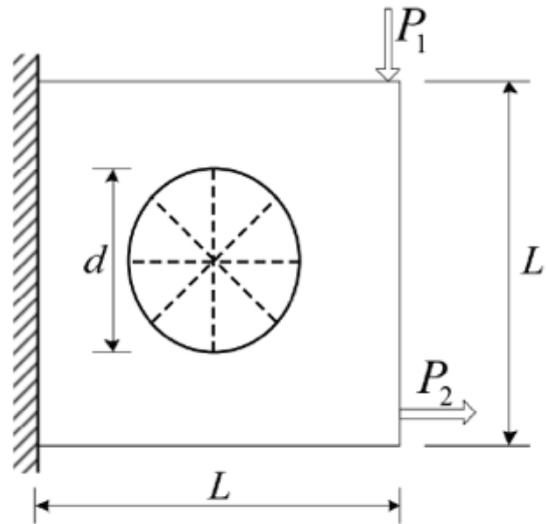
## 5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS E DISCUSSÕES

De modo a exemplificar a metodologia proposta dois exemplos foram escolhidos. São exemplos de estruturas planas com carregamentos aplicados nos nós e condições de apoio pré-definidas. Os carregamentos existentes nos exemplos sofreram uma variação linear nos valores sendo que para cada um dos pares de valores uma solução ótima para topologia foi obtida. Os parâmetros de cada exemplo relativos a refinamento da malha, fração do volume de material, raio de sensibilidade e etc, são descritos a seguir para cada caso específico. Para cada um dos exemplos uma envoltória de topologias é obtida com base nos resultados parciais. O modelo de bielas e tirantes então pode ser concebido levando em consideração todos os casos existentes de carregamentos. Uma vez que uma superfície de pontos do tipo Pareto foi construída, denominou-se a região geometricamente viável, obtida por todos os modelos de topologias considerados de envoltória topológica de Pareto.

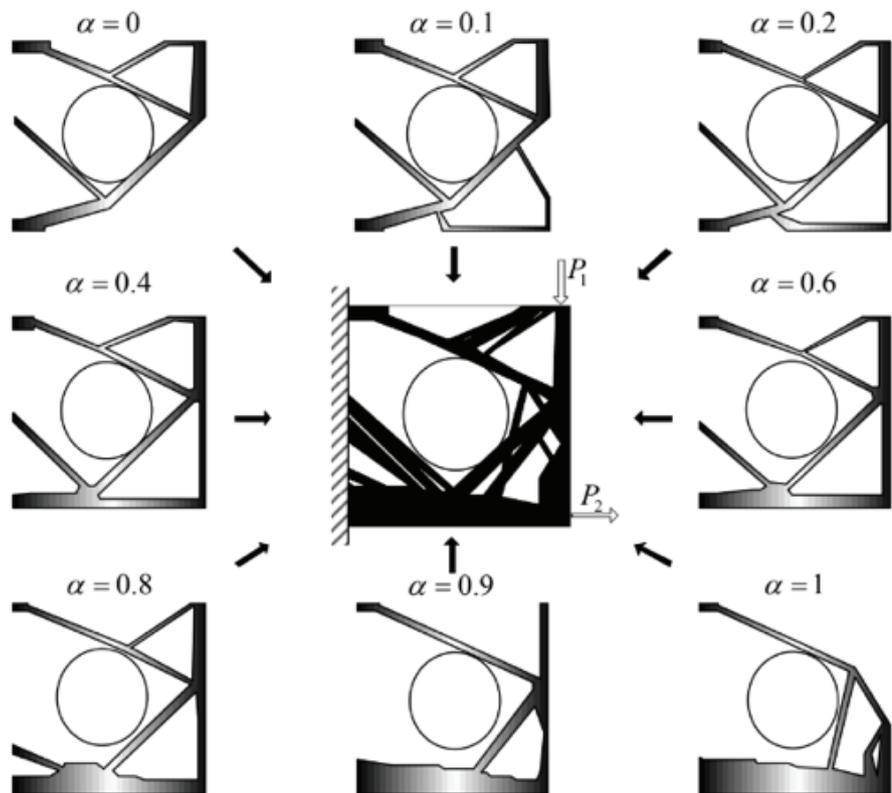
Nos casos apresentados a seguir apenas dois carregamentos diferentes foram considerados. Isso simplifica consideravelmente o problema, pois a necessidade de outros carregamentos levaria a uma geração de pontos de Pareto mais sofisticada. No entanto, a metodologia proposta é bastante geral e pode ser utilizada de modo bastante eficaz na geração de modelo de bielas e tirantes.

### 5.1 Consolo curto com furo no centro

O primeiro exemplo considerado é uma estrutura de consolo curto com um buraco na sua região central e dois carregamentos atuantes P1 e P2. A carga P1 na parte superior do consolo no sentido vertical e a carga P2 na parte inferior no sentido horizontal conforme mostra a Figura 5. Um furo com diâmetro igual a  $L/4$  foi considerado de forma centralizada na estrutura. Um engastamento foi considerado no lado esquerdo do consolo de modo a estabilizar a estrutura ao carregamento aplicado. Uma fração igual a 25% do volume inicial foi adotada conjuntamente com um raio de sensibilidade igual a 2. O parâmetro de penalização  $p$  foi tomado igual a 3. A geometria do consolo foi definida por uma malha com 50x50 elementos. Foram tomados também um módulo de elasticidade do material igual a 2.08 GPa e um coeficiente de Poisson igual a 0.15. Para o processo de otimização dos modelos foram considerados elementos de treliça conforme proposto por Kwak e Noh (2006) e como caso de carregamento a consideração de múltiplos carregamentos atuantes conforme mostrada por Bendsøe e Sigmund (2004).



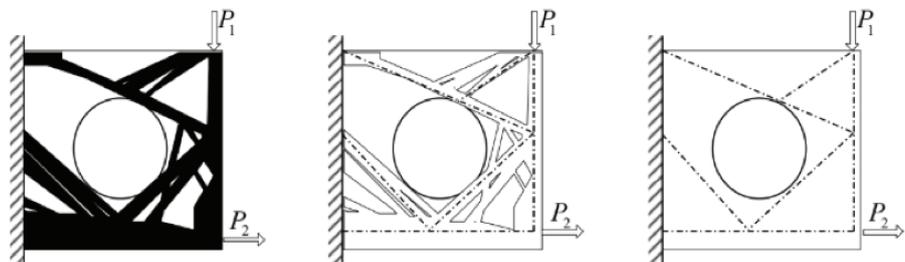
**Figura 5**  
Geometria, cargas e condições de contorno do modelo 1.  
Fonte: autor (2011)



**Figura 6**  
Topologias geradas pelos pontos de Pareto do modelo 1.  
Fonte: autor (2011)

A Figura 6 mostra as topologias obtidas para cada par de carregamentos entre  $P_1$  e  $P_2$  (superfície de Pareto). Cada um dos modelos topológicos obtidos representa um fluxo de forças que transfere o carregamento até o apoio. A influência da intensidade de cada uma das forças pode ser observada na mudança da topologia do modelo. O fator  $a$  representa o coeficiente da combinação linear entre cargas. Ao centro a envoltória topológica de Pareto para a estrutura do consolo é mostrada. Fica claro ser impossível cumprir com um único modelo topológico todas as possíveis combinações de carga.

**Figura 7**  
Envoltória topológica de Pareto e modelo de bielas e tirantes do modelo 1.  
Fonte: autor (2011)



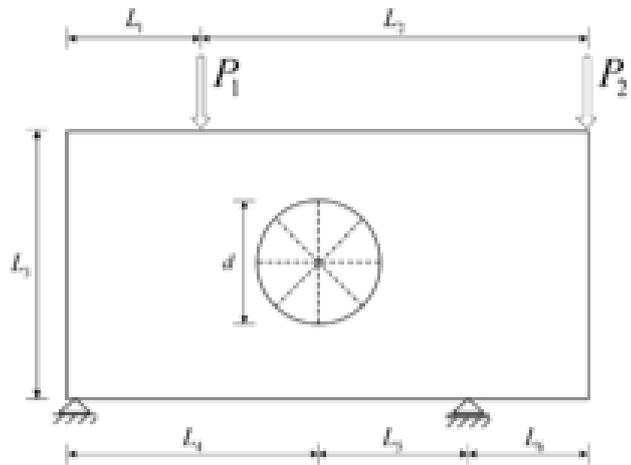
Uma vez obtida a envoltória topológica de Pareto é possível então propor um modelo generalizado que seja capaz de cumprir um encaminhamento ótimo independentemente da combinação de carga entre  $P_1$  e  $P_2$ . Na Figura (7) é possível ver como a concepção do modelo topológico final é feita. A envoltória topológica de Pareto corresponde, na verdade, a uma região viável otimizada.

## 5.2 Viga parede com balanço e com furo no centro

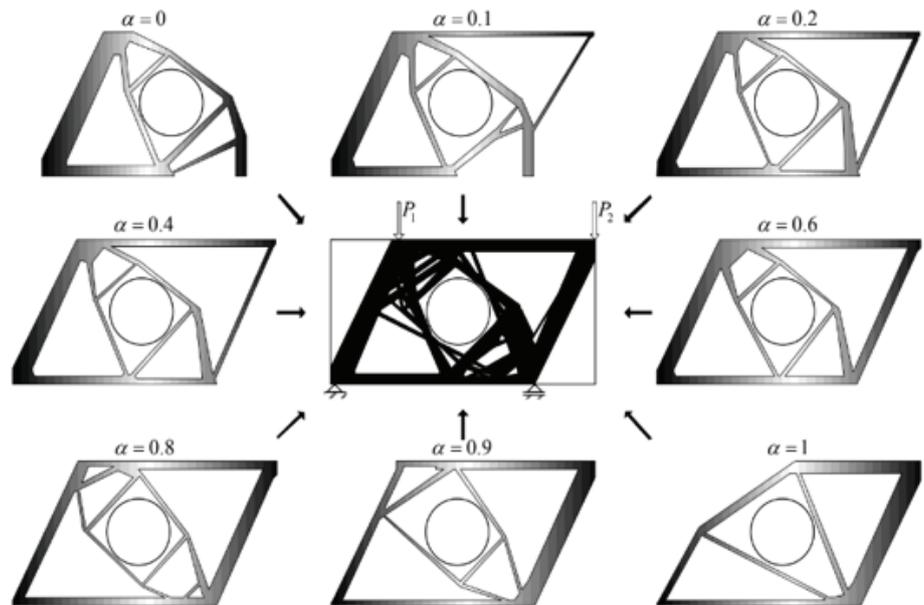
O segundo exemplo corresponde a uma estrutura de viga parede com um balanço e um buraco na sua região central. Dois carregamentos atuantes  $P_1$  e  $P_2$  são aplicados na parte superior da viga conforme mostra a Figura 8. Um furo com diâmetro igual a  $d = L/4$  foi considerado de forma centralizada na estrutura. Um apoio de segundo gênero foi considerado no lado esquerdo da viga parede e um de primeiro gênero no lado direito de modo a estabilizar a estrutura ao carregamento aplicado. Uma fração igual a 25% do volume inicial e um raio de sensibilidade igual a 2 também foram considerados. Foi adotado um parâmetro de penalização  $p$  igual a 3. A malha da viga foi de 100x50 elementos. Similarmente ao exemplo 1, um módulo de elasticidade do material igual a 2.08 GPa e um coeficiente de Poisson igual a 0.15 foram adotados. Elementos de treliça e o caso de carregamentos múltiplos foram utilizados.

As diferenças topológicas apresentadas em cada caso de carregamento podem ser vista na Figura 9. O fluxo de forças fica realmente modificado à medida que a variação relativa entre forças

é modificada. O conjunto de topologias, similarmente ao modelo 1, é utilizado para compor a envoltória topológica de Pareto. Um modelo completo que apresente uma quantidade necessária de barras deve ser posta dentro da região viável da envoltória topológica de Pareto. É possível observar a necessidade de um conjunto de barras internas (Fig. 9) que possam distribuir o encaminhamento de modo razoável até os apoios. Isso não é possível de ser observado sem a consideração da metodologia de otimização multiobjetivo com uso da superfície de Pareto.



**Figura 8**  
:Geometria, cargas e condições de contorno do modelo 2.  
Fonte: autor (2011)

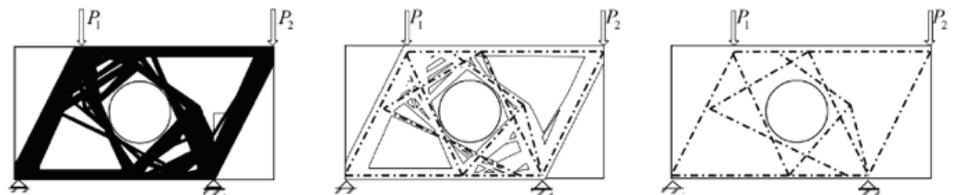


**Figura 9**  
Topologias geradas pelos pontos de Pareto do modelo 2.  
Fonte: autor (2011)

Novamente, obtida a envoltória de Pareto é possível o lançamento da treliça ótima no interior da envoltória. Uma treliça que atenda ao carregamento aplicado é mostrada na Figura 10.

As barras lançadas internamente são responsáveis pelo desvio no fluxo de forças devido à presença do furo no meio da estrutura. Também tirantes tanto na parte inferior como superior serão necessários.

**Figura 10**  
Envoltória topológica de Pareto e modelo de bielas e tirantes do modelo 2.  
Fonte: autor (2011)



## 6 CONCLUSÕES

Uma metodologia para geração automática de modelo de bielas e tirantes utilizando um algoritmo de otimização topológica conjuntamente com técnicas de otimização multiobjetiva é introduzida nesse trabalho. Os exemplos numéricos mostram a aplicabilidade da metodologia na determinação de um modelo de bielas e tirantes ótimo que satisfaça os diversos casos de carregamentos envolvidos no problema. Claramente, o acoplamento dessa metodologia no projeto de estruturas de concreto via modelo de bielas e tirantes mostrou ser uma técnica viável para aplicações em projeto. O presente método se mostrou eficaz e possibilita um tratamento bastante prático e direto na geração automática de topologias do modelo de bielas e tirantes em estruturas de concreto armado.

## 7 REFERÊNCIAS

- ALI, M.A. AND WHITE, R.N.**, *Automatic generation of truss model of optimal design of reinforced concrete structures*, ACI Struct. J., Vol. 98(4), 431-442, 2001.
- ARORA, J.S.** *Optimization of Structural and Mechanical Systems*. World Scientific. 2006. **BENDSØE, M.P. AND KIKUCHI, N.**, *Generating Optimal Topologies in Optimal Design using a Homogenization Method*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 71, 197~224. 1988
- BENDSØE, M. P. AND SIGMUND, O.**, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg., 2004.
- BIONDINI, F. AND BONTEMPI, F. AND MALERBA, P.G.**, *Stress path adapting strut-and-tie models in cracked and uncracked R.C. elements*, Struct. Eng. Mech., Vol. 12(6), 685-698., 2001.
- IBAÑEZ, S. H.** *Metodos de Diseño Optimo de Estructuras. Coleccion Señor*, N. 8, Paraninfo S.A., 1990.
- KWAK, H.G. AND NOH, S.H.**, *Determination of Strut-and-Tie Models using Evolutionary Structural Optimization*, Korean Society of Civil Engineers, Vol. 23(1), 1-11., 2003.
- LIANG, Q.Q., XIE, Y.M. AND STEVEN, G.P.**, *Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure*. ACI J., Vol. 97(2), 322- 330., 2000.
- SCHLAICH, J., SCHAEFER, K. AND JENNEWEIN, M.**, *Toward a consistent design of structural concrete*. PCI J., Vol. 32(3), 75-105, 1987.
- SILVA, R. C. E GIONGO, J. S.** *Modelos de Bielas e Tirantes Aplicados a Estruturas de Concreto Armado*. Livro. Editora EESC-USP. São Carlos/SP. 2000.
- SOUZA, R. A.**, *Concreto Estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades. Tese de doutorado*. USP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia e Fundações. São Paulo/SP. 2004
- XIE, Y.M. AND STEVEN, G.P.** *A simple evolutionary procedure for structural optimization*, Comput. Struct., Vol. 49(5), 885~896. 1993.

# Análise de estabilidade da Torre TV digital de Brasília

**Marco Aurélio Bessa**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo,  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
bessa@bol.com.br  
<http://lattes.cnpq.br/3483982185862072>

**Marcio Augusto Roma Buzar**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo,  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
buzar@unb.br  
<http://lattes.cnpq.br/6339433870219875>

**Lenildo Santos Silva**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo,  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
lenildo\_s@hotmail.com  
<http://lattes.cnpq.br/5440879965299939>

**Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa**

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/5722842765569602>

# Análise de estabilidade da Torre TV digital de Brasília

Marco Aurélio Bessa | Marcio Augusto Roma Buzar | Lenildo Santos Silva | Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa

## Resumo

O projeto da torre digital de Brasília é de autoria do arquiteto Oscar Niemeyer e possui 182 metros de altura. O monumento tem, atualmente, 170 metros de altura, sendo 120m de concreto e 50m de estrutura metálica e mais uma antena de 12 metros no topo da torre. A torre possui ainda duas cúpulas de vidro, uma em cada lateral. Na mais alta, a 80m do chão, vai funcionar um bar-café com vista panorâmica. A outra, com 60m, é uma galeria onde está exposta uma maquete da cidade. A fundação do edifício está a 13,4 metros de profundidade com 240 estacas e 2 mil metros cúbicos de concreto. Nesse trabalho se fez a análise global de estabilidade elástica da torre considerando os efeitos de 2ª. Ordem. Apresentam-se a análise com os resultados obtidos com o SAP2000 e comparam-se os resultados obtidos com as normas de Projeto de Estruturas de Concreto NBR6118 e Projeto de Estruturas de aço NBR8800.

## Palavras-chave

Torre digital, Estabilidade global, Projeto estrutural.

# **Stability analysis of the Brasilia digital TV Tower**

## **Abstract**

*The Brasilia digital tower was designed by the architect Oscar Niemeyer and is 182 meters high. The monument is currently 170 meters high, with 120 meters of concrete and 50 meters of metallic structure, plus a 12-meter antenna on top of the tower. The tower also has two glass domes, one on each side. In the higher one, 80m from the ground, there will be a bar-café with a panoramic view. The other, at 60m, is a gallery where a scale model of the city is on display. The building's foundation is 13.4 meters deep with 240 piles and 2,000 cubic meters of concrete. In this work, a global analysis of the elastic stability of the tower was done considering the second order effects. The analysis is presented with the results obtained via SAP2000 and the results are compared with the standards of Design of Concrete Structures NBR6118 and Design of Steel Structures NBR8800.*

## **Keywords**

*Digital tower, Stability, Projeto estrutural.*

## 1 INTRODUÇÃO

Oscar Niemeyer defende que arquitetura e estrutura devem se desenvolver juntas. Na obra de Niemeyer é evidente a relação direta entre forma e estrutura, sendo sua arquitetura marcada pela importante presença de grandes engenheiros, como Bruno Contarini, Joaquim Cardozo e José Carlos Sussekind que, com participação efetiva desde a concepção de seus projetos, proporcionaram obras marcadas pelo arrojo estrutural e por grandes desafios tecnológicos (Inojosa, 2010).

A Torre de TV Digital do Distrito Federal, objeto de estudo deste trabalho foi inaugurada em 21 de Abril de 2012, sendo uma das mais recentes obras de Oscar Niemeyer e o último construído antes de seu falecimento.

Além da função técnica para a qual foi construída a Torre se destaca como um marco turístico no Distrito Federal, pois não só a sua forma, que lembra uma “flor do cerrado” chama a atenção também, um mirante de 360°, de onde se pode visualizar todo o Plano Piloto e região. Ao seu programa de necessidades foi acrescentado um bar-café com vista panorâmica, previsto para ser instalado na mais alta cúpula de vidro, a 80m do chão e uma galeria, na cúpula mais baixa, a 60 metros do chão.



**Figura 1**  
Torre de TV Digital  
do Distrito Federal  
– foto: Leonardo Inojosa

O projeto estrutural da Torre de TV Digital foi de responsabilidade do engenheiro José Carlos Sussekind, que como todos os engenheiros que trabalharam com Oscar Niemeyer foi responsável por soluções estruturais inéditas e criativas para possibilitar a realização da inventividade formal da arquitetura de Niemeyer (Inojosa et al, 2011). Sussekind trabalhou ao lado de Niemeyer desde a década de 80 e o acompanhou até seus mais recentes projetos. Estão nessa fase da obra do arquiteto projetos marcantes, que para um profissional comum, cada um deles seria um projeto de uma vida, e que para Niemeyer são desafios de inovação e reinvenção de novas soluções estruturais e novas formas arquitetônicas (Inojosa, 2010).

Os gigantescos trabalhos arquitetônicos de Brasília, por si só bastariam para colocar Niemeyer entre os maiores artistas de todos os tempos, mas, no entanto, representam apenas uma parcela de sua obra imensa, comparável em volume àquela de Picasso (CARDOZO *appud* NIEMEYER, 2004, pag. 399).

A Torre tem aproximadamente 182m de altura, sendo que a estrutura em concreto armado tem 120m de altura e 62m de estrutura tubular metálica da antena. Nas laterais foram projetadas duas cúpulas geodésicas cobertas com vidro, uma situada a aproximadamente 60m e a outra a 80m da base. A fundação do edifício está a 12 metros de profundidade e é composta por 246 estacas tipo raiz. Ao redor da torre está instalado um espelho d'água com uma rampa curva de acesso à torre.

O objetivo desse trabalho é executar uma retro análise da torre digital, por meio de análise qualitativa dos projetos. As análises visam verificar a segurança e desempenho estrutural. Essas verificações devem atender aos estados limites da estrutura: Estado Limite de Serviço e Estado Limite Último. A segurança deve ser aferida também pelo atendimento às normas técnicas brasileiras.

## 2 PROCEDIMENTOS ADOTADOS

### 2.1 Carregamentos

O peso próprio da estrutura é obtido pelo programa SAP2000. As cargas permanentes e sobrecargas adotadas estão de acordo com o projeto de arquitetura.

#### Cargas permanentes.

Piso + revestimento = 150kgf/m<sup>2</sup> e Divisórias = 100 kgf/m<sup>2</sup>

#### Sobrecargas da estrutura.

Galeria de artes e exposição = 500 kgf/m<sup>2</sup>

**Ação do vento.** Os efeitos de vento nas estruturas foram determinados através de aproximações obtidas da NBR6123:1988, já que não foram levantados os coeficientes de forma e arrasto da estrutura. Foram realizadas análises elástica e modal para verificação dos esforços nos elementos e frequências naturais de vibração da estrutura, respectivamente. As análises foram divididas em duas partes:

- Análise das fundações;
- Análise da estrutura de concreto armado.

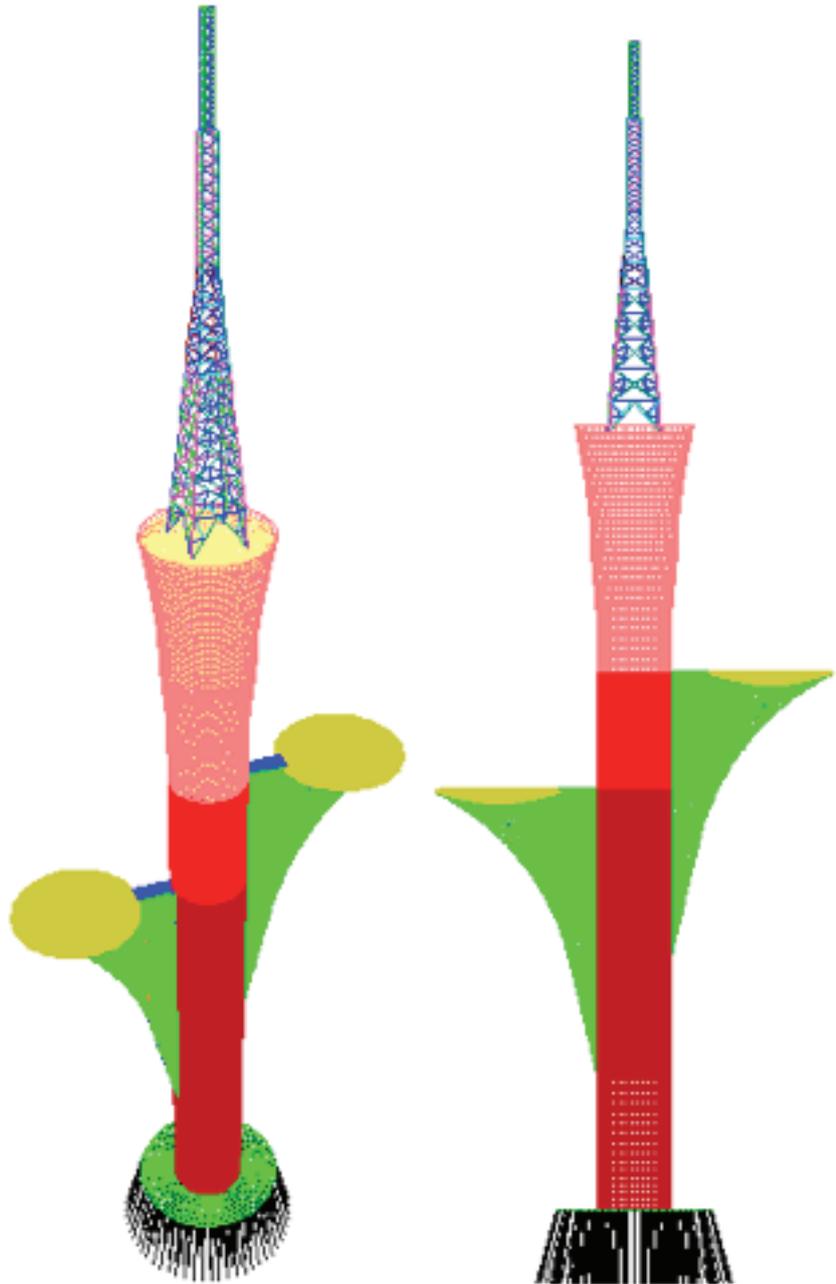
Para esta análise estrutural foi desenvolvido um modelo utilizando o software SAP2000, cuja topologia está apresentada na Fig. 2 e para o qual a estrutura foi subdividida em 2 partes, conforme as Tabelas 1 e 2 a seguir:

**Tabela 1:** Elementos de placas (Shell). Fonte: Autor (2013).

Section	Material	Type	Thickness
			m
ASEC1	CONCRETO	Shell-Thin	0.5
ASEC2	CONCRETO	Shell-Thin	0.4
ASEC3	CONCRETO	Shell-Thin	0.3
braco	CONCRETO	Shell-Thin	0.25
FUNDACAO	CONCRETO	Shell-Thick	4.5
FundoBraco	CONCRETO	Shell-Thin	0.25
LAJE	CONCRETO	Shell-Thin	0.15
NervuraHorizontalBraco	CONCRETO	Shell-Thin	0.15
NervuraVerticalBraco	CONCRETO	Shell-Thin	0.2
Prato	CONCRETO	Shell-Thin	0.25

**Tabela 2:** Elementos de barras (Frame). Fonte: Autor (2013).

SectionName	Material	Shape	t3	t2	tf	tw
			m	m	m	m
Barra	ACO	Pipe	0.323	0.323	0.323	0.0095
BarraTorre101	ACO	Pipe	0.101	0.101	0.101	0.0057
BarraTorre114	ACO	Pipe	0.114	0.114	0.114	0.0088
BarraTorre141	ACO	Pipe	0.141	0.141	0.141	0.0088
BarraTorre168	ACO	Pipe	0.168	0.168	0.168	0.0071
BarraTorre273	ACO	Pipe	0.273	0.273	0.273	0.0093
BarraTorre323	ACO	Pipe	0.323	0.323	0.323	0.0095
BarraTorre355	ACO	Pipe	0.355	0.355	0.355	0.0143
BarraTorre48	ACO	Pipe	0.048	0.048	0.048	0.0037
BarraTorre60	ACO	Pipe	0.0603	0.0603	0.0603	0.0039
BarraTorre73	ACO	Pipe	0.048	0.048	0.048	0.0037
BarraTorre88	ACO	Pipe	0.088	0.088	0.088	0.0055
Estaca	CONCRETO	Circle	0.41	0.41	0.41	0.41
FrenteTorre	ACO	Pipe	0.168	0.168	0.168	0.0071
FrenteTorre101	ACO	Pipe	0.101	0.101	0.101	0.0057
FrenteTorre114	ACO	Pipe	0.114	0.114	0.114	0.0088
FrenteTorre141	ACO	Pipe	0.141	0.141	0.141	0.0088
FrenteTorre168	ACO	Pipe	0.168	0.168	0.168	0.0071
FrenteTorre273	ACO	Pipe	0.273	0.273	0.273	0.0093
FrenteTorre323	ACO	Pipe	0.323	0.323	0.323	0.0095
FrenteTorre355	ACO	Pipe	0.355	0.355	0.355	0.0143
FrenteTorre48	ACO	Pipe	0.048	0.048	0.048	0.0037
FrenteTorre60	ACO	Pipe	0.0603	0.0603	0.0603	0.0039
FrenteTorre73	ACO	Pipe	0.073	0.073	0.073	0.0052
FrenteTorre88	ACO	Pipe	0.088	0.088	0.088	0.0055
FSEC1	ACO	Pipe	0.0603	0.0603	0.0603	0.0039
FSEC2	ACO	Pipe	0.048	0.048	0.048	0.0037
FSEC3	ACO	Pipe	0.141	0.141	0.141	0.0088
FundoTorre	ACO	Pipe	0.168	0.168	0.168	0.0071
FundoTorre101	ACO	Pipe	0.101	0.101	0.101	0.0057
FundoTorre114	ACO	Pipe	0.114	0.114	0.114	0.0088
FundoTorre141	ACO	Pipe	0.141	0.141	0.141	0.0088
FundoTorre168	ACO	Pipe	0.168	0.168	0.168	0.0071
FundoTorre273	ACO	Pipe	0.273	0.273	0.273	0.0093
FundoTorre323	ACO	Pipe	0.323	0.323	0.323	0.0095
FundoTorre355	ACO	Pipe	0.355	0.355	0.355	0.0143
FundoTorre48	ACO	Pipe	0.048	0.048	0.048	0.0037
FundoTorre60	ACO	Pipe	0.0603	0.0603	0.0603	0.0039
FundoTorre73	ACO	Pipe	0.073	0.073	0.073	0.0052
FundoTorre88	ACO	Pipe	0.088	0.088	0.088	0.0055
PERFIL W	ACO	I/Wide Flange	0.352	0.171	0.0098	0.0069



**Figura 2**  
Topologia da  
estrutura analisada.  
Fonte: Autor (2013).

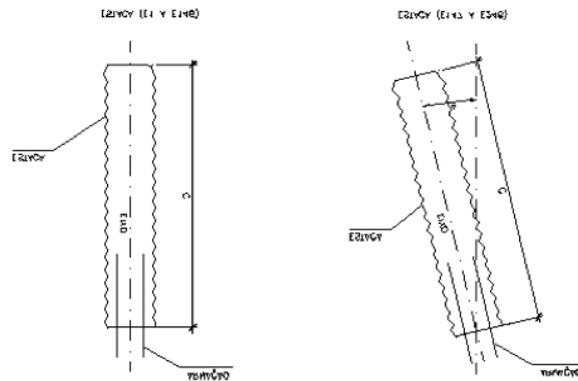
### 3 ANÁLISE DAS FUNDAÇÕES

#### 3.1 Apresentação da fundação

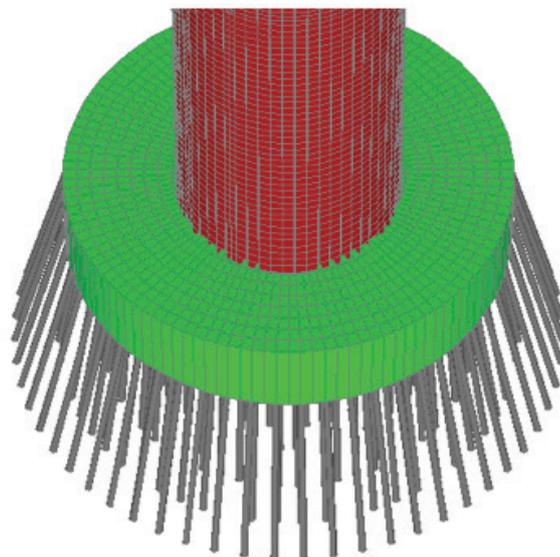
A estrutura da torre está apoiada em um bloco de concreto armado de seção variável com altura variando entre 2,50m a 4,0m. O bloco possui 246 estacas tipo raiz verticais e inclinadas (Fig. 3) com diâmetro nominal de 41 cm. A Tabela 3 mostra o resumo das estacas raiz utilizadas na edificação em questão. A Fig. 4 apresenta a modelagem de elementos finitos utilizados para modelagem das estacas.

**Tabela 3:** Resumo das estacas raiz. Fonte: Autor (2013).

ESTACAS TIPO RAIZ					
Estacas	Diâmetro nominal (cm)	Carga máxima N(KN)	(c) Comprimento o estimado da estaca (m)	Inclinação (A)	Quantidade
E1 a E56	41	1500	12	15°	56
E57 a E104	41	1500	12	10°	48
E105 a E146	41	1500	12	5°	42
E147 a E246	41	1500	12	0°	100



**Figura 3**  
Esquema e parâmetros das estacas.  
Fonte: Autor (2013).



**Figura 4**  
Modelo das estacas – SAP2000.  
Fonte: Autor (2013).

### 3.2 Verificação da Fundação

A capacidade de carga da estaca foi verificada pelo método David-Cabral no qual é considerada a pressão de injeção a ar comprimido ( $p$ ) aplicada no topo da estaca. O atrito lateral para cada trecho do fuste e a resistência de ponta são calculados por meio de coeficientes empíricos conforme a Tabela 4.

**Tabela 4:** Coeficientes Empíricos Fonte: Fundespe (2013).

Tipo de Solo	$\hat{\alpha}_1$ ( $10^{-2} \cdot \text{kgf/cm}^2$ )	$\hat{\alpha}_2$ ( $\text{kgf/cm}^2$ )
Areia	7,0	3,0
Areia siltosa	8,0	2,8
Areia argilosa	8,0	2,3
Silte	5,0	1,8
Silte arenoso	6,0	2,0
Silte argiloso	3,5	1,0
Argila	5,0	1,0
Argila arenosa	5,0	1,5
Argila siltosa	4,0	1,0

Para determinação da capacidade de carga das estacas (verificação geotécnica) utilizou-se os resultados dos ensaios de sondagem fornecidos pela empresa Geoservice Geotecnia e Fundações LTDA.

A Tabela 5 mostra os resultados obtidos para a capacidade de carga da estaca por meio do método David-Cabral.

**Tabela 5:** Capacidade de carga das estacas. Fonte: Autor (2013).

PROF.(m)	Nspt	bo	b1(%)	b2	PI/m (Tf)	PI (Tf)	Pp (Tf)	Pr (Tf)	Padm (Tf)
1	2	0.69	5	1.5	0.9	0.9	2.7	3.6	2.4
2	3	0.69	4	1	1.1	2.0	2.7	4.7	3.1
3	12	0.69	4	1	4.3	6.2	10.9	17.2	11.4
4	21	0.8	8	2.5	17.3	23.5	55.5	79.0	52.7
5	22	0.8	8	2.5	18.1	41.7	58.1	99.8	66.5
6	33	0.8	8	2.5	27.2	68.9	87.1	156.0	104.0
7	33	0.8	8	2.5	27.2	96.1	87.1	183.2	122.1
8	27	0.8	8	2.5	22.3	118.3	71.3	189.6	126.4
9	27	0.8	6	2	16.7	135.0	57.0	192.1	128.0
10	31	0.8	6	2	19.2	154.2	65.5	219.7	146.5
11	31	0.8	6	2	19.2	173.4	65.5	238.8	159.2
12	30	0.8	6	2	18.5	191.9	63.4	255.3	170.2

Utilizando o Programa SAP2000 foi possível obter os valores das reações das estacas do modelo da Fig. 5, além das excentricidades e momentos finais para verificação das estacas a flexão composta.

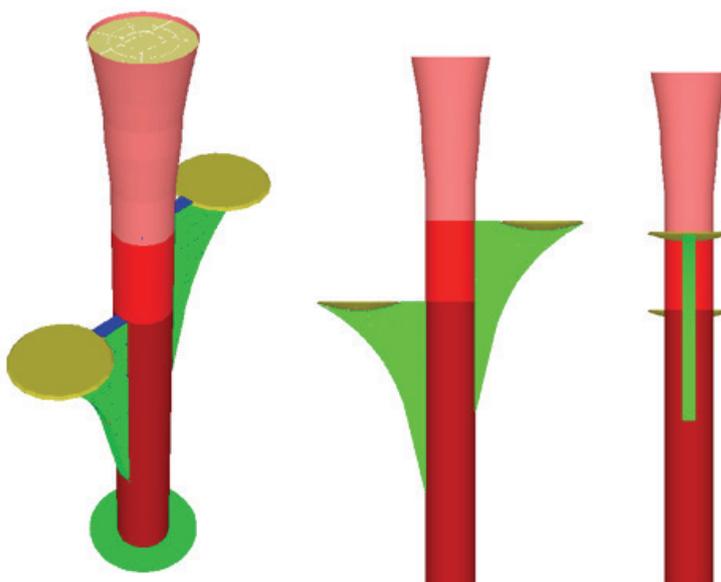
O valor máximo de esforço normal atuante nas estacas, obtido na análise do Programa SAP 2000 é 99 tf e a carga admissível a partir do método de David-Cabral, apresentado na Tabela 5, é 170 tf, ou seja, a carga atuante na estaca mais solicitada é menor que a carga admissível pelo referido método.

Para o dimensionamento estrutural das estacas a flexão composta utilizou-se o método sugerido pelo Professor Lauro Modesto dos Santos que verifica seções circulares tendo como parâmetro de entrada o número de barras de aço, o cobrimento (até o centro da armadura), o  $f_{ck}$ , o  $f_{yk}$  e o módulo de elasticidade do concreto.

## 4 ANÁLISE DA ESTRUTURA DA TORRE

### 4.1 Apresentação da estrutura analisada

A estrutura da torre da TV digital de Brasília foi modelada, conforme apresentado na Fig. 5, utilizando-se uma discretização em elementos finitos com um total de 9646 elementos de placas, 66504 elementos de casca e 1213 elementos de barras, incluindo a torre em concreto e a torre metálica instalada no topo da torre em concreto. A modelagem foi elaborada de modo a corresponder às dimensões obtidas nos projetos.

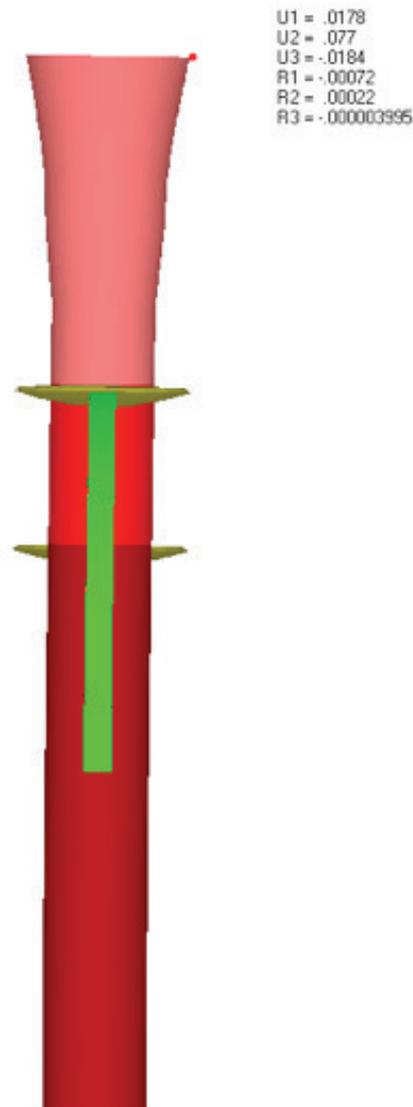


**Figura 5**

Vistas da modelagem em elementos finitos da torre em concreto.  
Fonte: Autor (2013).

## 4.2 Análise estrutural

Foram realizadas análise linear elástica da estrutura e análise de vibrações livres utilizando-se o Software SAP2000. O deslocamento horizontal máximo, na torre em concreto, ocorre no topo da mesma e tem valor igual a 7,7cm (H/1623) e a rotação máxima é igual 0,00072 rad, conforme pode ser observado na Figura 6.4. De acordo com a NBR 6118:2003, Item 13.3, o deslocamento horizontal máximo e a rotação máxima devem atender as seguintes prescrições: H/500, 10 mm e  $\theta$  igual a 0.0017rad. Assim, a torre projetada atende quanto aos deslocamentos máximos da torre em concreto, conforme os valores apresentados na Fig. 6.



**Figura 6**  
Deformada da torre com  
indicação do  
deslocamento no topo.  
Fonte: Autor (2013).

### 4.3 Verificação do dimensionamento

Na verificação do dimensionamento estrutural das paredes procedeu-se o cálculo da seção de aço necessária, para cada espessura de parede em concreto, apresentada nas plantas de formas e o cotejamento das armaduras obtidas no presente trabalho com as armaduras indicadas nas plantas de armação da torre. Tendo em vista o grande número de elementos finitos utilizados na discretização da torre, modificou-se o programa de flexão composta desenvolvido pelo prof. Lenildo Santos a partir do método do prof. Eldon Londe Melo, amplamente testado nos últimos anos, com intuito de automatizar o cálculo das armaduras, por meio da integração dos resultados do Software SAP2000 com os dados necessários ao referido software de cálculo de armaduras.

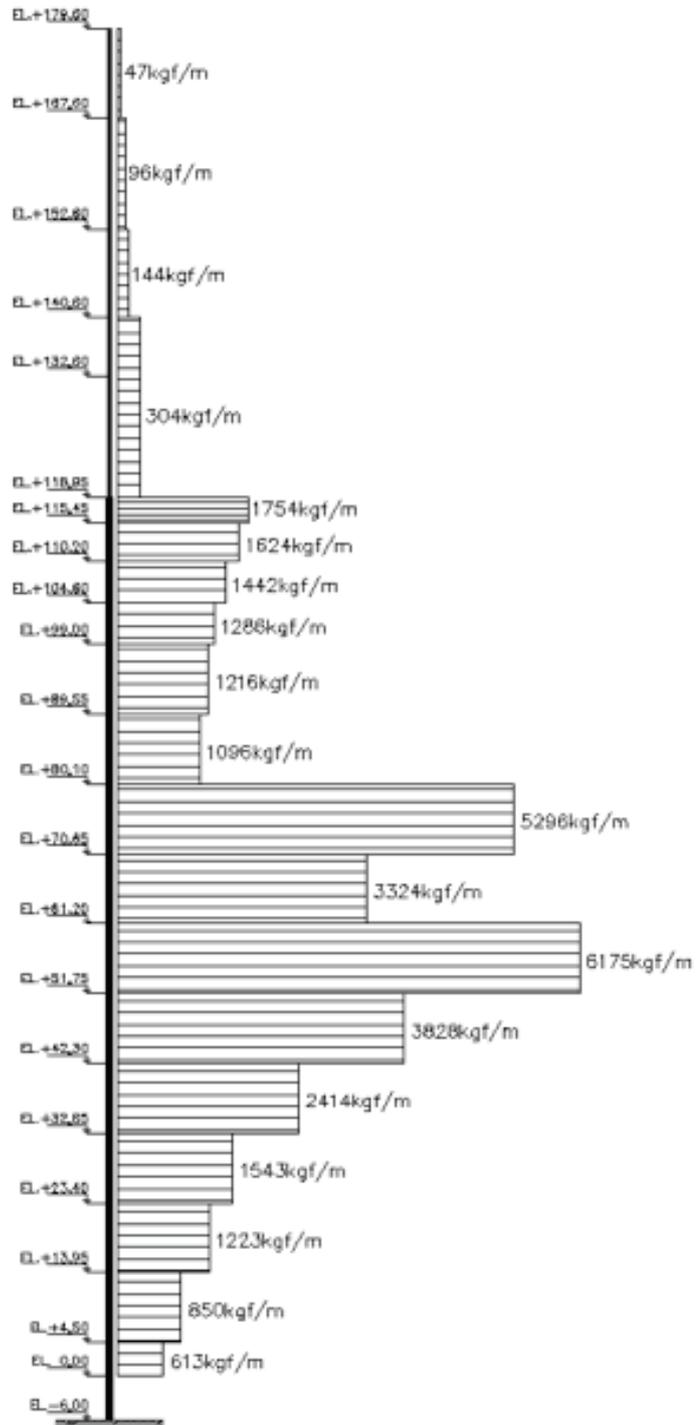
As verificações foram realizadas para todos os esforços dos elementos finitos adotados na discretização.

Foram obtidos os valores dos esforços normais, momentos fletores de cálculo e armaduras nas duas faces para o primeiro trecho do fuste, para o trecho do fuste com espessura de parede igual a 40 cm, além dos valores dos esforços normais de cálculo e momentos fletores de cálculo (nas duas direções – x e y) e armaduras nas duas faces do trecho do fuste com espessura de parede igual a 30 cm, das estruturas do braço (suporte dos pratos), dos pratos (apoio das cúpulas), das nervuras horizontais e verticais dos braços e das paredes de fechamento do “fundo” dos braços.

As áreas de aço de todas as peças relacionadas acima foram confrontadas com as armaduras apresentadas nas pranchas de detalhamento de armadura presente nos projetos de estruturas e as armaduras especificadas no projeto estrutural atende às necessidades de armadura obtidas no presente trabalho.

## 5 ANÁLISE DA TORRE COMO HASTE

Com intuito de verificar e corroborar os resultados fornecidos pela análise de elementos finitos realiza-se a análise estrutural da torre como uma haste engastada na base e submetida à ação de cargas devidas ao vento. A Fig. 7 apresenta a topologia utilizada e as cargas devidas ao vento consideradas na presente análise.

**Figura 7**

Topologia e carregamento na estrutura.

Fonte: Autor (2013).

A Fig. 8 apresenta a deformada da haste e os valores do deslocamento no topo da mesma. Vale ressaltar que o deslocamento no topo da torre pelo método dos elementos finitos foi 7,7cm e na situação presente o deslocamento é 8,35cm, ou seja, uma diferença de apenas 7,7% entre as duas análises.

**Figura 8**  
 Deformada da torre  
 e deslocamento  
 no topo (m, rad).  
 Fonte: Autor (2013).

U1 = -0.025  
 U2 = 0  
 U3 = -0.049  
 R1 = 0  
 R2 = -0.00000  
 R3 = 0

Diagrama de esforço normal (kgf)

-5263126.657

Diagrama de esforço cortante (kgf)

-298673.450001

Diagrama de momento fletor (kgf.m)

-21002931.8185

**Figura 9**  
 Diagrama de esforços  
 e momento fletor.  
 Fonte: Autor (2013).

Considerando os esforços apresentados na Fig. 9 o dimensionamento da seção da torre, utilizando-se o software do prof. Lauro Modesto para seção coroa tem-se:

### **FLEXAO NORMAL COMPOSTA DIMENSIONAMENTO DE SECAO COROA**

Armadura em todo o perímetro

#### **DADOS:**

fck=500.00 gamas=1.40  
fyk=5000.00 gamas=1.15 Es=2100000

#### **CLASSE:**

h= 1250 cm h0= 1150 cm dlinha= 8 cm  
r= 625 cm r0= 575 cm delta0=0.92  
Numero total de barras= 363  
Nd=%7368378.00 Md=%2940410000

#### **RESULTADOS:**

Área total de aço necessária: 0.00 cm<sup>2</sup>  
Área total mínima =282.74 cm<sup>2</sup>  
Braço de alavanca z: não se define

A armadura existente na parede junto à base da torre é igual a:

**Face Externa.** 8Ø25 + 8Ø25 + 150Ø25 + 45Ø20 +45Ø25 +45Ø20  
(Prancha TBRA133R0.dwg); e

**Face Interna.** 7Ø25+ 7Ø25 +45Ø20 +150Ø20 +45Ø25 +45Ø20  
(Prancha TBRA134R0.dwg).

Assim, a área de aço é igual a:

$(8+8+150+45+7+7+45) \text{ Ø } 25 = 270 \text{ Ø } 25 = 1326 \text{ cm}^2$   
 $(45+45+45+150+45) \text{ Ø } 20 = 330 \text{ Ø } 20 = 1040 \text{ cm}^2$

A armadura total nas duas faces é igual a 2366 cm<sup>2</sup>

O perímetro da torre junta à base é igual a 1200 cm x  $\pi$  = 3770 cm, ou seja, 142,4cm<sup>2</sup>/m.

De acordo com a NBR 6123, Item 17.3.5.3.1, a armadura mínima é igual a  $0,15N_d/f_yd \geq 0,004A_c \rightarrow 0,15 \times 5.263.127\text{kgf} \times 1,4 / (5000/1,15) \geq 0,004 \times 3770 \times 50 \rightarrow 254\text{cm}^2 \geq 754\text{cm}^2$ .

Logo, a armadura existente atende aos critérios de dimensionamento da torre como haste.

## 6 ANÁLISE DE VIBRAÇÃO DEVIDO À ATUAÇÃO DA CARGA DE VENTO

Tendo em vista os dados disponíveis oriundos dos ensaios de túnel de vento optou-se por adotar os deslocamentos no topo da torre em concreto proporcionais às forças obtidas no ensaio de túnel de vento. O ponto de partida é a correção dos momentos na base da torre para a velocidade básica do vento de 35m/s. Vale ressaltar que serão adotados os valores de momento para a situação com antenas parabólicas, tendo em vista ser esta a situação mais desfavorável. Assim, tem-se:

$$M(35) = M(40) \times (35/40)^2 \rightarrow M(35) = 144.637 \text{ kN.m} \times (35/40)^2$$

$$M(35) = 110.738 \text{ kN.m} = 11.073.800 \text{ kgf.m}$$

O momento fornecido pela análise estrutural, para as cargas de vento apresentadas em 4.1.3, é igual a 21.002.932 kgf.m, ou seja,  $M(35)/M_a = 0,53$ , logo o deslocamento no topo ( $\delta_t$ ) da torre em concreto corrigido é  $8,35 \times 0,53$ , ou seja,  $\delta_t$  igual a 4,42cm.

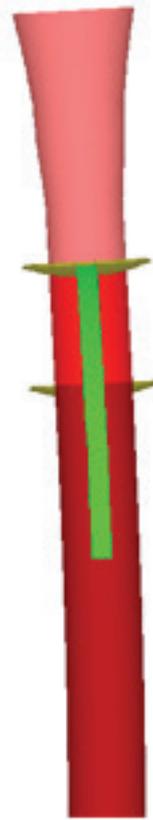
A frequência natural de vibração Hz pode ser obtida pela expressão (Comitê Euro-International du Beton – CEB, Bulletin d'information no 209, Vibration Problems in Structures, Practical Guidelines)  $f = 46/H$ , onde H é a altura da torre. Assim, para o caso presente tem-se  $f = 46/125 = 0,37\text{Hz}$ .

Vale ressaltar que a frequência natural de vibração, obtida pela análise de elementos finitos, a qual está associada ao modo de vibração compatível com a atuação da carga de vento apresentada na Fig. 10 é igual a 0,44Hz, ou seja, diferença de 16% entre os valores recomendados pelo CEB e o valor obtido pela análise de elementos finitos.

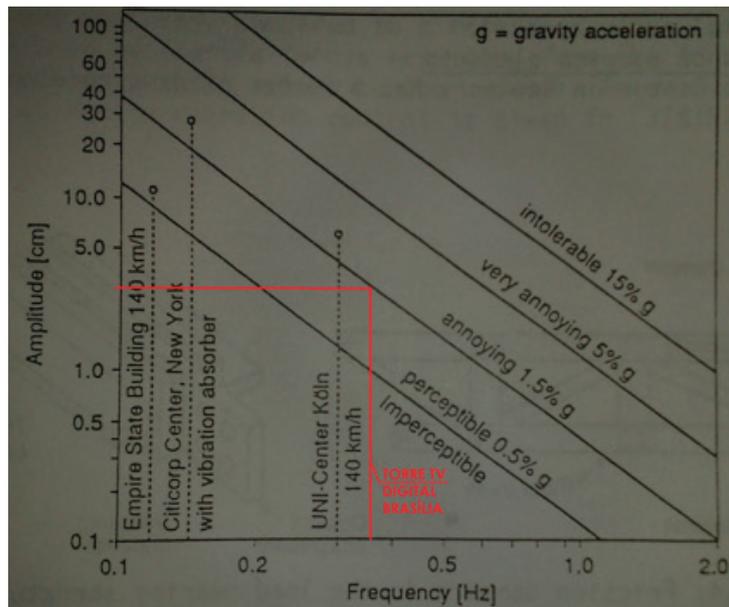
Em torres altas a importância da análise de vibrações induzidas pelo vento é particularmente útil quando o objetivo é avaliar as consequências de tais vibrações nas pessoas que usam a torre, sobretudo pela sensação de insegurança que estas podem gerar. Alguns dos efeitos importantes que podem acontecer nestes casos são a perda de concentração mental, tonturas e náuseas, as quais não comprometem seriamente a saúde das pessoas, mas trazem incomodo no uso da estrutura.

A Fig. 11 apresenta um gráfico adotado pelo CEB que indica o nível de desconforto que a estrutura pode provocar no usuário, a partir do deslocamento no topo devido à ação do vento e da frequência natural de vibração da estrutura. Observa-se na referida figura que para a Torre da TV digital de Brasília e vibração encontra-se no limite considerado apenas perceptível o que não traz desconforto ao usuário. Vale ressaltar que em visita recente à edificação e em relatos de diversas pessoas que já estiveram no topo da torre (mirante) em várias condições de vento não é possível perceber nenhum desconforto.

Ao contrário disto, tem-se a sensação de muita rigidez, mesmo no topo da torre (sobre a laje onde está instalada a torre metálica).



**Figura 10**  
 Modo de vibração associada à frequência fundamental.  
 Fonte: Autor (2013).



**Figura 11**  
 Percepção Humana de vibração em edifícios devida ao vento.  
 Fonte: Autor (2013).

## 7 CONCLUSÃO

De acordo com os resultados apresentados verifica-se que as estacas atendem os critérios de segurança e desempenho para capacidade de carga (dimensionamento geotécnico) e dimensionamento estrutural dos elementos de fundação conforme as normas técnicas pertinentes.

Em relação aos estados limite de serviço foram analisados estado limite de deslocamento, considerando-se deslocamento horizontal e rotação no topo da torre, ambos atendem os limites estabelecidos pela NBR 6118/2003.

A análise de vibração da torre devida ao vento mostra que a torre da TV digital de Brasília está no limite considerado como vibração perceptível, de acordo com as prescrições do Comitê Euro-International du Beton, ou seja, a torre pode ser utilizada sem causar desconforto ao usuário.

O cotejamento da armadura projetada e apresentada nas pranchas de detalhamento com as armaduras calculadas pela presente análise mostra que as armaduras projetadas para a torre de TV digital de Brasília atendem tanto o dimensionamento estrutural quanto as prescrições normativas quanto á armadura mínima.

## 8 REFERÊNCIAS

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** *Projeto de estruturas de concreto.* NBR 6118, Rio de Janeiro, 2003.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios.* NBR 8800, Rio de Janeiro, 2003.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** *Forças devido ao vento em edificações.* NBR 6123, Rio de Janeiro, 1988.

**INOJOSA, L. S. P., BUZAR, M. A. R, DE GREGORIO M.H. R.** *Aspectos do Projeto Estrutural do Museu Nacional de Brasília.* Anais do XXXIII Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia (XXXIII CILAMCE), Ouro Preto, 2011.

**INOJOSA, LEONARDO DA SILVEIRA PIRILLO.** *O Sistema Estrutural na Obra de Oscar Niemeyer.* Dissertação (Mestrado), Universidade de Brasília, 2010.

**NIEMEYER, OSCAR.** *OSCAR NIEMEYER - Minha Arquitetura – 1937-2004.* Editora Revan, Rio de Janeiro, 2004.

# Análise do projeto estrutural do edifício do restaurante junto ao prédio administrativo do superior tribunal de justiça - STJ

## **Marcio Augusto Roma Buzar**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo,  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
buzar@unb.br  
<http://lattes.cnpq.br/6339433870219875>

## **José H. M. de Paula**

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
jhmpdepaula@gmail.com  
<http://lattes.cnpq.br/9409193738565061>

## **Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa**

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/5722842765569602>  
[leonardo@inojosa.com.br](mailto:leonardo@inojosa.com.br)

## **Marcos H. R. de Gregorio**

Faculdade de Arquitetura e Urbanismo  
Centro Universitário de Brasília, UniCEUB  
Brasília - DF, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/9134422287947059>  
[marcosritter@gmail.com](mailto:marcosritter@gmail.com)

# Análise do projeto estrutural do edifício do restaurante junto ao prédio administrativo do superior tribunal de justiça - STJ

Marcio Augusto Roma Buzar | José H. M. de Paula |  
Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa | Marcos H. R. de Gregorio

## Resumo

O Sistema estrutural é definido por uma estrutura mista na cobertura, e pilares tubulares metálicos, por demanda de arquitetura o edifício foi locado em cima de uma garagem já existente o que levou a realização de diversos tipos de reforço estrutural, como, por exemplo, o aumento de seção de concreto de vigas e pilares e a utilização da fibra de carbono nas vigas principais. Diversas análises foram feitas levando-se em consideração os problemas de instabilidade global que geralmente não são considerados na análise estática linear, e que normalmente não realizada pelos escritórios de projeto de engenharia civil. Sabe-se também que a utilização de materiais cada vez mais resistentes tem conduzido a estruturas muito esbeltas, mas nem sempre seguras. Assim, mesmo para estruturas com vãos médios e pequenos, para garantia da segurança e desempenho, há necessidade da elaboração de uma análise não linear, para se avaliar de forma mais exata os deslocamentos da estrutura. Além disso, é fundamental a análise da estabilidade global da estrutura, com um modelo matemático consistente, para que se garanta a segurança da mesma. A análise numérica foi realizada no SAP2000 tanto para a verificação da estabilidade global como para a resistência da estrutura.

## Palavras-chave

Estrutura mista, Estabilidade, Reforço estrutural

# ***Analysis of the structural design of the restaurant building next to the administrative building of the superior tribunal de justiça- STJ***

## **Abstract**

*The structural system is defined by a mixed structure in the roof and metallic tubular columns. By architectural demand, the building was located on top of an existing garage, which led to the realization of several types of structural reinforcement, such as, for example, the increase of the concrete section of beams and columns and the use of carbon fiber in the main beams. Several analyses were made, taking into consideration the global instability problems, which are not usually considered in static linear analysis and which are not usually performed by civil engineering design offices. It is also known that the use of increasingly resistant materials has led to very slender structures, but they are not always safe. Thus, even for structures with medium and small spans, in order to ensure safety and performance, there is a need for the preparation of a non-linear analysis in order to more accurately evaluate the displacements of the structure. Besides, it is fundamental to the analysis of the global stability of the structure, with a consistent mathematical model, to guarantee the safety of the structure. The numerical analysis was done in SAP2000 to check both the structure's strength and its global stability.*

## **Keywords**

*Hybrid structure, Global stability, Structural strengthening*

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento do sistema estrutural vinculado o desenvolvimento do projeto bem como a construção do mesmo, tem servido constantemente como objeto de pesquisa no programa de Pós-graduação em arquitetura e Urbanismo da FAU na Universidade de Brasília, neste caso, a edificação estudada serve como restaurante do STJ de autoria do arquiteto Oscar Niemeyer e possui 1100m<sup>2</sup>, com vão livre de 15,00m, e pé direito de 4,55m.

As obras arquitetônicas de Oscar Niemeyer se destacam pelo arrojo das formas e a plasticidade escultural, esse arrojo não fica restrito à criatividade das formas e nos desenhos de suas curvas. A arquitetura de Niemeyer significou grande avanço tecnológico estrutural (Inojosa, 2010).

Para a análise e verificação de concreto armado considerou-se a NBR6118/2003, e para a verificação de estrutura de aço empregou-se a NBR 8880/2007, já para a verificação de estabilidade global adotou-se a British Standards BS5950/2000 (Steelwork design) que também trata de projeto de estrutura metálica, onde considera-se o critério de Rankine-Marchant como critério para a análise de instabilidade elástica.

O prédio foi acrescentado ao conjunto já existente do STJ, também projetado por Niemeyer e foi assentado sobre uma garagem existente que recebeu cargas concentradas da ordem de 110Tf nas vigas principais, o que levou naturalmente a elaboração de reforço estrutural com aumento da seção de concreto e colocação de fibra de carbono. O prédio foi finalizado no ano de 2009/2010. Atualmente parte da estrutura reforçada é monitorada para acompanhar o desempenho estrutural.

## 2 CONTEXTO ARQUITETÔNICO

O STJ – Superior Tribunal de Justiça – é a última instância da justiça brasileira para as causas não relacionadas diretamente à Constituição. A instituição foi criada pela Constituição de 1988 e aprecia causas oriundas de todo o território nacional. Anteriormente, semelhante função era executada pelo extinto TRF – Tribunal Federal de Recursos.

Em 7 de abril de 1989, o tribunal passou a funcionar ocupando os edifícios pertencentes ao TRF (somatório das áreas de cerca de 25.000m<sup>2</sup>) (Braz, 2003), cuja estrutura não era compatível com a grandeza da instituição e não seria capaz de dar suporte ao vertiginoso crescimento do número de processos. Em agosto de 1989, o arquiteto Oscar Niemeyer atendeu ao convite da cúpula do STJ e apresentou o estudo preliminar do projeto.

A área total construída inicialmente era de 133.569,60m<sup>2</sup>, e como toda grande obra de Oscar Niemeyer, o projeto do STJ impressiona pela monumentalidade estrutural e pela expressividade plástica (Fig. 1). Com a demanda projetar um novo anexo, com a função de abrigar um restaurante para os servidores do tribunal, o arquiteto teve a preocupação de manter a harmonia arquitetônica do conjunto, inclusive na escolha do local de implantação do novo edifício. (Fig. 2 e Fig. 3).

**Figura 1**

Vista aérea do conjunto, antes da implantação do restaurante.

Fonte: Coordenadoria de Engenharia do STJ.



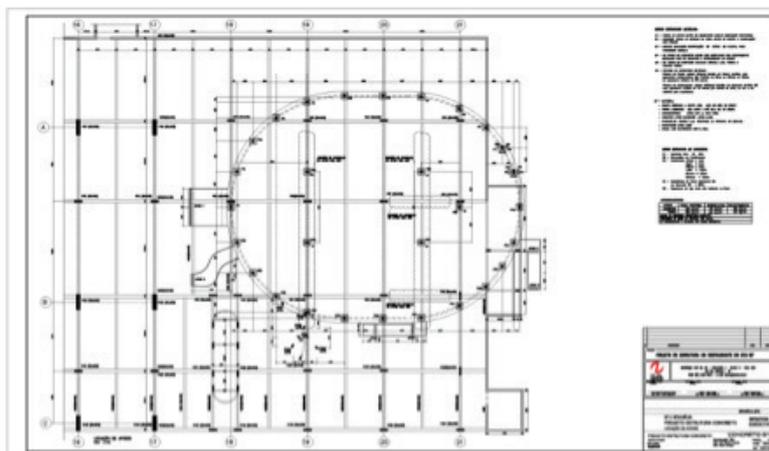
**Figura 2**

Croqui do arquiteto para o conjunto do Superior Tribunal de Justiça, indicação do local de implantação do anexo para o restaurante.

Fonte: adaptado de Arquitetura Oscar Niemeyer.



**Figura 3**  
Locação do restaurante  
sobre estrutura existente.  
Fonte: projeto estrutural  
Dual Engenharia.



Os blocos que formam o conjunto são:

### **2.1 Bloco da Administração**

Edifício de três andares, pilotis e subsolo que abriga toda a estrutura administrativa do STJ, possui 170m de comprimento e 40m de largura e é composto de 17 pórticos com três pilares de 2,00 x 0,50m e 16,50m de altura e uma viga superior protendida com 44m de comprimento por 0,50 x 2,80m de seção (Braz, 2003).

### **2.2 Blocos dos Ministros I e II**

Edifícios que apresentam arquitetura mais convencional e medem 135 x 16,50m, possuem nove pavimentos sobre pilotis. Nesses blocos estão instalados os gabinetes de Ministros, a Presidência, um pequeno auditório, salão de exposição, salas de aula, etc.

### **2.3 Bloco dos Plenários:**

Prédio que abriga as 10 salas de julgamentos, três salas de Seções, seis de Turmas, uma de audiências, uma de advogados e uma do Ministério Público, além da Secretária Judiciária (Brasil, 1995). A estrutura é de concreto armado e possui vãos da ordem de 60m tendo sido executado totalmente apoiado em seus 11 pilares externos em forma de tronco de pirâmide e em 3 pilares embutidos nas caixas de elevadores e poços internos (Braz, 2003).

## 2.4 Bloco do Tribunal Pleno:

Este bloco destina-se às sessões plenárias do STJ. A área total é de 5.853,15m<sup>2</sup>, com um auditório tem 420 lugares. A volumetria do bloco é de forma trapezoidal, atingindo vãos livres de cerca de 50m, apoiados sobre paredes laterais de concreto. A altura máxima é de 22m. Uma abertura circular para iluminação confere peculiaridade à arquitetura do prédio.

## 2.5 Bloco do Auditório:

Com capacidade para 410 pessoas, é dotado de salas de projeção, som e tradução. A área total é de 1.086,27 m<sup>2</sup>. (Brasil, 1995). A volumetria segue a linguagem trapezoidal do Bloco do Tribunal Pleno, porém em menor magnitude. Os vãos são da ordem de 30m e a altura máxima é de 14m.

## 3 CONSIDERAÇÕES GERAIS

No presente trabalho serão mostrados os estudos para viabilização do reforço estrutural necessário para a implantação do edifício do restaurante sobre a estrutura existente da garagem do bloco administrativo do Superior Tribunal de Justiça conforme Fig. 4. Para esses estudos foram usados os seguintes dados, extraídos dos projetos originais do edifício:



**Figura 4**  
Restaurante do STJ –  
Brasília DF.  
Fonte: Autor, 2014

### 3.1 Características Técnicas

**Modelo Estrutural:** elementos finitos de barras de pórtico espacial associados a elementos de placa de quatro nós, com dimensões, comprimento: 57,50m, largura: 50,92m e pé-direito livre: 4,40m.

**Aparelho de apoio:** o modelo da ligação dos pilares com os blocos/tubulão permite a rotação ( $R_x=R_y=R_z=0$ ), além da consideração interação com as vigas baldrames (cintas);

**Propriedades Geométricas dos elementos:** As características geométricas dos elementos de barras e placa estão de acordo com os desenhos fornecidos pelo STJ, e foram transcritos para o modelo numérico analisado no SAP2000.

**Elementos de Fechamento Lateral no Subsolo:** As contenções nas bordas do subsolo (cortinas) são de concreto armado, conforme desenhos de projeto fornecidos pelo STJ;

**Tipos de Lajes:** As lajes do teto do subsolo são maciças e de concreto armado, apoiadas em sistemas ortogonais de vigas de concreto;

**Distância Longitudinal entre Pilares:** 500,0cm

**Distância Transversal entre Pilares:** 912,5 / 1327,5 / 972,5 e 1172,5cm

**Espessuras da Laje de Teto do Piso:** 15cm

**Laje de piso do Restaurante:** Em concreto armado, apoiadas em alvenaria de tijolos estruturais, ou em vigas de concreto armado (consideradas como base elástica);

**Estrutura de Cobertura do Restaurante:** Em perfis de abas paralelas, laminadas a quente, ou soldados;

**Lajes de cobertura:** Em concreto armado ( $h=10$ cm) apoiadas em estrutura metálica, fabricada em perfis de abas paralelas laminados, ou soldados (caimento 1%)

**Impermeabilização da Laje de Cobertura:** regularização (2,5cm), manta asfáltica (3,0mm) e proteção mecânica

**Forro no Teto do Restaurante:** em gesso ( $t=12,0$ cm);

**Pilares da Estrutura do Restaurante:** em aço, perfis circulares formados a frio, ou laminados a quente.

### 3.2 Normas

**Estrutura de Concreto Armado:** Na verificação e dimensionamento dos elementos de concreto armado foram obedecidas as prescrições estabelecidas pela NBR-6118/2003.

**Projeto de Estruturas de Concreto armado e Protendido:** O ACI - / 2005 – American Concrete Institute foi tomado como referência.

**Instabilidade Global:** Na análise da instabilidade global foram consideradas as prescrições estabelecidas pela BS – 5950/2000 – Structural Use of Steelwork in Bulding of British Standards Institution e do Eurocode – 03;

**Estruturas de Aço:** Para verificação e dimensionamento dos perfis de chapa dobrada a frio, foram obedecidas as prescrições estabelecidas pelo AISI/99 – LRFD – American Iron and Steel Institute. Para os perfis laminados e soldados, foram obedecidas as prescrições estabelecidas pela NBR-8800/86 – Projeto de Estruturas de Aço de Edifícios.

**Ação do Vento:** na consideração das forças devidas à ação estática do vento, foram obedecidas as prescrições estabelecidas pela NBR – 6123 – Forças Devidas ao Vento em Edificações.

**Ações e Cargas:** para a estimativa de ações e cargas serão obedecidas as prescrições estabelecidas pela NBR-6120 – Cargas para Cálculo de Estruturas de Edificações.

### 3.3 Materiais

**Concreto Armado Existente:**  $F_{ck}$ : 240 kgf/cm<sup>2</sup> (24 Mpa)

**Aço para concreto:** Aço CA50  $F_{yk}$  = 5000kgf/cm<sup>2</sup> (500 Mpa)

Aço Ca60  $F_{yk}$  = 6000kgf/cm<sup>2</sup> (600Mpa)

$E_c$  = 0,85x5600√24 ... 233.000kgf/cm<sup>2</sup> (NBR-6118/03)

**Aço para a Estrutura Metálica:** Perfis de chapa dobrada a frio USI-SAC-350 e Perfis Laminado ASTM-A-572-GR50

Atendendo as seguintes características mecânicas mínimas:

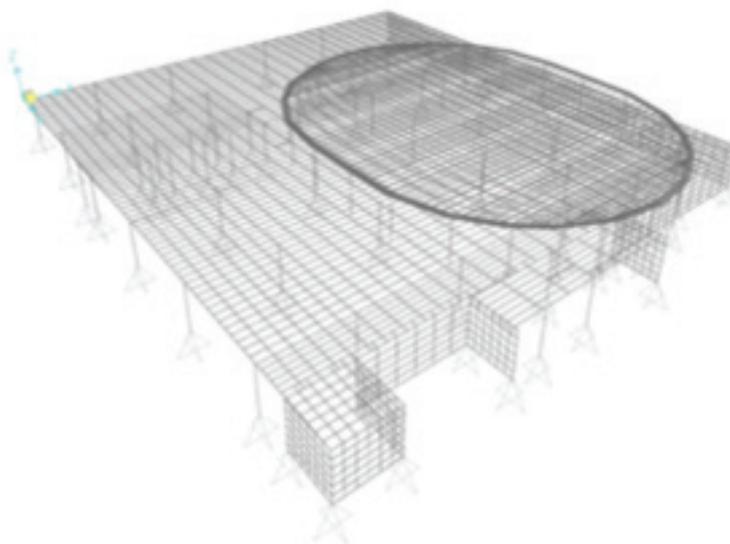
$F_y \geq 3500$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $F_u \geq 4500$  kgf/cm<sup>2</sup>;  $\epsilon_u \geq 10$

Ligações Soldadas e Parafusadas: Eletrodos: AWS-E70xx-G

**Parafusos:** ASTM-A-325

### 3.4 Topologia

A Topologia da estrutura de concreto e estrutura metálica do restaurante é formada por elementos de pórtico espacial acoplados com elementos de placas de 4 nós, conforme Fig. 5.



**Figura 5**

Topologia da estrutura de concreto e estrutura metálica do restaurante. SAP2000 v14, adaptado de Análise da Segurança e Desempenho (Volume I).

### 3.5 Ações

Ação Permanente D:

Lajes do Piso (teto subsolo)  $D_p=873 \text{ kgf/m}^2$

– Lajes de Cobertura  $D_c=480 \text{ kgf/m}^2$

Ação decorrente do Uso – L:

A sobrecarga decorrente do uso do restaurante (L) é de natureza diferente da sobrecarga na cobertura ( $L_r$ ) necessária para manutenção. Portanto, a probabilidade de ocorrência de cada uma delas, também é diferente. Contudo, em estruturas de concreto, como o peso próprio é significativo em comparação com a sobrecarga, ambas as cargas foram consideradas pelos calculistas de mesma natureza.

– Piso (Terreo)  $L=300 \text{ kgf/m}^2$

– Cobertura  $L_r=L=100 \text{ kgf/m}^2$

Vento na Coberturaa – W:  $W_p=40 \text{ kgf/m}^2$

Combinação de Ações:

Para D = Ação Permanente

L = Ação decorrente do uso

$W_p$  = Vento de pressão na cobertura. Assim,

– Estado Limite Último (Resistência)

1)  $1,4D + 1,5L + 0,8Wp$

2)  $1,4D + 1,3Wp + 0,5L$

– Estado Limite de Utilização (Instabilidade)

1)  $D + L + 0,3 Wp$

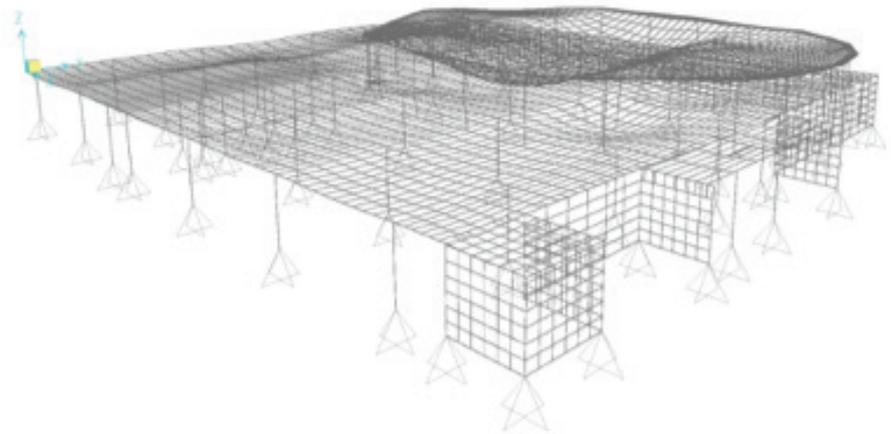
2)  $D + Wp + 0,3L$

3)  $D + L$

## 4 ANÁLISE ESTRUTURAL

### 4.1 Análise Estática Linear e Não Linear

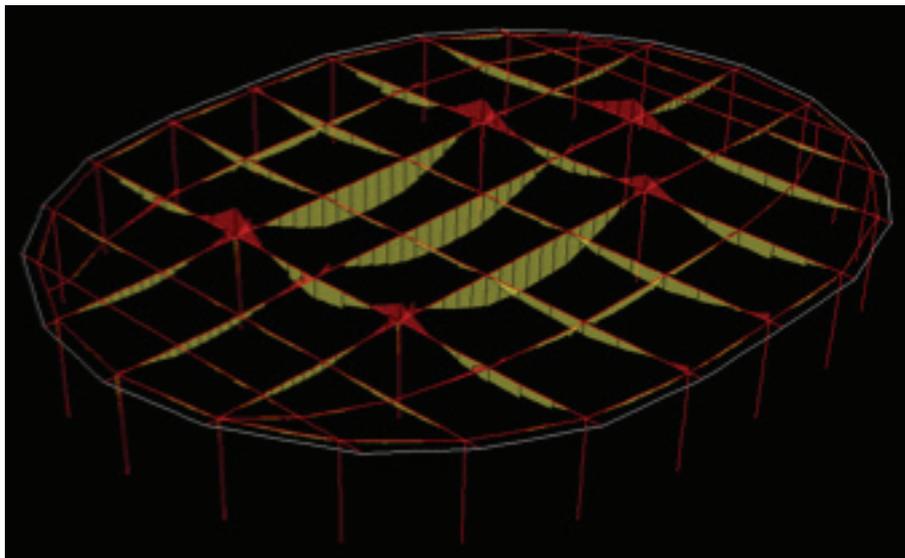
Para o pré-dimensionamento da estrutura foi utilizado um modelo de análise estática linear. Na avaliação dos deslocamentos, reações de apoio e esforços nos elementos (pilares, vigas e lajes) foi utilizado um modelo matemático consistente, implantado no software comercial SAP2000/v10 – Structural Analysis Program. Na Fig. 6, temos um gráfico do deslocamento da estrutura.



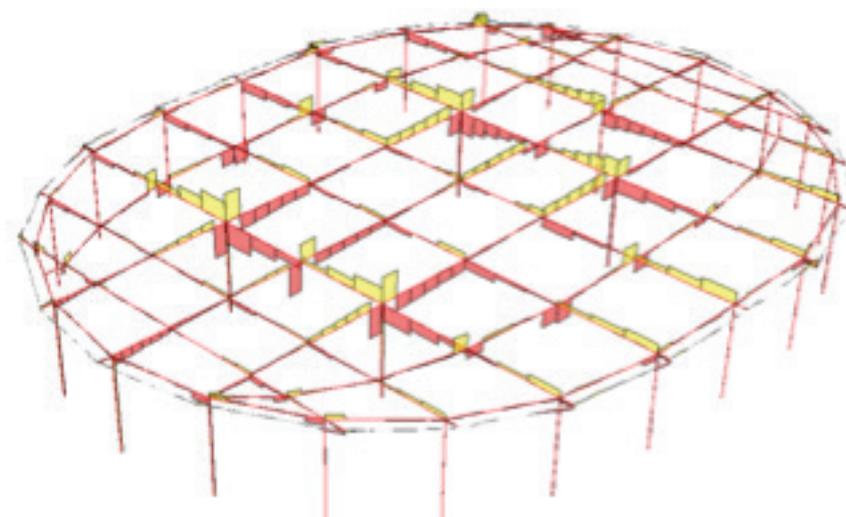
**Figura 6**

Gráfico de Deslocamentos  
(scale factor: 70). SAP2000  
v14, adaptado de Análise da  
Segurança e Desempenho  
(Volume I).

As Fig. 7 e Fig. 8 mostram os gráficos de Momento Fletor e Esforço Cortante, respectivamente, para a estrutura da cobertura do restaurante. Sendo adotado perfil W610x101 para os vãos maiores e a estrutura foi calculada como mista, na direção dos maiores vãos de vigas e considerou-se viga contínua na direção transversal. As vigas do restaurant foram rotuladas no topo dos pilares. O momento máximo na viga central é de 88 Tf.m.

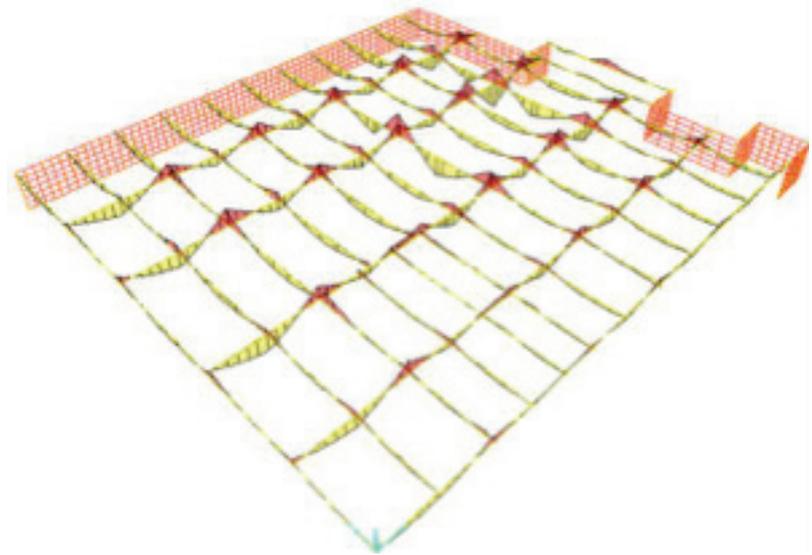


**Figura 7**  
Diagrama de Momento Fletor das vigas da cobertura. Adaptado de Análise da Segurança e Desempenho (Volume I).

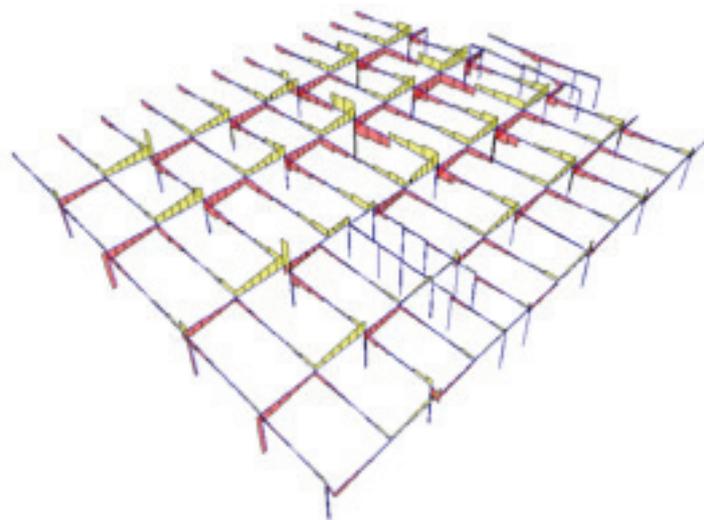


**Figura 8**  
Diagrama de Esforços Cortantes das vigas da cobertura. Adaptado de Análise da Segurança e Desempenho (Volume I).

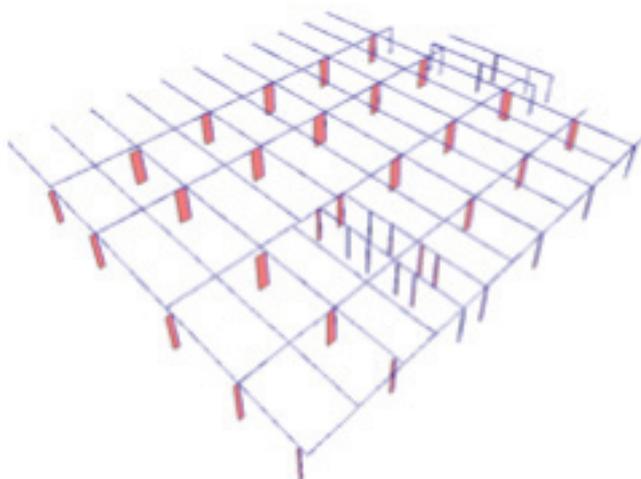
Em seguida as Fig. 9, Fig. 10 e Fig. 11 mostram os gráficos de Momento Fletor, Esforço Cortante nas vigas e Esforço Axial nos pilares, respectivamente, para a estrutura existente da laje do térreo. Os esforços mostrados nas respectivas figuras abaixo decorrem da colocação do restaurante que produziram cargas como reação dos pilares metálicos da ordem de 110Tf. Duas vigas principais foram reforçadas com aumento de seção e colocação de fibra de carbono. Os pilares de concreto existentes foram suficientes para resistir à sobrecarga da estrutura do restaurante.



**Figura 9**  
Diagrama de Momento Fletor das vigas da estrutura existente. Adaptado de Análise da Segurança e Desempenho (Volume I).

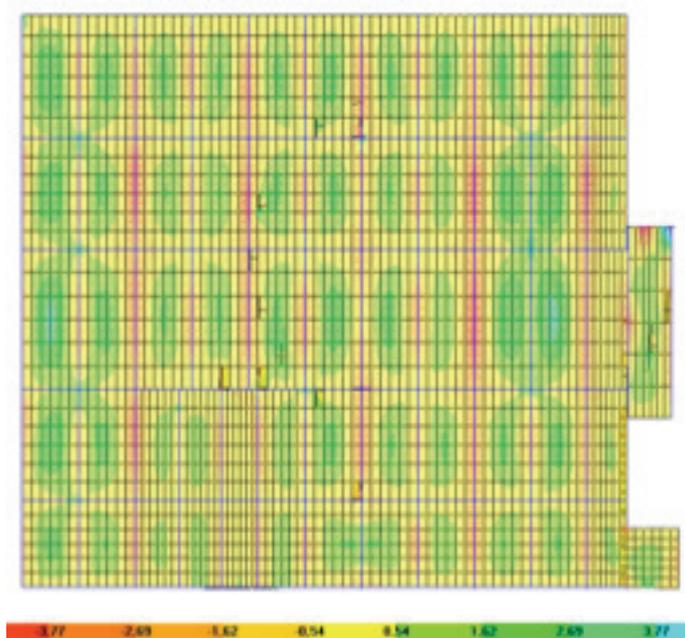


**Figura 10**  
Diagrama de Esforços Cortantes das vigas da estrutura existente. Adaptado de Análise da Segurança e Desempenho (Volume I).

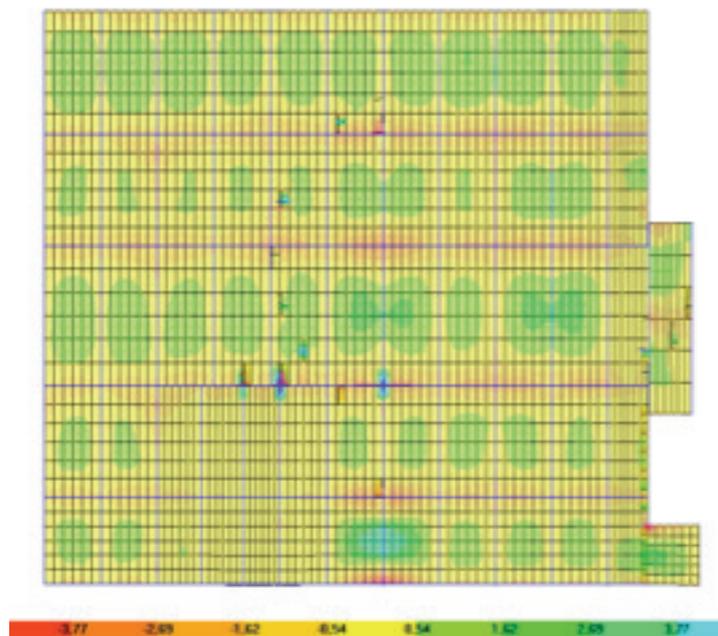


**Figura 11**  
Diagrama de Esforço Axial  
nos pilares da estrutura  
existente. Adaptado de  
Análise da Segurança e  
Desempenho (Volume I).

Abaixo, as Fig. 12 e Fig. 13 mostram os gráficos de Momento Fletor na laje do Térreo (estrutura existente), respectivamente nas direções M11-Mxx e M22-Myy. As lajes foram analisadas com cargas pontuais na sua superfície, sendo que as cargas maiores foram direcionadas para as vigas. O projetista optou em criar sapatas para melhor distribuir as cargas, sobre as lajes existentes. De uma forma geral não houve necessidade de reforçar as lajes que tem momentos fletores médios 3,7 Tf.m.



**Figura 12**  
Diagrama de Momento  
Fletor na laje do Térreo  
(cobertura da garagem), na  
direção M11-Mxx. Adaptado  
de Análise da Segurança e  
Desempenho (Volume I).



**Figura 13**

Diagrama de Momento Fletor na laje do Térreo (cobertura da garagem), na direção M22-Myy. Adaptado de Análise da Segurança e Desempenho (Volume I).

### 3.2 Análise de Instabilidade Global

A análise da instabilidade elástica não é uma prática comum nos escritórios de engenharia de projetos estruturais. Apesar disto, em virtude das características técnicas (ações e geometria) da estrutura em questão, os engenheiros responsáveis pelo cálculo optaram por uma análise da instabilidade elástica da estrutura. Foi utilizado um modelo matemático consistente implantado no software comercial SAP2000/v10 – Structural Analysis Programa – Non Linear.

Em anexo, encontram-se as listagens com os modos de instabilidade, com os correspondentes fatores de instabilidade elástica.

Com essas análises, foi possível verificar que a capacidade de carga das lajes estão compatíveis com a nova destinação.

$$(W_u = 2500 > 873 \text{ Kgf/m}^2); \gamma_f = 2,86 > 1,4$$

Além disso, verificou-se também que as vigas transversais e longitudinais (40x110cm) estão adequadas para a nova utilização (restaurante), necessitando de alterações dimensionais, em tramos isolados, visando garantir dimensões mínimas para a fixação dos aparelhos de apoio dos pilares metálicos a serem construídos;

Os deslocamentos nas vigas de piso (térreo) estão compatíveis com a nova destinação da edificação ( $f = 2,02\text{cm} \approx l / 495$ ) e os deslocamentos nas lajes de piso (térreo) estão compatíveis com a nova destinação da edificação ( $f = 0,79\text{cm} \approx l / 632$ ).

## 5 VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA

### 5.1 Lajes do Teto do Subsolo

A capacidade de carga foi determinada a partir do método de análise limite das lajes de concreto armado conhecido como linhas de ruptura. A carga de ruptura da laje foi estimada a partir de um mecanismo de colapso plástico, compatível com as condições de contorno de cada laje. Os momentos em cada linha de ruptura são os momentos resistentes no estado limite último da seção e a carga de ruptura é determinada usando o princípio dos trabalhos virtuais. Para isso, foram admitidas as seguintes hipóteses, verificadas em cada caso.

- 1) O mecanismo de ruína será de flexão. Portanto, a laje não sofrerá ruína por cisalhamento.
- 2) Os apoios nas bordas das lajes são rígidos
- 3) As lajes armadas nos domínios 2 ou 3 (subarmadas). Portanto, as seções têm capacidade de rotação plástica e, conseqüentemente, redistribuição de esforços.

A lajes analisadas demonstraram a sua grande capacidade de resistir e redistribuir esforços, as cargas pontuais eventuais nas lajes provenientes de apoios de pilares foram somente de pilares com cargas pequenas da ordem de 10Tf, e nesses casos foram colocadas sapatas nos pontos de ligação dos pilares com as lajes.

### 5.2 Análise de Instabilidade Elástica

Para análise de instabilidade elástica foi utilizado o software comercial SAP2000 – Structural Analysis Program, e para comparação empregou-se o fatores de Instabilidade pelo Método Rankine – Marchant, onde considerou-se que  $\lambda=1,4$ , produzindo:

- (1) Se  $\lambda < 6,4$  – estrutura esbelta  
Necessário se fazer análise elastoplástica de 2ª ordem  
Se  $6,4 \leq \lambda \leq 14$  – estrutura medianamente esbelta  
 $\lambda_p \geq 1,26\lambda_{cr}/(\lambda_{cr}-1,4)$
- (2) Se  $\lambda_{cr} > 14$  – estrutura rígida  
 $\lambda_p = \lambda_f = 1,4$

A Tabela 1 a seguir apresenta os fatores críticos de instabilidade elástica para a combinação mais desfavorável.

**Tabela 1:** Fator de Carga de Instabilidade. Fonte: Autor (2014)

Out put case	Step type	Step num	Scale factor
D+L+0,3W	Mode	1,000000	12,163750
D+L+0,3W	Mode	2,000000	12,832999
D+L+0,3W	Mode	3,000000	14,213268
D+L+0,3W	Mode	4,000000	14,584478
D+L+0,3W	Mode	5,000000	14,750051
D+L+0,3W	Mode	6,000000	15,101014

Assim,  $6,4 \leq \lambda_{cr} = 12,16 \leq 14$ . A estrutura pode ser considerada segura quanto a instabilidade.

Os modos de instabilidade são em elementos de pilares de concreto isolados de seção 20x100cm, em torno do eixo de menor inércia (instabilidade local).

Caso estes pilares tivessem seção 40x100cm o primeiro modo de instabilidade seria global (lateral) e  $\lambda_{cr} = 60,11 > 14$ . Logo, a estrutura seria muito mais rígida. Isso, com aumento insignificante no volume total de concreto – aproximadamente  $V_c=21m^3$  (Tabela 2). Esta análise mostra que pilares com dimensões pequenas podem resistir a grandes cargas pela sua área transversal, contudo a instabilidade local pode se somar a instabilidade de toda a construção e tornar a edificação esbelta globalmente.

**Tabela 2:** Fator de Carga de Instabilidade (Pilar aumentado). Fonte: Autor (2014)

Out put case	Step type	Step num	Scale factor
Buck 1	Mode	1,000000	60,107866
Buck 1	Mode	2,000000	65,356180
Buck 1	Mode	3,000000	70,349440
Buck 1	Mode	4,000000	74,109958
Buck 1	Mode	5,000000	78,112435
Buck 1	Mode	6,000000	80,808696

### 5.3 Análise de Frequência Natural da Estrutura de Concreto

As ações dinâmicas podem provocar estados limites últimos por vibração excessiva, ou por fadiga de materiais. A vibração excessiva, além de estar associada a segurança estrutural, pode também causar desconforto aos usuários do edifício.

A análise das vibrações pode ser feita em regime linear no caso de estruturas usuais, como é o caso da estrutura de concreto do subsolo.

Para assegurar o comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, deve-se afastar o máximo possível a frequência natural da estrutura ( $f$ ) da frequência crítica ( $f_{cri}$ ), que depende da destinação da edificação. Assim, segundo EuroCode-1:

$$F > 1,2f_{cri}$$

Ao caminhar, uma pessoa sempre produz forças com componentes vertical e lateral, esta última com magnitude e frequência inferiores às da componente vertical. Estas componentes laterais têm relevância para a estrutura com pequena rigidez lateral (caso de passarelas suspensas ou estaiadas).

Para o caso analisado, a frequência crítica vertical e horizontal é considerada:

$$\begin{aligned} H \sim 25 \text{ kgf} \quad \dots \quad & : 0,8 \text{ Hz} < f_h < 1,1 \text{ Hz} \\ V \sim 75 \text{ kgf} \quad \dots \quad & : 1,6 \text{ Hz} < f_v < 2,2 \text{ Hz} \end{aligned}$$

A análise modal foi realizada com a utilização do software comercial SAP2000/v10 – Structural Analysis Program e é apresentada na Tabela 3.

**Tabela 3:** Modal Periods And Frequencies. Fonte: Autor (2014)

OutputCase	StepType	StepNum	Period	Frequency
Text	Text	Unitless	Sec	Cyc/sec
MODAL	Mode	1,000000	0,269068	3,7165E+00
MODAL	Mode	2,000000	0,183894	5,4379E+00
MODAL	Mode	3,000000	0,164638	6,0739E+00
MODAL	Mode	4,000000	0,158291	6,3175E+00
MODAL	Mode	5,000000	0,157478	6,3501E+00
MODAL	Mode	6,000000	0,154583	6,4690E+00
MODAL	Mode	7,000000	0,151241	6,6120E+00
MODAL	Mode	8,000000	0,150228	6,6565E+00
MODAL	Mode	9,000000	0,146541	6,8240E+00
MODAL	Mode	10,000000	0,145234	6,8854E+00
MODAL	Mode	11,000000	0,141833	7,0506E+00
MODAL	Mode	12,000000	0,140618	7,1114E+00

$$f = 6,5 \gg f_v \text{ crit} = 3,0 \text{ (OK)}$$

Outro aspecto a ser considerado é que a construção de muretas de alvenaria, laje de piso do restaurante, dutos, mobiliário, revestimento, levará a um amortecimento que pode variar de 10% a 20%, segundo Murray (1975).

Para lajes de concreto armado com frequência natural da ordem de 7Hz, os usuários não percebem nenhuma vibração. Como, na laje analisada,  $f = 6,5$ , os usuários do restaurante não percebem a vibração da estrutura.

## 6 CONCLUSÃO

A edificação estudada permite que se faça uma análise de diversos aspectos estruturais, principalmente considerando a colocação de uma nova estrutura sobre outra já edificada.

Da análise inicial, baseada no projeto do arquiteto Oscar Niemeyer, nota-se que a colocação de apoio como pilares devem coincidir com vigas estruturais existentes, para se evitar o puncionamento na laje.

Com a análise de estabilidade observou-se que a estrutura em geral é rígida o que facilita a intervenção de reforço localizado na estrutura. No caso da análise das frequências naturais observou-se que a estrutura atende os requisitos do EuroCode-1 estando em uma zona ligeiramente afastada da zona crítica.

## 7 AGRADECIMENTOS

Agradecemos a CAPES, CNPq, FAU-UnB, Setor de Engenharia do STJ.

## 8 REFERÊNCIAS

**ACI** - / 2005 – American Concrete Institute.

**AISI/99** – LRFD – American Iron and Steel Institute.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS**, 2003, *Projeto de estruturas de concreto*. NBR 6118, Rio de Janeiro.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS**, 1988, *Forças Devidas ao Vento em Edificações*. NBR – 6123, Rio de Janeiro.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS**, 1986, *Projeto de Estruturas de Aço de Edifícios*. NBR-8800, Rio de Janeiro.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS**, 1980, *Cargas para Cálculo de Estruturas de Edificações*. NBR-6120, Rio de Janeiro. British Standards Institution e do Eurocode – 03. BS – 5950/2000 – Structural Use of Steelwork in Building.

**SUPERIOR TRIBUNAL DE JUSTIÇA (STJ)**. *Livreto institucional alusivo à inauguração da sua nova sede*. Brasília: STJ, 1995.

**BRAZ, J.**, 2003. *Espaço e poder na corporação: o caso da sede do Superior Tribunal de Justiça em Brasília-DF*. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília.

**INOJOSA, L.**, 2010, *O Sistema Estrutural na Obra de Oscar Niemeyer*. Dissertação (Mestrado), Universidade de Brasília.

**MURRAY, T.**, 1975, *Design to Prevent Floor Vibrations*. *Engineering Journal*, AISC, Vol. 12, nº3.

# Análise de segurança e desempenho estrutural do autódromo internacional da capital federal do Brasil, Brasília-DF

## **Marco Aurélio Bessa**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação,  
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
bessa@bol.com.br  
<http://lattes.cnpq.br/3483982185862072>

## **Lenildo Santos da Silva**

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/5440879965299939>

## **Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa**

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/5722842765569602>  
leonardo@inojosa.com.br

## **Marcio Augusto Roma Buzar**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação,  
Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
buzar@unb.br  
<http://lattes.cnpq.br/6339433870219875>

# Análise de segurança e desempenho estrutural do autódromo internacional da capital federal do Brasil, Brasília-DF

Marco Aurélio Bessa | Lenildo Santos da Silva |

Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa | Marcio Augusto Roma Buzar

## Resumo

No presente trabalho se faz a análise da estrutura de concreto armado da arquibancada principal no Autódromo Internacional de Brasília. O edifício estudado encontra-se localizado na cidade de Brasília, capital do Brasil e trata-se de uma arquibancada de 2200 metros quadrados, com marquise constituída por 13 pórticos, com 22 metros em balanço. Foram realizadas análises numéricas com modelos tridimensionais da edificação, visando à verificação dos deslocamentos, deformações e os esforços desenvolvidos pela estrutura, observando-se os critérios de estados limites de utilização e último da norma brasileira de Concreto Armado NBR 6118. Foram realizadas análises de instabilidade elástica e instabilidade inelástica da estrutura tridimensional para verificar o fator de carga de colapso, empregando-se o modelo de análise de Rankine-Marchant, com o objetivo de identificar os modos principais de instabilidade e capacidade portante da estrutura. Após a análise numérica foram realizadas propostas de reparos e manutenções dos elementos estruturais com patologias, para manter as mesmas propriedades de segurança e desempenho da estrutural da edificação.

## Palavras-chave

Fator de Carga de Colapso; Estrutura de Concreto-Armado; Vistoria Técnica; Instabilidade Elástica.

# ***Structural analysis and pathologies of international autodrome of the federal capital of Brazil, Brasilia-DF***

## **Abstract**

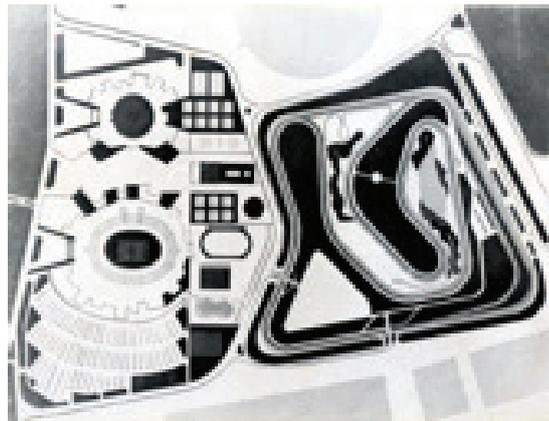
*This paper analyzes the reinforced concrete structure of the main grandstand in the International Autodrome of Brasilia. The studied building is located in the city of Brasilia, capital of Brazil and is a grandstand of 2200 square meters, with marquee consisting of 13 frames, with 22 meters in balance. Numerical analyzes were carried out with three-dimensional models of the building, aiming to verify the displacements, deformations and the efforts developed by the structure, observing the criteria of limit states of use and last of the Brazilian standard of Reinforced Concrete NBR 6118. Instability analyzes were carried out elastic and inelastic instability of the three-dimensional structure to verify the collapse load factor, using the Rankine-Marchant analysis model, in order to identify the main modes of instability and bearing capacity of the structure. After the numerical analysis, proposals were made for repairs and maintenance of structural elements with pathologies, to maintain the same safety and performance properties of the building's structure.*

## **Keywords**

*Collapse Load Factor; Reinforced concrete structure; Technical Survey; Elastic instability.*

## 1 INTRODUÇÃO

O Autódromo Internacional Nelson Piquet, situado em Brasília faz parte do Complexo Poliesportivo Ayrton Senna. Sua construção foi feita em dois anos, entre 1972 e 1974 e o engenheiro responsável, Samuel Dias, fez um circuito com uma pista de traçado misto com seis curvas para a esquerda e seis para a direita, a extensão é de 5.475,58 metros e a maior reta tem 750 metros. O Autódromo Internacional foi inaugurado em fevereiro de 1974, bem no centro da cidade de Brasília. O que poucos sabem é que por trás das retas e curvas está o semblante estilizado de uma mulher tocando harpa (Fig. 1). A inauguração foi feita com uma prova de Fórmula 1 extracampeonato que contou com a presença de grandes nomes do automobilismo da época e o vencedor foi o piloto brasileiro Emerson Fittipaldi, da escuderia McLaren. O Autódromo conta ainda com uma estrutura de 04 arquibancadas e um pavilhão de cadeiras cobertas com capacidade para 11.500 lugares.



**Figura 1:**  
Planta do Complexo  
Poliesportivo Ayrton Senna  
Fonte: Folder do evento de  
Inauguração “Fórmula 1  
Brasília 03/02/1974” (1974)

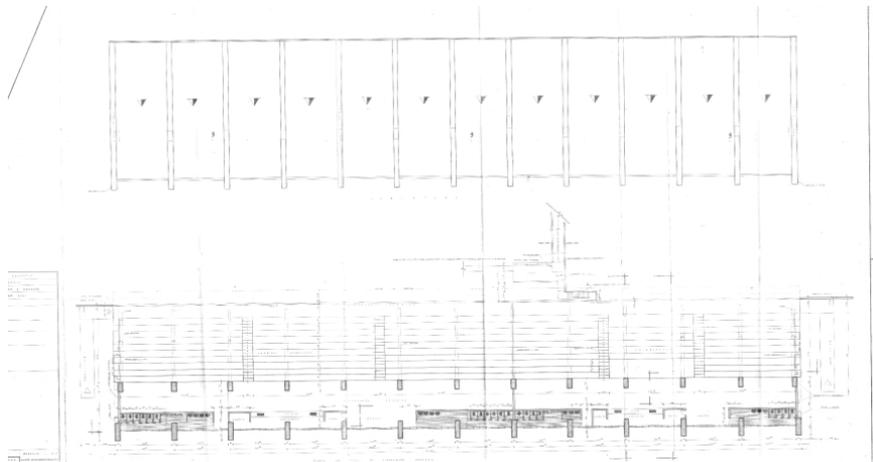
O Pavilhão de cadeiras cobertas do autódromo é o objeto deste estudo e é composto por uma estrutura em concreto armado convencional formada por treze pórticos principais, interligados: na parte superior por laje com nervuras transversais; na parte inferior por laje de piso (banheiros, bar, depósito), na parte inferior e a frente por arquibancada voltadas para a fachada principal (pista do autódromo). Na fachada posterior existe uma estrutura auxiliar formada por rampa de acesso para veículos e lajes de cobertura. A Fig. 2 apresenta uma visão geral das características da estrutura em análise.



**Figura 2:**

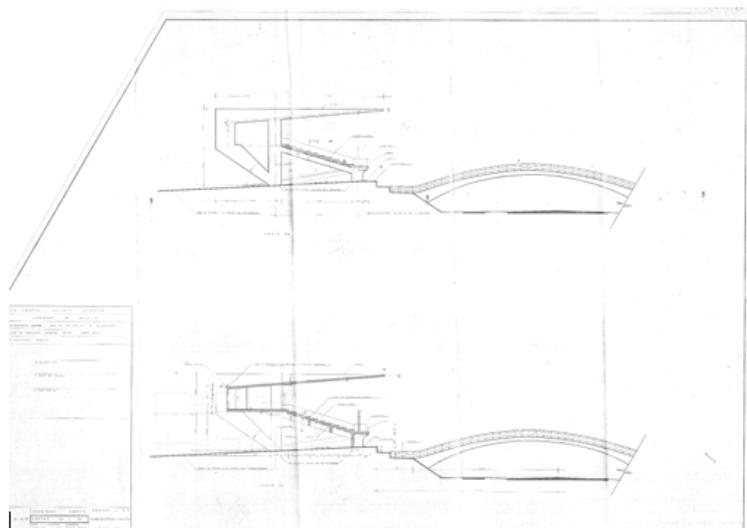
Vista da arquibancada pela  
rampa de acesso ao fundo.  
Fonte: Autor (2017).

Em seguida, na Fig. 3 são apresentadas as plantas da arquibancada e de sua cobertura e na Fig. 4, os cortes transversais, que mostram os pórticos que sustentam a estrutura, ambos desenhos do projeto original de 1972.



**Figura 3:**

Plantas originais da estrutura  
estudada.



**Figura 4:**

Cortes originais da estrutura  
estudada.

O estudo em questão teve como objetivo a avaliação e mapeamento das patologias na estrutura em concreto armado da arquibancada principal do autódromo e a indicação de procedimentos executivos para a solução dos problemas encontrados. Para tanto foi adotado o seguinte procedimento:

- Visitas técnicas ao local para inspeção in loco;
- Avaliação visual das condições de estabilidade estrutural;
- Revisão teórica - corrosão de armaduras (principal patologia encontrada);
- Elaboração de ensaios tecnológicos de carbonatação em diversos pontos da estrutura e de teor de cloretos na estrutura de concreto armado;
- Avaliação da arquibancada e mapeamento das patologias da estrutura através de desenhos, indicando as regiões afetadas, especificando os tipos de patologias e quantitativos;
- Análise Estrutural da edificação para verificação da estabilidade global.

Durante a avaliação de estabilidade global da estrutura não foram verificados os dimensionamentos de peças estruturais, pois não faz parte do escopo do trabalho, no entanto, alguns aspectos podem ser citados, como o fato da estrutura não apresentar deformações acima do admitido por Norma ou perceptível visualmente e não apresentar fissuras que seccionem as peças de concreto armado, de modo a comprometer a estabilidade e durabilidade. Também não há sinais de deficiência estrutural dos pilares ou qualquer evidência de ter havido recalque de fundação.

Deste modo, conclui-se com que não há qualquer sinal que indique comprometimento da mesma, quanto ao dimensionamento estrutural.

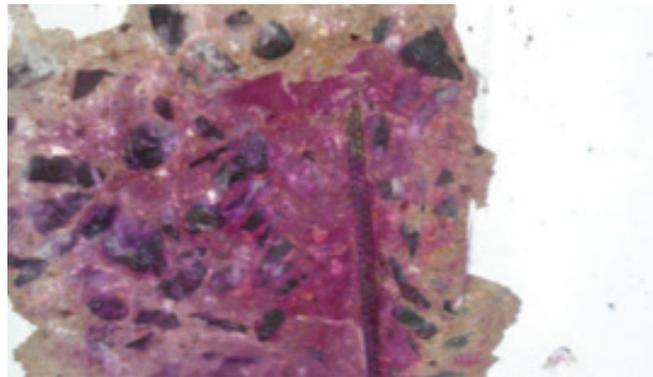
## **2 ENSAIOS TECNOLÓGICOS E OBSERVAÇÕES DE CAMPO**

Para validar algumas suposições preliminares obtidas durante vistorias realizada in loco, foram realizados dois tipos de ensaios tecnológicos no concreto: ensaios de carbonatação com solução de fenolftaleína (Kazmierczak, 1996) e ensaios de teor de cloretos (Lima, 1996) com os produto Chlortest.

### **2.1 Ensaio de Carbonatação**

Foram realizados ensaios de carbonatação em vários pontos com patologia nos pórticos, lajes de cobertura, laje de piso e fundo de arquibancada.

O ensaio consiste na remoção do cobrimento sobre a fissura identificada e a posterior aplicação de um spray de solução de fenolftaleína, que tem o pH de viragem de 8,3 a 10, acima do qual apresenta coloração vermelho-carmim, indicando o pH correto do concreto, permitindo a proteção da armadura. Abaixo dessa faixa a fenolftaleína apresenta característica incolor, indicando a extensão e progressão da carbonatação, expondo a armadura. A Fig. 6 mostra o ensaio de carbonatação realizado no pórtico 1 da arquibancada do Autódromo Internacional, com o qual pode-se concluir que a fissura identificada era apenas superficial e as armaduras estão protegidas.



**Figura 5:**  
Ensaio de carbonatação na  
Patologia 1 do Pórtico 1.  
Fonte: Autor (2017)

Já a Fig. 6 mostra o ensaio de carbonatação com fenolftaleína em uma patologia encontrada nas laterais da viga inclinada do pórtico 12, onde aparece uma fissura a aproximadamente 5 cm da aresta, esta fissura indica um estufamento da armadura de canto, observa-se que o ensaio mostra que a armadura está desprotegida, fato corroborado pela corrosão existente nesta armadura.



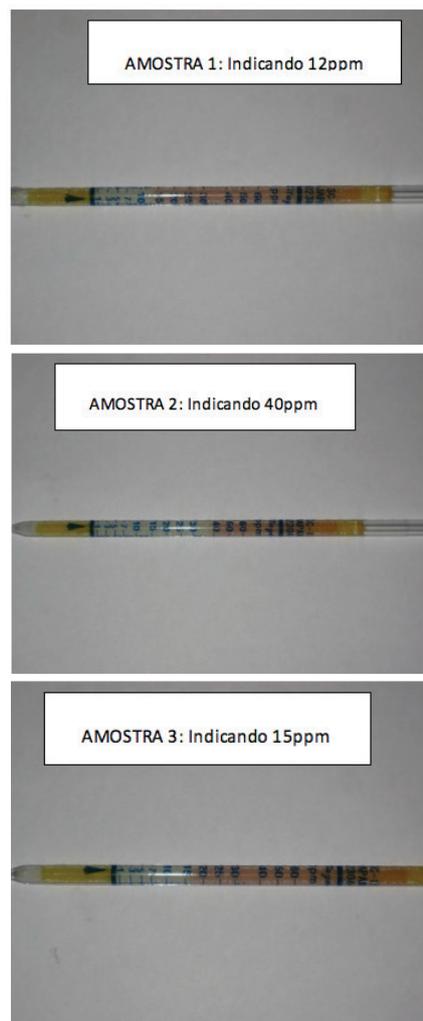
**Figura 6:**  
Ensaio de Carbonatação e  
corrosão da armadura de  
canto - Pórtico 12.  
Fonte: Autor (2017)

Tendo em vista a intensidade da corrosão em algumas peças, fez-se necessária a avaliação do teor de cloretos na estrutura de concreto. Para o estudo, usou-se três kits de teste Elcometer Chlortest "C", específico para concreto armado.

De acordo com o CEB (1984), o teor crítico de cloretos para o qual a partir dele existe a possibilidade de corrosão de armadura é de 0,4% em relação à massa de cimento. Para a avaliação, considerou-se que o traço provável para o concreto de 15 MPa foi 1:2:4, utilizando-se 297 kg de cimento e 202 litros de água por metro cúbico de concreto.

O ensaio consiste em se perfurar com uma broca diamantada o concreto numa profundidade estipulada, para se coletar o pó e assim poder realizar o teste. Os testes foram efetuados em amostras retiradas do Pórtico 2 (Amostra 1), Pórtico 10 (Amostra 2) e Laje de Cobertura (Amostra 3), nas profundidades de 1 a 3 cm.

A indicação cor de laranja na proveta, após a imersão na solução com o pó de concreto, indica a quantidade de cloretos em parte por milhão (ppm). Através do traço provável do concreto, faz-se a conversão para teor de cloretos por peso de cimento.



**Figura 8:**  
Amostras dos ensaios de  
Cloreto. Fonte: Autor (2017)

De acordo com a Fig. 8, os índices de cloreto estão acima dos valores permitidos por norma, indicando que deverá ser executado algum procedimento no processo de recuperação da estrutura com o objetivo de mitigar o teor de cloretos e reduzir a possibilidade de ataque das armaduras.

### **2.3 Constatações da Inspeção**

As principais patologias identificadas no edifício estão relacionadas a deficiência no cobrimento das armaduras e falta de conservação, estes dois fatores somados ao tempo em que a estrutura ficou exposta às intempéries, principalmente ciclos de molhagem e secagem.

Foram identificadas as seguintes patologias na estrutura de concreto armado:

- Corrosão de armadura
- Cobrimento insuficiente (marcas da armadura no concreto)
- Exposição de armaduras
- Infiltrações
- Eflorescência
- Fissuras em diversos elementos estruturais, principalmente fissuras que vão da superfície até a armadura no pórtico
- Fissuras na laje de cobertura que seccionam a laje localmente (vão de um lado a outro da laje)
- Falta de tratamento das juntas de dilatação
- Esfarelamento do concreto no pé dos pilares
- Marcas de armadura na superfície do concreto
- Deterioração da impermeabilização da laje de cobertura

Dentre essas patologias identificadas, o cobrimento deficiente e a corrosão de armadura são as de maior ocorrência e as mais relevantes. As infiltrações em geral ocasionam as eflorescências, portanto solucionando a causa, cessa a efeito. Nos pórticos e na laje de piso a água que escorre ao longo dos elementos estruturais aceleram o processo de deterioração do concreto e corrosão das armaduras.

As juntas de dilatação do edifício necessitam de uma revisão completa, principalmente na laje de cobertura. Algumas juntas encontram-se preenchidas com pedaços de madeira e durante chuvas são o maior ponto de vazamento de água da cobertura para as arquibancadas e laje do piso superior.

As fissuras na laje de cobertura passam de um lado para outro da referida laje, fato constatado principalmente após chuvas onde as marcas de infiltração estão presentes nas lajes de cobertura, destacando-se a eflorescência em diversos pontos da laje. Em geral, as infiltrações estão relacionadas com a deterioração da impermeabilização da laje de cobertura.

## VERIFICAÇÃO DE PATOLOGIAS

As patologias foram investigadas por meio de remoção do revestimento, avaliação do estado de corrosão e medição da seção das barras de aço e ensaio de cloreto. Vale ressaltar que as patologias ensaiadas compõem uma amostra das patologias existentes, tendo em vista que praticamente todas as patologias repetem-se em diversos pontos da estrutura.

Foram observadas patologias de estufamento do concreto de revestimento devido a oxidação das barras de aço, por consequência do revestimento insuficiente combinado, em algumas áreas, com escoamento superficial das águas pluviais em diversos pórticos da estrutura.

Também foram encontradas fissuras no pilarete do pórtico 1 (analisadas no ensaio de carbonatação Fig.5), além de fissuras e trincas em vários outros locais.

Foi constatado que em diversas regiões da estrutura as armaduras estão desprotegidas por apresentarem avançado estado de carbonatação, mostrados através dos ensaios realizados, como no pórtico 2, as vigas inclinadas do pórtico 3 (Fig. 9) e do pórtico 12.



**Figura 9:**  
Ensaio de carbonatação da  
Patologia 3 do Pórtico 3.  
Fonte: Autor (2017)

Há ainda várias peças da estrutura que apresentam revestimento insuficiente, como a região 9 do pórtico 3, mostrado na Fig. 10



**Figura 10:**  
Confirmação do pequeno  
revestimento na Patologia 3  
do Pórtico 3.  
Fonte: Autor (2017)

Outra patologia muito observada na estrutura da arquibancada do Autódromo Internacional é a exposição da armadura nos pés dos pilares nos pórticos. No pórtico 8, conforme observado na Fig. 11, ressalta-se a existência de tubulação em ferro no interior do pilar.



**Figura 11:**  
Ensaio de carbonatação da  
Patologia 3 do Pórtico 3.  
Fonte: Autor (2017)

Em alguns pontos da estrutura o concreto encontra-se desagregado, chegando ao estado de esfarelamento, como no pé do pilar do pórtico 6. A Fig. 12 mostra o estado do concreto do pé do pilar após quebra para inspeção, observa-se nesta foto o estado de desagregação do concreto.



**Figura 12:**  
Concreto desagregado no  
pé do pilar do Pórtico 6.  
Fonte: Autor (2017)

Além dos pórticos, a face inferior da laje da arquibancada apresenta regiões onde a armadura está exposta, marcadas na face do concreto ou com cobertura insuficiente, em alguns pontos os ensaios de carbonatação apontaram que as armaduras encontram desprotegidas (Fig. 13).

**Figura 13:**

Ensaio de carbonatação  
– armadura desprotegida.  
Fonte: Autor (2017)



A laje de cobertura (marquise) encontra-se com infiltração em diversos pontos, incluindo junta de dilatação, luminárias, trincas na laje, estas trincas vão da face inferior até a face superior da laje. As infiltrações são consequência da ineficiência da impermeabilização existente na face superior da laje. A Fig.14 mostra um dos ensaios de carbonatação do concreto, observou-se em todos os casos que as armaduras da laje de cobertura estão desprotegidas nos locais onde existem infiltrações.

**Figura 14:**

Ensaio de carbonatação  
– Laje de Cobertura.  
Fonte: Autor (2017)



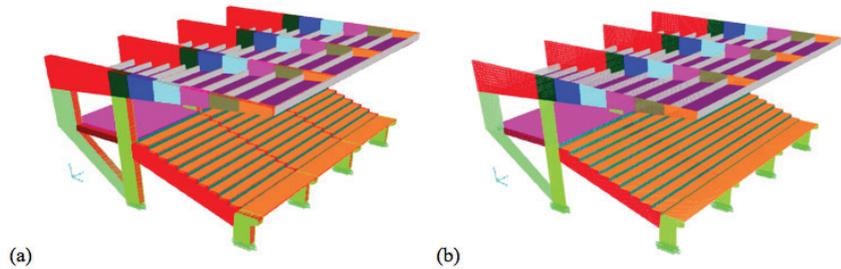
### 3 ANÁLISE NUMÉRICA

A análise numérica da estrutura foi realizada utilizando-se o software SAP2000-19, com elementos finitos tipo Shell e análise estrutural de instabilidade elástica. A escolha de elemento Shell se justifica pelo fato de existir grande quantidade de seções com inércia variável e de modo geral a maior dimensão da seção transversal é pelo menos três vezes maior que a menor dimensão da mesma. Para modelagem da estrutura toda foi necessário um total de 60.240 elementos (Malha 1) com dimensão média de 20 cm x 30 cm. Com objetivo de avaliar convergência da solução dos problemas, os elementos da malha inicial foram divididos em 2 x 2, gerando um total de 241.040 elementos (Malha 2). Os elementos foram categorizados em Pórtico Principal, Laje da Cobertura, Laje da Arquibancada, Laje do Passadilho e Vigas.

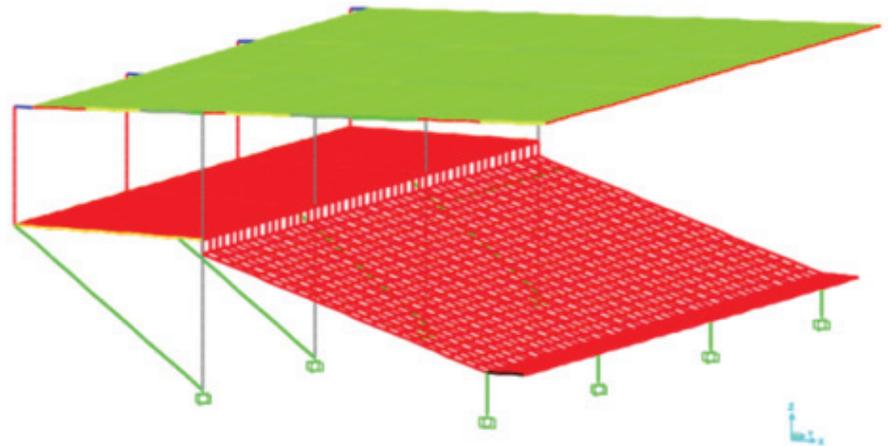
A Fig. 15 apresenta a discretização utilizada na estrutura como um todo. Para a estrutura em tela serão realizadas análise limite de serviço, análise de vibrações livres e análise de instabilidade elástica (buckling).

**Figura 15:**

Discretização com 60240 elementos:  
(a) Elementos com proporção das dimensões e (b) discretização com plano médio.  
Fonte: Autor (2017)



Analisou-se ainda a estrutura com um modelo composto por elementos tipo frame acoplados com elementos shell, com a discretização em 1922 elementos frames e 4056 elementos tipo shell, conforme mostrado na Fig. 16.



**Figura 16:**

Discretização utilizando elementos tipo frame e tipo shell.  
Fonte: Autor (2017)

### 3.1 Análise limite em serviço

Apresentam-se nas Fig. 17 a 19 os deslocamentos para a Malha 1, na ponta do balanço, na viga da arquibancada e na extremidade esquerda do pórtico, respectivamente. Mostram-se ainda na Fig. 17 o deslocamento na ponta do balanço para a Malha 2.

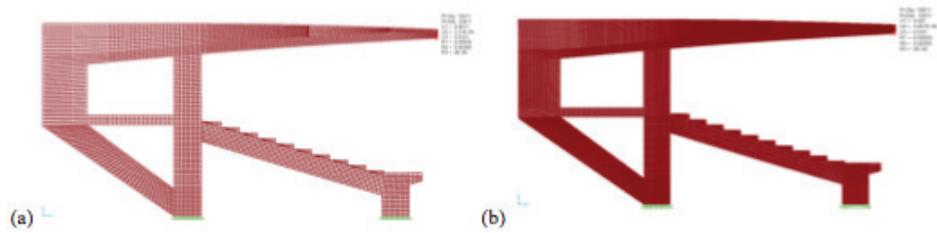
**Figura 17:**

Deslocamento na ponta do  
balanço:

(a) Malha 1 – 3,31 cm e

(b) Malha 2 – 3,30 cm.

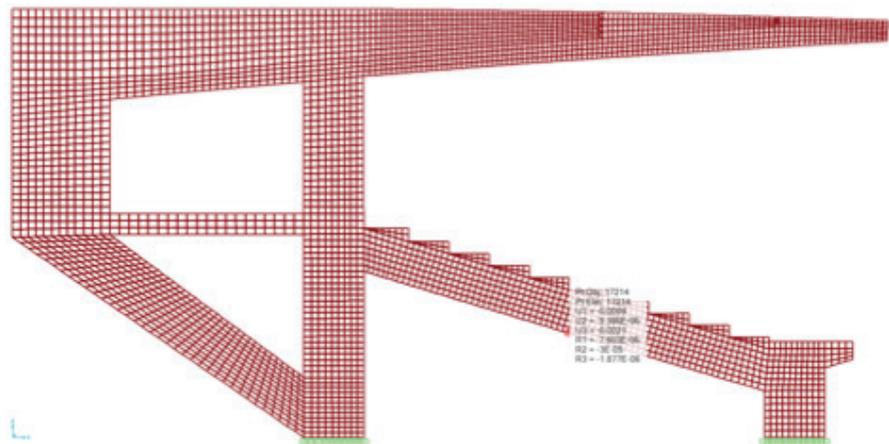
Fonte: Autor (2017)



**Figura 18:**

Deslocamento na viga da  
arquibancada – 0,21 cm.

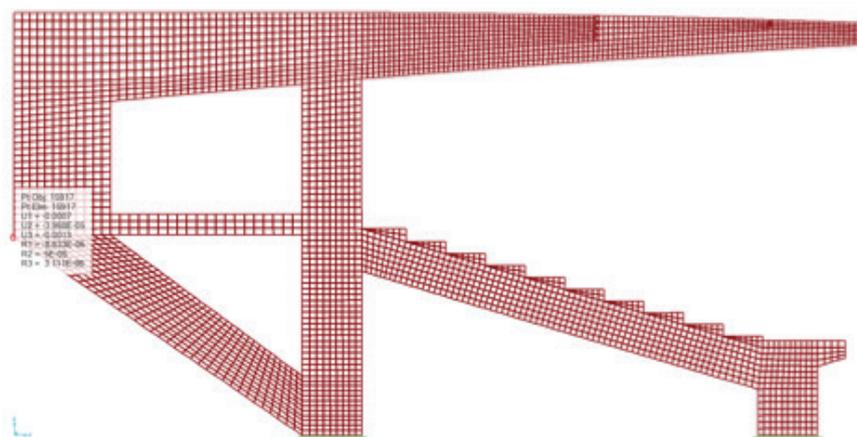
Fonte: Autor (2017)



**Figura 19:**

Deslocamento na  
extremidade esquerda do  
pórtico– 0,13 cm.

Fonte: Autor (2017)



### 3.2 Análise de Vibrações Livres (Análise Modal)

Considera-se na análise de vibrações livres não amortecidas um modelo no qual utiliza-se as matrizes de rigidez e de massa, realizada automaticamente pelo Software SAP2000-19, conforme apresentado na equação de equilíbrio dinâmico da expressão 5.1.

$$(1) \quad \mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} = 0$$

Onde K é a matriz de rigidez, M a matriz de massa,  $\bar{\mathbf{u}}$  o vetor de deslocamentos e  $\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$  o vetor de acelerações nodais. A solução da equação 5.1 fornece como solução um conjunto de autovalores e autovetores, no qual os autovalores não as frequências de vibração da estrutura e o autovetores representam os modos de vibração da estrutura. Cabe ainda ressaltar que o menor autovalor representa a frequência natural de vibração da estrutura.

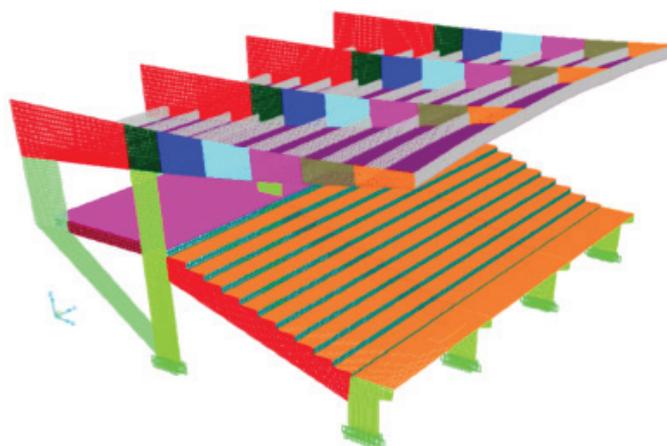
O comportamento das torcidas em estruturas tipo arquibancada vem sofrendo modificações desde as décadas de 1960, 1970 até os dias atuais. De modo que torcidas atuais tendem a se manifestar de maneira muito mais eufórica e com movimentos mais intensos, isso pode ser observado, sobretudo, em estádios de futebol mais antigos onde a amplitude dos deslocamentos aumentou no decorrer do tempo, podendo ser acompanhado inclusive por imagens de TV em eventos esportivos de maior manifestação como, por exemplo, finais de campeonatos ou eventos com grande rivalidade.

No caso presente as frequências e modos de vibração representam informações importantes tanto da flexibilidade da estrutura quanto da direção de cargas que pode excitar as frequências correspondentes. Assim, com estas informações têm-se indicativos se a melhor opção é reforçar a estrutura ou demolir a mesma para a construção de uma estrutura com rigidez mais adequada aos grandes eventos para o comportamento contemporâneos dos torcedores.

A Tabela 2 apresenta os valores das primeiras 12 frequências na análise de vibrações livres da Malha 1. Observa-se que a frequência natural de vibração 3,81 Hz (Fig. 20) ocorre na laje de cobertura e possui modo de vibração tipicamente vertical.

**Tabela 2.** Frequências para Malha 1.  
Fonte: Autor (2017)

Modo	Frequência
	Hz
1	3,67
2	3,82
3	4,09
4	5,38
5	6,04
6	6,58
7	7,59
8	10,23
9	10,35
10	10,52
11	11,38
12	11,46



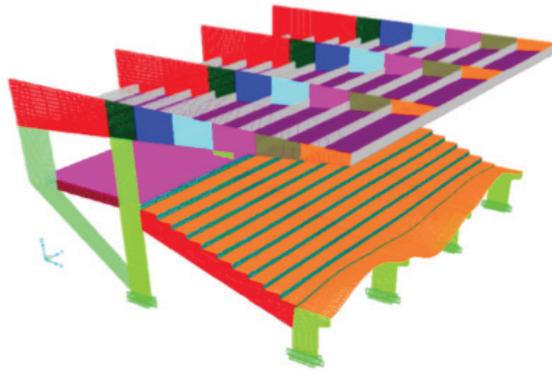
**Figura 20:**  
Modo de vibração associado  
à frequência fundamental.  
Fonte: Autor (2017)

A menor frequência de vibração associada à modos de vibração na arquibancada tem valor 10,23 Hz e o modo de vibração apresentado na Fig. 21. Esta frequência é importante porque traduz a frequência que produz o modo de vibração na direção das solicitações de torcidas usando a arquibancada. De acordo com a NBR 6118:2014, item 23.3, usando o caso de ginásio de esportes (o caso da norma que mais se aproxima de arquibancada do autódromo) a frequência de vibração na arquibancada deve ser

$$f > 1,2 f_{crit}$$

Onde  $f$  é a frequência de vibração na direção da solicitação do carregamento (pessoas na arquibancada) e  $f_{crit}$  é a frequência crítica fornecida pela NBR 6118:2014 que depende do uso da estrutura. No caso presente a frequência crítica é 8 Hz (ginásio de esportes), assim,

$$f = 10,22\text{Hz} > 1,2 f_{crit} = 9,6\text{Hz}$$

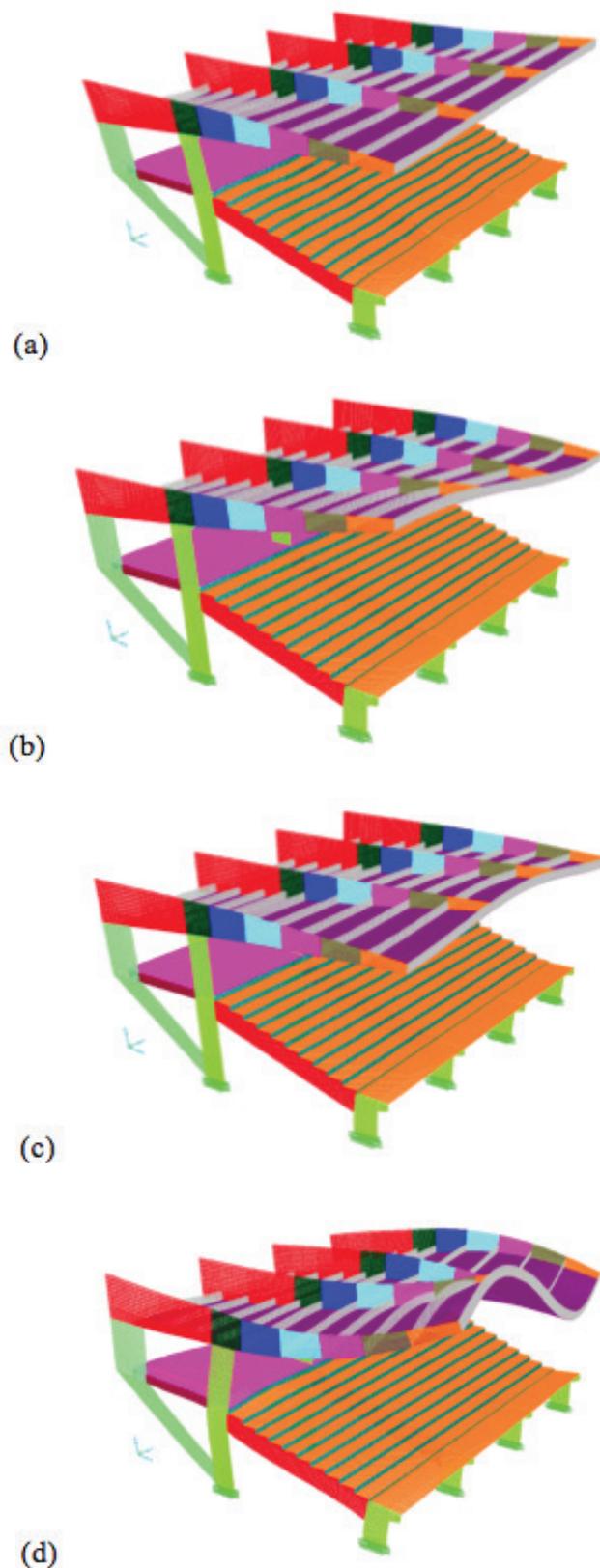


**Figura 21:**  
Modo de vibração  
associado à arquibancada.  
Fonte: Autor (2017)

A Fig. 22 apresenta alguns outros modos de vibração da estrutura, as quais possuem frequências menores que as da arquibancada, porém com modos de vibração que não possuem carregamentos significativos que possam excitá-los.

Na sequência, a Tabela 3 apresenta as frequências de vibração associadas aos 12 primeiros modos de vibração para a Malha 2 (dcretização em 241.040 elementos). Quando se comparam os valores apresentados na Tabela 5.1 com os valores da Tabela 5.2 observa-se que os valores das frequências não praticamente coincidentes, com uma diferença máxima de 2 % na frequência associada ao segundo modo de vibração.

No caso da malha composta por elementos de Shell e Frame a frequência associada ao modo de vibração na arquibancada é igual a 9,88 Hz, novamente superior à frequência preconizada pela NBR 6118:2014. A Fig.23 mostra o modo de vibração, praticamente coincidente com o modo apresentado na Fig.19.



**Figura 22:**

Outros modos de vibração:

(a) modo torsional em pilares

(b) modo torsional na cobertura

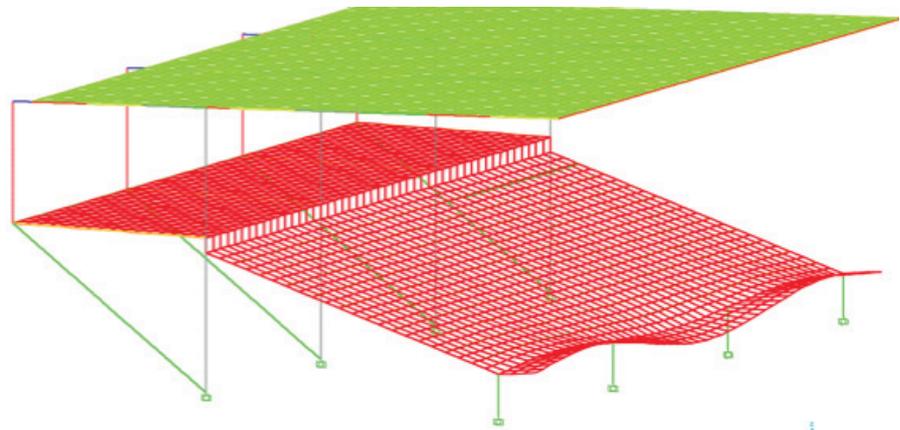
(c) modo de flexão na cobertura

(d) modo torsional na cobertura e  
vertical da mão francesa/pilar.

Fonte: Autor (2017)

**Tabela 3:** Frequências para Malha 2.  
Fonte: Autor (2017)

Modo	Frequência
	Hz
1	3,66
2	3,75
3	4,07
4	5,37
5	5,97
6	6,51
7	7,58
8	10,23
9	10,35
10	10,52
11	11,20
12	11,43



**Figura 23:**  
Modo de vibração na  
arquivancada para o modelo  
de Shell e Frame.  
Fonte: Autor (2017)

### 3.3 Análise de Instabilidade elástica

A análise de instabilidade foi realizada utilizando-se o método de Rankine-Merchant o qual é uma aproximação para se obter a carga de ruína de uma estrutura levando-se em conta os efeitos de não linearidade geométrica e a não linearidade física do material. Assim, a partir da carga de colapso plástico de primeira ordem e da carga crítica de instabilidade elástica, também de

primeira ordem, estima-se a carga de ruína da estrutura. Toda a análise numérica é realizada por meio do software SAP2000-19, o qual fornece o valor de  $\lambda_{cr}$ , medida que representa quantas vezes tem-se que multiplicar a carga de serviço para se chegar à carga de instabilidade elástica (buckling).

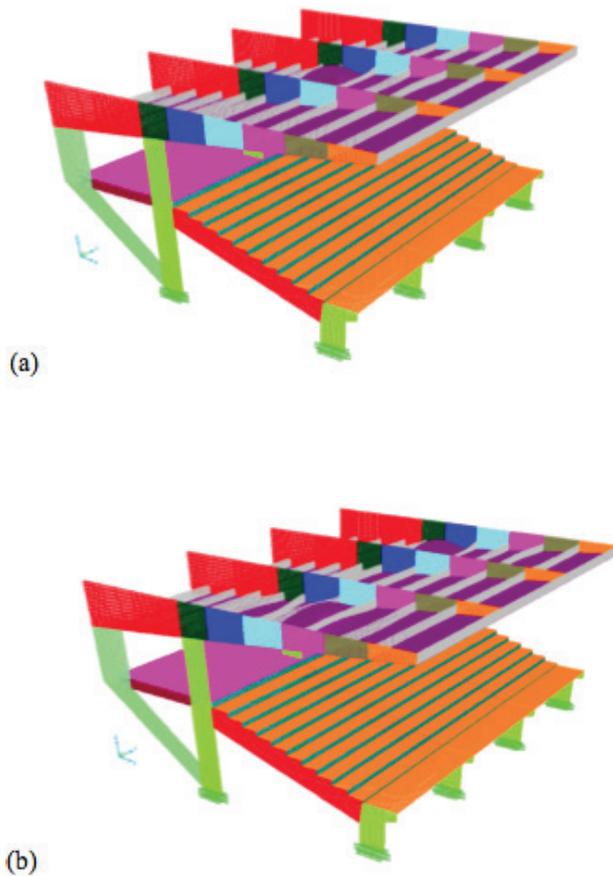
O valor de  $\gamma_{cr}$ , para o qual a estrutura é considerada flexível, medianamente flexível ou rígida sofre ligeira variação dependendo da norma considerada. No presente trabalho adota-se o critério do Eurocode 3, para o qual a estrutura com  $\gamma_{cr}$  para menor que 4,6 é considerada flexível, com valor entre 4,6 e 10 é uma estrutura medianamente flexível e para valores maiores que 10 tem-se uma estrutura rígida.

A Tabela 4 apresenta os valores de  $\gamma_{cr}$ , para as discretizações em 60240 elementos e 241040 elementos, observa-se que nos dois casos os valores são praticamente coincidentes, indicando que a malha com menor número de elementos já fornece uma solução para o problema adequadamente convergido. O valor de  $\gamma_{cr}$  associado ao menor modo de instabilidade já permite afirmar que a estrutura é suficientemente rígida. Indicando que a mesma não possui risco de colapso por flambagem elástica.

Os dois primeiros modos de instabilidade ocorrem nas vigas e laje de cobertura, conforme mostrado na Fig. 24, este fato corrobora a afirmação acima quanto à grande rigidez global da estrutura.

**Tabela 4:** Valores de  $\lambda_{cr}$ . Fonte: Autor (2017)

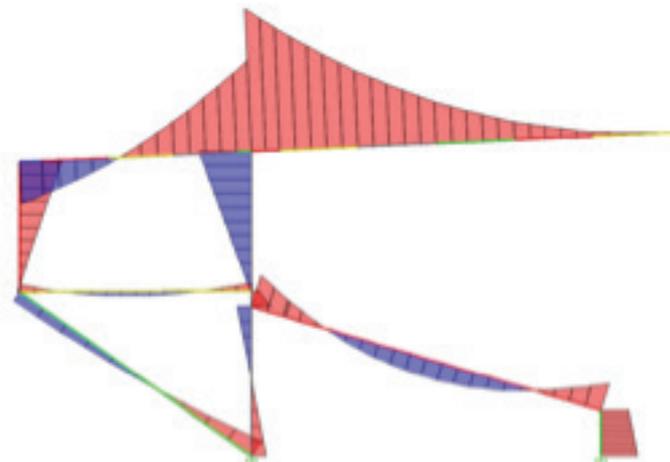
Modo	$\lambda_{cr}$	$\lambda_{cr}$
	60240 elementos	241040 elementos
1	26,8	26,8
2	27,7	27,6
3	27,7	27,7
4	40,2	40,0
5	41,3	41,1
6	41,4	41,2
7	42,3	42,2
8	43,8	43,6
9	43,8	43,6
10	45,1	44,9
11	47,0	46,8
12	47,1	46,9



**Figura 24:**  
Modos de instabilidade:  
(a) Laje da cobertura  
(b) Lajes e vigas  
da cobertura.  
Fonte: Autor (2017)

### 3.4 Análise de esforços e dimensionamento

A Figura 25 mostra o diagrama de momentos fletores no pórtico principal, conforme esperado os maiores momentos ocorrem na viga do balanço da cobertura. Do ponto de vista de dimensionamento a Tabela 5 apresenta um resumo do dimensionamento das peças principais.



**Figura 25:**  
Diagrama de momentos  
fletores no pórtico principal.  
Fonte: Autor (2017)

**Tabela 5.** Dimensionamento das peças principais

Peça	Momento (tf.m)	Cortante (tf)	Dimensionamento
Viga da Cobertura	430,94	71,77	Domínio 3-4 Altura mínima = 149 cm Domínio 2-3 Altura máxima = 218 cm Como a altura da viga é de 180 cm, a mesma foi dimensionada no domínio 3 com a altura da linha neutra $K_x = 0,416$
Viga da Arquibancada	107,17	50,03	Domínio 3-4 Altura mínima = 89 cm Domínio 2-3 Altura máxima = 118 cm Como a altura da viga é de 120 cm, a mesma foi dimensionada no domínio 2 com a altura da linha neutra $K_x = 0,247$

## 4 CONCLUSÕES

No que se refere à análise modal a frequência de vibração associada com a arquibancada, na direção do carregamento de pessoas a estrutura apresenta rigidez aceitável do ponto de vista dos critérios normativos preconizados pela NBR 6118:2014. Cabe ainda ressaltar que tanto a discretização em 60.240 elementos quanto a discretização em 241.040 fornecem frequência fundamental praticamente iguais, a Malha 1 com 3,66 Hz e a Malha 2 com 3,67Hz. Destaca-se que o mesmo aconteceu para as dozes primeiras frequências, indicando que, quanto à análise de vibrações livre, a primeira malha já representa uma discretização adequada da estrutura.

A análise de instabilidade elástica mostra que se trata de uma estrutura extremamente rígida, com valores de fator crítico de colapso alto quando se usa como parâmetros tanto o Eurocode 3 quanto outras normas como a Inglesa (BS-5059/2000) ou a Chinesa (GB-50017). Assim, a estrutura é suficientemente rígida para que se recomende sua recuperação ao invés de demolição.

Foi observada como principal patologia na edificação a corrosão de armaduras devido a cobertura insuficiente, em alguns locais o cobertura insuficiente permitiu corrosão da armadura com estufamento do concreto. Em função do que foi obtido nos ensaios tecnológicos, verificou-se uma contaminação do concreto por cloretos e uma carbonatação intensa da estrutura. A corrosão predominante na estrutura é generalizada, tendo em vista que a carbonatação está sendo o fator controlador. De uma área aproximada de 2.000 m<sup>2</sup> de estrutura, uma parte significativa necessitará sofrer algum tipo de intervenção para recuperação estrutural.

Pode-se então concluir que a estrutura se encontra em estado ruim de conservação, com corrosão generalizada de armaduras e necessitando de intervenção com propósito de recuperação. As patologias relevantes identificadas nas edificações estão relacionadas à corrosão de armadura, que ocorreu em virtude

dos muitos anos que se passaram com a estrutura exposta, o que levou à uma carbonatação significativa do concreto. Esses fatores combinados, carbonatação e cloretos, juntos com a água da chuva e de lavagem, fez com que surgissem pontos de corrosão na estrutura, principalmente nas lajes da arquibancada e vigas inclinadas dos pórticos.

Após a recuperação estrutural, a edificação oferecerá a mesma segurança de uma edificação recém construída sem patologias. A recuperação da estrutura ampliará a vida útil da edificação, sendo economicamente viável.

## 5 REFERENCIAS

- BAKKER, R.F.M.**, 1988. *Initiation period*. In: **SCHIESSL, P.** ed. *Corrosion of Steel in Concrete*, RILEM Technical Committee 60-CSC, London, Chapman e Hall.
- COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB.**,1989. *Bulletin d'Information*. Paris, n.192.
- GENTIL, V.**, 1996. *Corrosão*. 3ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 1996.
- Helene, P.R.L.**, 1993. *Contribuição ao estudo da corrosão em armaduras de concreto armado*. São Paulo. Tese de Livre Docência - Escola Politécnica. Universidade de São Paulo.
- HELENE, P.R.L.; FIGUEIREDO, E.P.**, 1994. *Assim caminha a corrosão*. In: Revista Técnica, no. 10, p. 28-33, São Paulo.
- KAZMIERCZAK, C.S.; LINDENMEYER, Z.**, 1996. *Comparação entre metodologias utilizadas para a determinação da profundidade de carbonatação em argamassas*. International Congress of High-Performance Concrete, and Performance and Quality of Concrete Structures.
- MATOS, O.C.**,1991. *Contribuição ao estudo e emprego de técnicas eletroquímicas no controle da corrosão de armaduras de concreto armado*. São Paulo. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo
- METHA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M.**, 1994. *Concreto: estrutura, propriedades e materiais*. Ed. Pini, SP.
- NEPOMUCENO, A.A.** , 1992. *Comportamiento de los morteros de reparacion frente la carbonatacion y a la penetracion de cloruros en estructuras de hormigon armado dañadas por corrosion de armaduras, estudio mediante la tecnica de resistencia de polarizacion*. Tesis Doctoral, Universidad Politecnica de Madrid.
- OHNO, Y.; PRAPARNTANATORN, S.; SUSUKI, K.**, 1996. *Influence of cracking and water cement ratio on macrocell corrosion of steel in concrete*. In: *Corrosion of Reinforcement in Concrete Construction*, p.24-32, The Royal Society of Chemistry, Cambridge, UK.

- PRUDÊNCIO, W.J.**, 1986. *Carbonatação da superfície das estruturas de concreto armado*. In: Sem. Nacional de Corrosão na Construção Civil, ANAIS, ABRACO, Rio de Janeiro, pp. 147-159.
- RAUPACH, M.**, 1996. *Corrosion of steel in the area of cracks in concrete: laboratory test and calculations using a transmission line model*. In: Corrosion of Reinforcement in Concrete Construction, p.13-23, The Royal Society of Chemistry, Cambridge, UK.
- RODRÍGUEZ, P.; GONZÁLEZ, J.A.**, 1994. *Use of the coloustatic method for measuring corrosion rates of embedded metal in concrete*. Magazine of Concrete Research, 46, No. 167, 91-97.
- SATO, N.M.N.S.**, 1998. *Análise da porosidade e de propriedades de transporte de massa em concretos*. São Paulo, Tese (Doutorado) - Escola Politécnica - Universidade de São Paulo.
- TUUTTI, K.**, 1982. *Corrosion of steel in concrete*. Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockolm.
- \_\_\_\_\_, 1974. Fórmula 1 Brasília 03/02/1974 - Folder do evento de Inauguração

# Cálculo de reações em vigas de bordo para lajes nervuradas unidirecionais

## **Marco Aurélio Bessa**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo,  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
bessa@bol.com.br  
<http://lattes.cnpq.br/3483982185862072>

## **José Tavares de Barros Júnior**

IESPLAN - INSTITUTO DE ENSINO SUPERIOR PLANALTO - Dep. de Eng. Civil  
SEPS Q 708/908 - Brasília, DF, 70390-070 – Brazil

## **Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa**

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
<http://lattes.cnpq.br/5722842765569602>

## **Marcio Augusto Roma Buzar**

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo,  
Universidade de Brasília  
Brasília - DF, Brasil  
buzar@unb.br  
<http://lattes.cnpq.br/6339433870219875>

# Cálculo de reações em vigas de bordo para lajes nervuradas unidirecionais

Marco Aurélio Bessa | José Tavares de Barros Júnior  
Leonardo da Silveira Pirillo Inojosa | Marcio Augusto Roma Buzar

## Resumo

O correto dimensionamento estrutural dos edifícios tornou-se cada vez mais importante devido à procura de uma maior eficiência das estruturas, o que se traduz em custos mais baixos. O ambiente imobiliário altamente competitivo exige que os construtores procurem incessantemente a redução de custos sem comprometer a segurança dos edifícios. A evolução dos modelos e métodos de cálculo estrutural permite-nos obter estruturas mais fiáveis com a utilização de menores quantidades de materiais, em particular, aço e concreto. Como exemplo, a evolução do processo de construção através da utilização de lajes pré-fabricadas, que proporcionam economia de tempo e material. Para além da sua própria operação estrutural, é importante saber como interage com outras estruturas, em particular com as vigas de suporte das arestas. Este trabalho centra-se no mecanismo de transferência de carga das lajes para as vigas de suporte das pranchas, a fim de estabelecer com maior precisão quanto transfere de carga para cada uma das vigas que a sustentam e, conseqüentemente, o correto dimensionamento das mesmas. Este documento apresenta um cálculo utilizando software de elementos finitos: RAMTM-Elementos versão de software V8i, Bentley. A solução baseia-se na Teoria da Análise Elástica utilizando o modelo computacional de uma laje com nervuras unidirecionais apoiada num pórtico espacial composto por duas vigas de borda paralelas e duas vigas de tabuleiro perpendiculares às vigas de laje. O objetivo deste trabalho é identificar e relacionar as principais variáveis que influenciam a distribuição das reações nas vigas, fornecendo uma expressão simplificada para um cálculo expedito.

## Palavras-chave

Cálculo Estrutural, lajes pré-fabricadas, Concreto armado.

# **Calculation of reactions on edge beams for unidirectional ribbed slab**

## **Abstract**

*The correct structural design of buildings has become increasingly important due to the search for greater efficiency of the structures, which translates into lower costs. The highly competitive real estate environment requires builders to unceasingly pursue cost savings without compromising building safety. The evolution of the models and methods of structural calculations allows us to obtain more reliable structures with use of smaller quantities of materials, in particular, steel and concrete. As an example, there is the evolution of the construction process by the use of pre-fabricated slabs, which provide time and material savings. In addition to its own structural operation, it is important to know how it interacts with other structures, in particular the edge support beams. This work focuses on the load transfer mechanism of the slabs for the boarder support beams, in order to establish with more precision how much it transfers of load to each of the beams that sustain it and, consequently, the correct sizing of the same. This paper presents a calculation using finite element software: RAMTM-Elements software version V8i, Bentley. The solution is based on the Elastic Analysis Theory using the computational model of a unidirectional ribbed slab supported on a space portico composed of two parallel edge beams and two perpendicular boarder beams to the slab beams. The objective of this work is to identify and to relate the main variables that influence the distribution of the reactions in the beams, providing a simplified expression for an expedited calculation.*

## **Keywords**

*Structural Design, Edge Beams, Ribbed Slabs,  
Reinforced Concrete*

## 1 INTRODUÇÃO

Comumente chamadas de lajes pré-moldadas, as lajes pré-fabricadas são na verdade, lajes nervuradas em que parte das nervuras é confeccionada previamente, de modo a facilitar a execução da laje nervurada em si, propiciando economia de tempo e materiais para formas e cimbramento. As lajes nervuradas, por outro lado, se constituem na principal solução para vencer grandes vãos, além de permitirem a distribuição de paredes diretamente sobre a laje de forma menos impactante que a laje maciça, propiciando maior versatilidade à arquitetura.

Outra vantagem refere-se à possibilidade de utilização dos espaços entre as nervuras para tubulação das instalações, desde que paralela ao sentido das nervuras, no caso de lajes unidirecionais. Dentre as lajes pré-fabricadas, a de maior interesse é a treliçada. Essas lajes possuem vantagens sobre as lajes comuns quanto à resistência à tração, devido à flexão, pois possuem peso próprio menor que a laje maciça, o que aumenta sua carga útil.

O princípio da laje nervurada é retirar uma parte do concreto que, teoricamente, situa-se abaixo da linha neutra sem envolver a armadura. Esta seção de concreto encontra-se no Estádio II, ou de fissuração, de modo que o concreto abaixo da linha neutra - que já tem resistência reduzida por sofrer esforços de tração - é considerado fissurado sendo, portanto, desprezada sua contribuição no dimensionamento. Por outro lado, seu peso ainda é considerado, gerando esforços na estrutura.

Nos sistemas de Lajes Treliçadas, mantém-se uma parte da seção de concreto (bw) suficiente para o adequado dimensionamento de modo a combater os esforços de flexão e cisalhamento. A armação treliçada é uma estrutura metálica espacial prismática formada por duas treliças unidas por eletrofusão ou caldeamento, de modo a formar um elemento rígido.

É constituída por um fio superior (banzo superior), que colabora como armadura de compressão durante a montagem e concretagem da laje treliçada, e pode colaborar na resistência ao momento fletor negativo (em regiões de apoio central); dois fios inferiores (banzo inferior), os quais resistem às forças de tração oriundas do momento fletor positivo; as diagonais ou sinusóides, que, além de colaborarem como armadura resistente às forças cortantes (quando forem altas), servem para promover uma perfeita coesão ou aderência entre o concreto pré-moldado da vigota e o concreto do capeamento (moldado "in loco"). Assim, além da vantagem quanto à resistência à flexão, a treliça corresponde ao modelo aplicado no dimensionamento do esforço cortante de Treliça de Mörsch.

Este artigo analisa o comportamento das lajes pré-fabricadas treliçadas unidirecionais quanto às reações nos apoios (vigas de bordo) paralelas às vigotas de modo a calcular o valor das reações nessas vigas, visando ainda utilizar as ferramentas de análise estrutural mais precisas que utilizam o modelo de elementos finitos, o seu funcionamento e formas de modelagem básicas.

A partir de um modelo predeterminado composto de pilares, vigas de bordo e laje nervurada, será analisado o comportamento dos esforços na estrutura, em especial nas vigas, de modo a verificar o quão relevante é considerar a reação das lajes nas mesmas. Variando-se características, tais como, altura da nervura, altura da capa da laje e a relação entre os comprimentos dos lados da laje,  $\lambda$ , pode-se buscar uma relação empírica entre essas variáveis e a citada reação.

## 2 NORMALIZAÇÃO

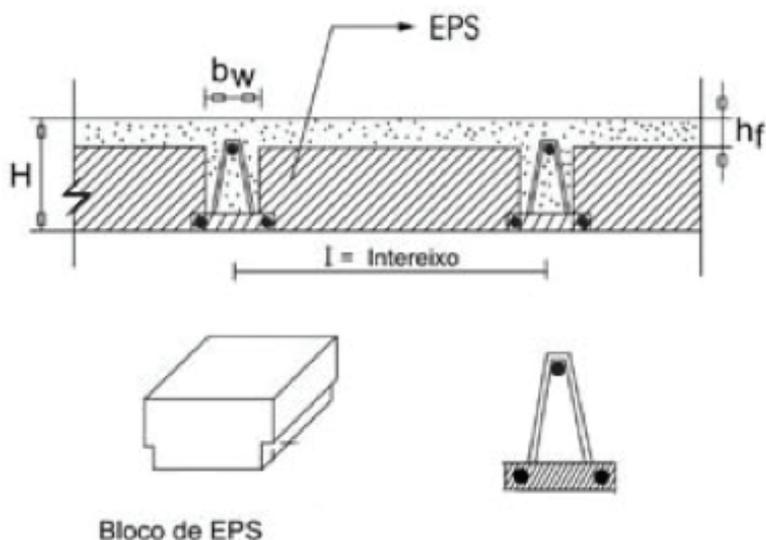
Os requisitos para o recebimento e utilização de componentes de lajes pré-fabricadas são normatizados pela ABNT segundo a norma:

- NBR 14.859-1:2002: Laje pré-fabricada – Requisitos Parte 1 Lajes Unidirecionais

A norma abrange diversos critérios para dimensão e caracterização das lajes, sendo os principais, tais como, alturas padronizadas, designação de vigotas e inteiros mínimos.

### 2.1 Lajes disponíveis no mercado

Existem vários tipos e dimensões disponíveis no mercado, com vão livre máximo dado em função da altura total  $H$  e da sobrecarga, ou vice-versa. Algumas empresas também dimensionam a laje em função do vínculo que pode ser apoio simples ou engaste. As lajes treliçadas oferecidas vão desde a LT 8(5+3) até LT 35(30+5), que é a maior altura prescrita em norma, para vão de até 10,0m. Entretanto é possível encontrar valores bem superiores, como  $H$  45(40+5) para vão de até 15,0m sobrecarga de 100kgf/m<sup>2</sup> e bordo engastado e enchimento em EPS. O enchimento em EPS diminui o peso próprio da laje proporcionando maior sobrecarga, além de maior conforto térmico (Figura1).



**Figura 1**  
Painel treliçado com EPS.

### 3 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

#### 3.1 Reações dos apoios das lajes

A questão da distribuição do carregamento das lajes nervuradas unidirecionais nas vigas periféricas pode ser resumida à seguinte questão: as vigas perpendiculares podem ser dimensionadas de modo a absorverem todo o carregamento das vigotas da laje, dispensando as vigas periféricas paralelas, desta forma é fácil determinar as reações de apoio da laje nas vigas que a suportam. Entretanto, como é mais comum, suponha que a laje também esteja apoiada em vigas de bordo paralelas. Então se tem um sistema hiperestático, com parte do carregamento suportado por essas vigas. Esta reação é devida à rigidez da capa de concreto: quanto mais espessa a capa da laje, maior sua rigidez, inclusive no sentido das vigas paralelas. Logo, quanto maior a rigidez, menor a deformação e maior o esforço transmitido à viga. O sistema então não pode ser considerado inteiramente como um conjunto de lajes apoiados em vigotas, tampouco uma laje maciça enrijecida pelas vigotas, mas um sistema dividido em duas partes principais:

- Um conjunto de vigotas que se apoiam em dois lados
- Uma placa superior que se apoia nos quatro lados

Para determinar as reações de apoio nas vigas periféricas de uma laje nervurada unidirecional é necessário estabelecer o comportamento da laje na ruptura.

Para lajes maciças, a norma sugere o comportamento de charneiras plásticas, com distribuição conforme a área de

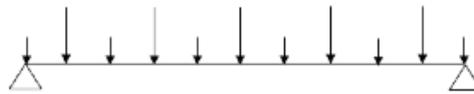
triângulos e trapézios obtidos de acordo com linhas traçadas a partir dos nós.

Na laje nervurada, existe uma laje maciça entre as nervuras. Nesse caso, aplicando a metodologia acima, restaria, de fato, pouco carregamento para as vigas paralelas.

Os diagramas de forças que se imagina para o carregamento das vigas – paralelas e perpendiculares – de bordo é apresentado a seguir (Figura 2).



a) viga de bordo paralela.



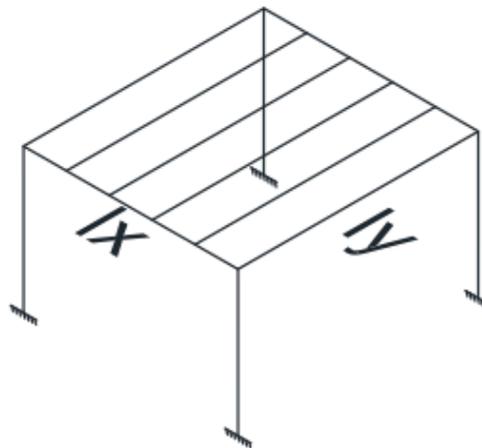
b) viga de bordo perpendicular.

### Figura 2

Esquema estrutural da viga.  
Fonte: Autor (2022)

## 4 METODOLOGIA

Cálculo utilizando software de elementos finitos: Software RAMTM-Elements versão V8i, Bentley. A resolução é fundamentada na teoria da Análise Elástica, cujo modelo computacional é de uma laje nervurada unidirecional apoiada em pórtico espacial composto de duas vigas de bordo paralelas e duas perpendiculares às vigotas da laje, conforme Figura 3.



### Figura 3

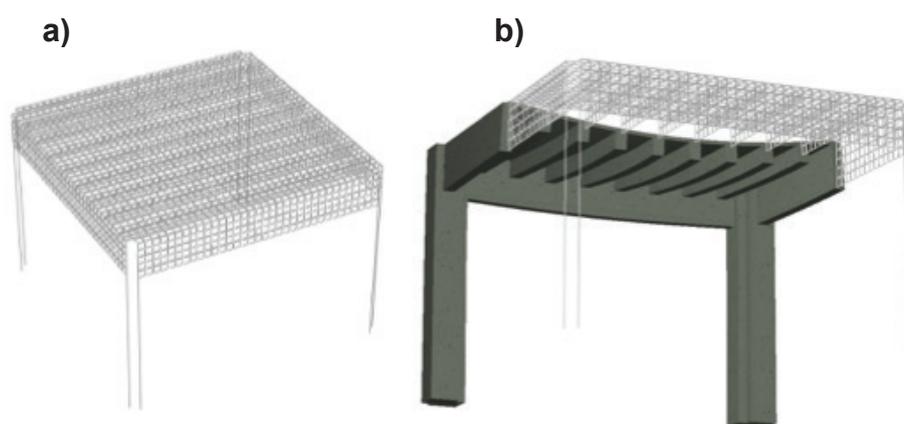
Esquema estrutural do modelo de cálculo.  
Fonte: Autor (2022)

Os pilares são considerados engastados no solo. O comprimento longitudinal é representado por  $l_x$  e representa o menor lado da laje. O comprimento perpendicular é representado por  $l_y$  e representa o maior lado da laje.

O objetivo deste trabalho é identificar e relacionar as principais variáveis que influenciam a distribuição das reações nas vigas de bordo, fornecendo uma expressão simplificada para cálculo expedito. Nesse sentido, considerando a grande quantidade de variáveis que podem influenciar no resultado, a fim de viabilizar o estudo, procedeu-se à simplificação do cálculo elencando aquelas que, teoricamente, são consideradas de maior relevância e maior variabilidade, deixando as demais, como parte não explicada do modelo. Assim, a influência de algumas variáveis, sabidamente importantes e explicativas do modelo foram desconsideradas, adotando-se como padrão, as seguintes características:

- Carregamento de  $500\text{kgf/m}^2$ ;
- Peso próprio não considerado;
- Fissuração no apoio não considerada;
- Altura do pilar em  $2,70\text{m}$ ;
- Largura das vigas em  $12\text{cm}$

A laje nervurada deve funcionar como uma sequência de vigas T. Para se obter essa configuração, optou-se por construir a estrutura utilizando placas, em plano perpendicular ao seu plano usual XZ, onde representa uma laje. Assim, tanto as vigotas quanto as vigas de bordo são construídas a partir de placas, formando uma barra bidimensional, conforme Fig. 4.



**Figura 4**  
Modelo estrutural  
com barras e placas  
(RAM-elements).  
Fonte: Autor (2022)

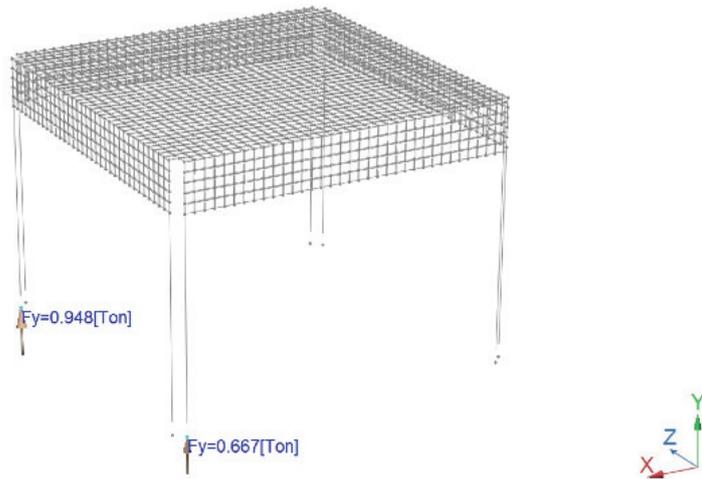
- a)** modelo estrutural segmentado  
**b)** modelo estrutural renderizado com cascas

Para todas as lajes e vigas foram utilizados elementos quadrados com dimensões de 10x10. Para obtenção do carregamento em cada viga, objeto deste estudo, foram utilizadas barras (pilares) independentes para vigas paralelas e perpendiculares de modo a obter separadamente a reação de apoio de cada um, obtendo-se o carregamento indiretamente utilizando a reação de apoio (figura 5) e estabelecendo seu valor por meio da equação:

$$(5) \quad V = \frac{q \times l}{2}$$

Daí,

$$(6) \quad q \times l = 2V$$



**Figura 5**  
Reações verticais  
(RAM-Elements).  
Fonte: Autor (2022)

Os experimentos foram feitos considerando as variáveis elencadas adiante e combinando variações em cada uma das mesmas mantendo-se as demais constantes. Este procedimento visa obter uma avaliação direta da sensibilidade da variável resposta em função de alterações em determinada variável explicativa. Os experimentos foram repetidos para valores de  $l_x$  em 3,60; 5,20 e 7,20m.

As variáveis analisadas e os valores testados para cada uma delas foram:

- Lambda (razão entre  $l_y$  e  $l_x$ ): 1,0 - 1,4 -2,0;
- Altura da capa: 3,0 – 4,0 – 5,0 - 6,0cm;
- Altura das vigotas: 10,0 – 20,0 – 30,0cm;
- Rigidez das vigas de bordo: vigas de 30, 50 e 100cm de altura;
- Rigidez dos pilares: seções: 30x30, 50x50 e 100x100cm.

Para eliminar o eventual efeito da diferença de rigidez entre as vigas de bordo, estas foram ajustadas em função da diferença entre os comprimentos, ou seja, no caso de  $\lambda$  diferente de 1, ajustando-se a altura e/ou o valor a largura da viga,  $b_w$ , de modo a equalizar as rigidezes nos sentidos  $x$  e  $y$ .

Para se obter o efeito da fissuração, a inércia das seções foi reduzida em 50%, quando considerado este efeito. Esta redução segue o valor apontado por (Carvalho,2010) no qual a inércia da peça no Estádio II é da ordem de 50% da inércia no Estádio I. A fissuração da capa não foi avaliada em virtude de o dimensionamento das lajes ocorrer no regime elástico.

## 5 RESULTADOS

Os resultados dos diversos experimentos foram tabulados na Tabela 1.

**Tabela 1:** Valores das variáveis explicativas e resultados.  
Fonte: Autor (2022)

Caso	CARACTERÍSTICAS													RESULTADO			
	$l_x$	$l_y$	$\lambda$	Ht	Hn	Hc	Viga	$K_x$	Viga	$K_y$	Pilar	Kp	Fv	Rpar	Rpp		
1	360	360	1,0	11,5	10,0	3	12	30	75	12	30	75	30	250	0	36,7%	63,3%
2	360	360	1,0	12,0	10,0	4	12	30	75	12	30	75	30	250	0	41,5%	58,5%
3	360	360	1,0	12,5	10,0	5	12	30	75	12	30	75	30	250	0	44,1%	55,9%
4	360	360	1,0	11,5	10,0	3	12	50	347	12	50	347	30	250	0	35,6%	64,4%
5	360	360	1,0	12,0	10,0	4	12	50	347	12	50	347	30	250	0	40,8%	59,2%
6	360	360	1,0	12,5	10,0	5	12	50	347	12	50	347	30	250	0	44,0%	56,0%
7	360	360	1,0	12,0	10,0	4	12	100	2778	12	100	2778	30	250	0	37,7%	62,3%
8	360	520	1,4	12,5	10,0	5	12	50	347	10	60	346	30	250	0	35,8%	64,2%
9	360	720	2,0	12,5	10,0	5	12	50	347	14	60	350	30	250	0	26,7%	73,3%
10	360	720	2,0	11,5	10,0	3	12	50	347	14	60	350	30	250	0	20,6%	79,4%
11	360	720	2,0	12,0	10,0	4	12	50	347	14	60	350	30	250	0	24,2%	75,8%
12	360	720	2,0	12,5	10,0	5	12	50	347	14	60	350	100	30864	0	19,9%	80,1%
13	360	720	2,0	12,5	10,0	5	12	100	2778	14	120	2800	30	250	0	27,0%	73,0%
14	360	720	2,0	12,5	10,0	5	12	100	2778	14	120	2800	100	30864	0	20,6%	79,4%
15	520	520	1,0	12,5	10,0	5	12	50	240	12	50	240	30	250	0	45,3%	54,7%
16	520	520	1,0	22,5	20,0	5	12	50	240	12	50	240	30	250	0	34,1%	65,9%
17	520	520	1,0	32,5	30,0	5	12	50	240	12	50	240	30	250	0	26,9%	73,1%
18	360	360	1,0	12,0	10,0	4	12	50	347	12	50	347	30	250	1	41,3%	58,7%
19	360	520	1,4	12,5	10,0	5	12	50	347	10	60	346	30	250	1	36,2%	63,8%
20	520	520	1,0	22,5	20,0	5	12	50	240	12	50	240	30	250	1	33,1%	66,9%
21	520	520	1,0	12,5	10,0	5	12	100	1923	12	100	1923	30	250	0	45,0%	55,0%
22	360	720	2,0	12,5	10,0	5	12	50	347	14	60	350	30	250	1	26,5%	73,5%
23	360	360	1,0	22,0	20,0	4	12	50	347	12	50	347	30	250	0	30,8%	69,2%

Onde:  $l_x$  = comprimento na direção  $x$ ;  $l_y$  = comprimento na direção  $y$ ;  $\lambda$  = razão entre  $l_y$  e  $l_x$ ; **Ht** = altura total; **Hn** = altura da nervura; **Hc** = altura da capa; **Vigax** = viga de bordo na direção  $x$ ; **Vigay** = viga de bordo na direção  $y$ ; **Kx** = razão entre o momento de inércia da seção e o comprimento  $l_x$ ; **Ky** = razão entre o

momento de inércia da seção e o comprimento  $l_y$ ; **Pilar** = seção do pilar; **K<sub>p</sub>** = razão entre o momento de inércia da seção do pilar e seu comprimento; **F<sub>v</sub>** = fissuração da viga; **R<sub>par</sub>** = reação na viga paralela; **R<sub>pp</sub>** = reação na viga perpendicular

Na análise que procederemos, a variável de interesse, ou a explicada, é **R<sub>par</sub>**, o percentual da reação total que é suportado pela viga paralela. Para efeito ilustrativo, apresentamos o resultado gráfico e demais relatórios para um experimento, com as seguintes características:  $\lambda = 1,0$ ;  $l_x = 360$ ;  $l_y = 360$ ;  $H_t = 12,0$ ;  $H_c = 4,0$ ;  $H_n = 10,0$ ;  $K_x = 347$ ;  $K_y = 347$ ;  $K_p = 250$ ;  $F_v = 0$ .

## 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

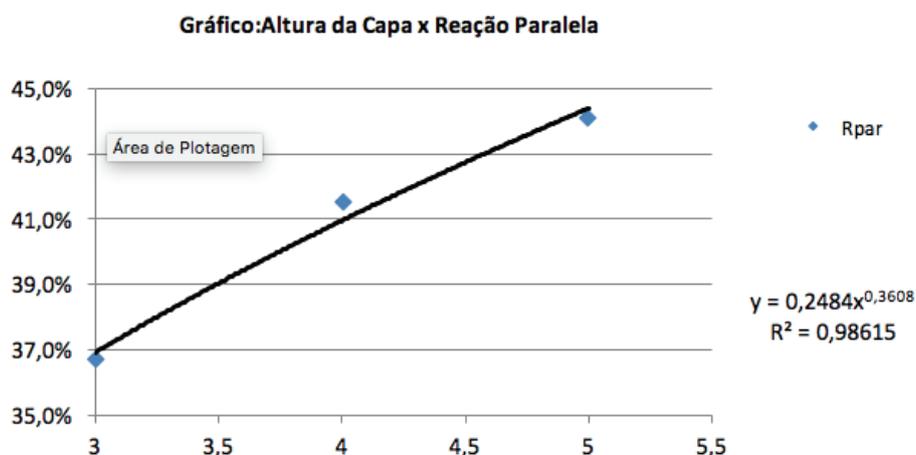
Inicialmente, tenta-se verificar a influência e representatividade de cada variável, verificando-se o comportamento da variável resposta em função de alterações na variável explicativa, conforme cada caso avaliado, um aspecto importante é a separação da variável altura total  $H_t$  - soma de  $H_n$ , altura da nervura e  $H_c$ , altura da capa - uma vez que, teoricamente, espera-se comportamentos distintos da reação paralela em função de cada uma dessas parcelas, isoladamente. De forma resumida, espera-se que as mesmas tenham influências opostas na determinação da reação paralela.

Outro aspecto importante a se observar antes da análise das variáveis refere-se a questão do tamanho absoluto da laje, e não apenas sua forma, dada pela variável  $\lambda$  a partir de  $l_x$ . Ou seja, deseja-se verificar se a variável  $l_x$  é significativa para avaliação das reações e se existe diferenças significativas entre lajes quadradas  $360 \times 360$  cm e  $520 \times 520$  cm, por exemplo. Para tanto, podemos comparar os casos 6 e 15. Observamos que a diferença é muito pequena - 44,0% contra 45,3% - ou 1,3% para uma variação de 40% em  $l_x$ . Diante disso, optou-se por descartar essa influência e não considerar a variável  $l_x$  na regressão.

### 6.1 Altura da Capa

A primeira variável a ser observada é a altura da capa. Dos experimentos 1 a 3 observa-se que esta variável influencia significativamente a reação nas vigas e com relação direta, ou seja, quanto maior a altura da capa, maior a reação nas vigas paralelas, conforme gráfico da Fig. 6.

**Figura 6**  
Altura da  
capa x reação  
paralela.  
Fonte: Autor (2022)



Este comportamento era esperado, pois, ao se aumentar a espessura da capa, aumenta-se a rigidez da laje no sentido paralelo, de modo seu comportamento se aproxima do comportamento de uma laje maciça. É importante observar que a forma côncava da curva, buscando, neste caso em que a laje é quadrada, o valor de 50%, ou a distribuição igualitária do carregamento.

Os casos 4 a 6 avaliam o mesmo comportamento, entretanto sob novas condições de rigidez das vigas de bordo, podendo-se concluir em análise preliminar, - uma vez que não há grande diferença entre os valores observados para as vigas com altura de 30cm e a de 50cm que a rigidez das vigas de bordo têm pouca influência. Para a capa de 3,0cm e viga de 30,0cm tem-se reação de 36,7%, enquanto para a mesma altura de capa e viga de 50,0cm, a reação é de 35,6%, ou seja, uma diferença de 1,1%. Já para a capa de 5,0cm e viga de 30,0cm tem-se reação de 44,1%, enquanto para a mesma altura de capa e viga de 50,0cm, a reação é de 44,0%, ou seja, uma diferença de 0,1%. Estes casos já denotam a pouca influência da rigidez das vigas de bordo, comportamento que será avaliado adiante. Os valores de capa utilizados nos experimentos são os mínimos estabelecidos em norma.

Supondo que possam ser assumidos valores maiores, a regressão linear dessa variável não é compatível, uma vez que para um valor de altura de capa de 6,5cm a reação paralela já atinge 50%. A curva de regressão do gráfico por uma potência aponta a equação:

$$(7) \quad R_{par} = 0,2484Hc^{36}$$

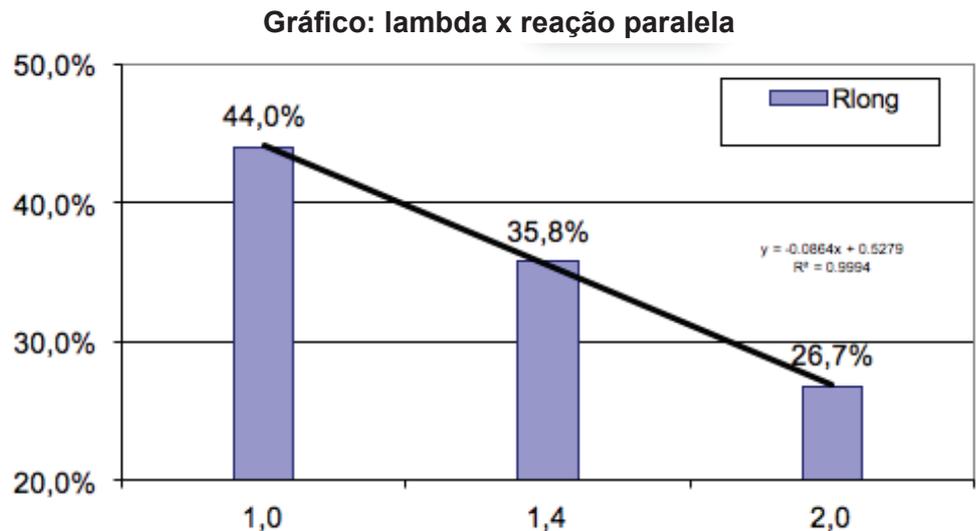
Para a regressão, adotaremos a relação:

$$(8) \quad R_{par} = \beta \times Hc^{0,333..} = \beta \times \sqrt[3]{Hc}$$

Essa relação favorece a extrapolação para valores superiores a 5cm de capa, tornando mais realista o cálculo da reação paralela.

## 6.2 Lambda

Nos casos 6, 8 e 9 verifica-se a influência da forma da laje, dada pela variável lambda. Observa-se facilmente a relação inversa entre esta variável e a reação na viga paralela, conforme gráfico da Fig. 7.



**Figura 7**  
Altura da capa x reação paralela.  
Fonte: Autor (2022)

De fato, é de se esperar que, mantidas as demais características, tais como as dimensões das vigotas, altura da capa, a influencia sobre as vigas paralelas tende a convergir para um determinado valor, enquanto a viga perpendicular tende a absorver sozinha todo o carregamento.

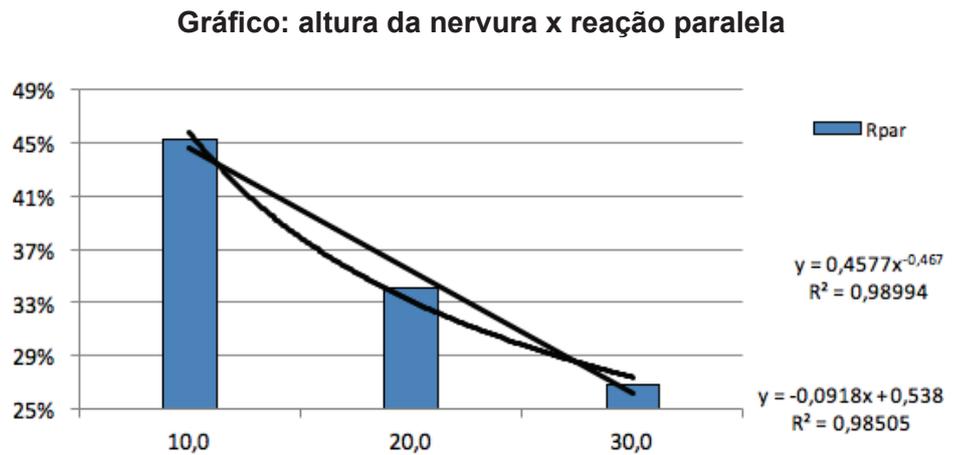
Esse comportamento pode ser explicado pela seguinte análise teórica. Sabe-se que o carregamento nas vigas é dado em função da área de influencia de cada viga na laje. Conforme a laje assume uma relação maior entre  $l_x$  e  $l_y$ , a área de influencia aumento da viga paralela tende a permanecer constante, enquanto a área da viga perpendicular aumenta. Assim, o aumento na direção  $y$  pode ser considerado como inserções no eixo médio da laje, sendo a carga suportada principalmente pela viga perpendicular. Este comportamento é compatível com a teoria das charneiras plásticas, o qual pode servir de limitador para o valor de reação a ser calculado. Assim, utilizaremos a relação linear para regressão dessa variável.

## 6.3 Altura da nervura

A influência da altura da nervura é verificada nos experimentos 15 a 17. Observa-se, como esperado, a relação inversa entre essa

variável e a variável explicada. Trata-se da verificação do próprio mecanismo de transferência de esforços, qual sejam, as vigotas, que são elementos lineares de rigidez, absorvem carregamento transmitindo o esforço para os seus apoios, que são as vigas perpendiculares. Assim, quanto maior a rigidez, variando nesse caso em função da altura da mesma, maior a reação na viga perpendicular, e conseqüentemente, menor a reação na viga paralela, conforme pode ser observado na fig.8.

**Figura 8**  
 Altura da nervura x reação paralela.  
 Fonte: Autor (2022)



Essa variável foi desmembrada da variável altura total, conforme dito anteriormente, em virtude de um comportamento esperado inverso ao da variável altura da capa. Essa diferença foi comprovada nos gráficos apresentados anteriormente.

Analogamente ao que foi observado para a altura da capa, verificamos uma concavidade no gráfico dessa variável, a qual sugere um ajuste de modo que, para extrapolações, o valor seja compatível. Este gráfico, certamente é de uma função assintótica ao eixo x. Pela regressão apontada, temos:

(9) 
$$R_{par} = 0,4577Hn^{-0,4666}$$

Para a regressão, adotaremos a relação:

(10) 
$$R_{par} = \beta \times Hc^{0,333..} = \beta \times \sqrt[3]{Hc}$$

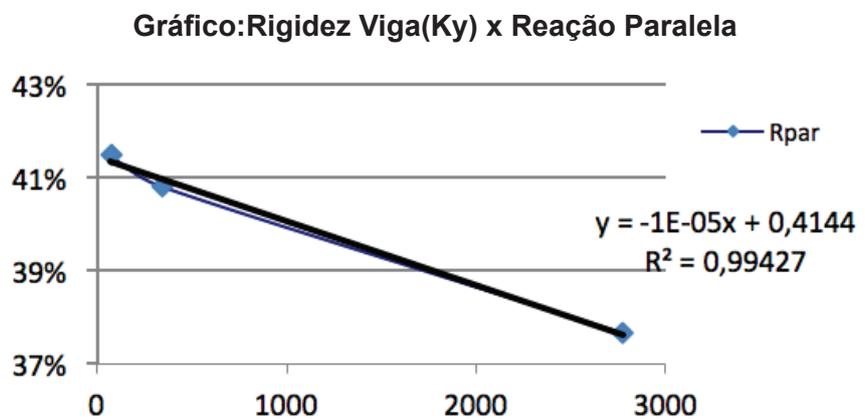
Essa relação favorece a extrapolação para valores superiores a 5cm de capa, tornando mais realista o cálculo da reação paralela.

## 6.4 Rigidez das vigas de bordo

Conforme já observado, preliminarmente, na avaliação da altura da capa, podemos observar nos casos 2, 5 e 7 a diferença entre as reações paralelas em função de alterações na rigidez das vigas de bordo é relativamente pequena.

No experimento, consideramos que uma viga com altura de 100cm é considerada indeslocável. Isso significa que, nesse caso, a viga também não sofre fissuração.

A rigidez de cada direção, x e y, conforme já foi mencionado, foi ajustada de modo a permanecer constante, de modo que não se pode determinar a contribuição de cada uma isoladamente. O gráfico da figura 9 mostra o comportamento da reação paralela em função da rigidez.



**Figura 9**  
Altura da nervura x reação paralela.  
Fonte: Autor (2022)

Embora o gráfico sugira uma relação linear, com coeficiente de explicação muito próximo de 1,0, é de se salientar que o último ponto, correspondente à altura de 100cm promoveu aumento significativo na rigidez de fato, a rigidez aumenta proporcionalmente ao cubo da altura o que pode induzir a uma conclusão errônea sobre o real comportamento. Em nossa opinião, valores intermediários de altura entre 50 e 100cm já demonstrariam a concavidade da curva Rigidez x Reação, uma vez que o valor mínimo de reação deve ser limitado inferiormente.

Não obstante, pelo objetivo do trabalho, deve-se buscar formas simplificadas para as funções, de modo que, formas complexas para cálculo das reações são consideradas apenas de sua importância for fundamental.

Além disso, não haverá extrapolação do valor correspondente à viga com altura de 100 cm. Portanto, é suficiente o conhecimento do grau de contribuição e relação, direta ou inversa, dessa variável com a variável de interesse. Dessa forma, consideraremos sua relação como linear para efeito de regressão.

## 6.5 Fissuração das vigas de bordo

O efeito de fissuração das vigas de bordo pode ser avaliado pelos casos 16 e 20, nos quais se tem  $R_{par}$  igual a 33,1% e 34,1% para viga fissurada e não fissurada, respectivamente. Essa diferença, 1,0%, se deve, conforme foi estabelecido, à diminuição da seção em 50%. Uma alteração relativamente pequena, portanto.

## 6.6 Rigidez dos pilares

A influência da rigidez dos pilares é verificada nos casos 12 e 13. Como foram testadas apenas duas situações – seção transversal de 30x30 e de 100x100 – a análise gráfica é dispensável, pois apontará o gráfico de uma reta. A diferença de reação paralela entre o caso com pilar de seção 30x30cm e de seção 100x100cm é de 6,3% (27,0% - 7,1%). Observa-se que quanto menor a rigidez do pilar (menor seção) maior a reação paralela, ou seja, uma relação inversa entre a variável explicada e a variável explicativa.

## 6.7 Avaliação global

As avaliações anteriores foram feitas sob a condição de que todas as variáveis permanecessem constantes, exceto a variável de interesse. Essas avaliações servem para estudo preliminar do comportamento da variável resposta em função de alterações nas demais variáveis e fornecessem informações iniciais

Para a avaliação do funcionamento do modelo como um todo, que contemple variações simultâneas das variáveis e de modo a capturar a interação entre as mesmas é necessário uma ferramenta estatística que consolide os dados. Assim, para uma avaliação global foi utilizada ferramenta estatística de regressão linear multivariada, fundamentada no Teorema de Gauss-Markov (Gujarati, 2000).

A análise de regressão é feita a partir dos dados constantes da tabela ANOVA (Analysis of Variance), gerada durante o processo. A tabela ANOVA consiste de metodologia fundamentada nos testes para avaliação da regressão global, baseado na estatística “F” de Snedecor e na avaliação da regressão para cada uma das variáveis individualmente, utilizando a estatística “t”, do Teste-t (Gujarati, 2000).

A estatística “F” de significância refere-se ao nível de significância sob o qual se rejeita a hipótese nula. O valor da estatística “F” é obtido da distribuição “F” de SNEDECOR.

Conforme o próprio nome diz, a regressão considera apenas relações lineares entre a variável resposta e as variáveis explicativas. Por esse motivo é que procedemos a avaliação inicial das variáveis anteriormente de modo a identificar relações

não-lineares. No caso de relações não-lineares, o procedimento para compatibilizar a regressão da variável não-linear com as demais consiste na transformação dessa variável. No nosso caso, consideramos variáveis não-lineares a altura da capa,  $H_c$ , e a altura da nervura,  $H_n$ . As transformações propostas são:

$$(11) \quad H_c' = H_c^{1/3}$$

$$(12) \quad H_n' = H_n^{1/2}$$

A partir da regressão, busca-se um modelo para o cálculo da reação paralela em função das variáveis explicativas. A forma geral do modelo é:

$$(13) \quad Y_{e_i} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n$$

onde:

- $Y_{e_i}$  = estimativa da variável explicada;
- $\beta_i$  = coeficientes estimados na regressão;
- $X_i$  = variáveis explicativas do modelo.

No caso específico, buscamos a seguinte relação:

$$V_{par} = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 H_c^{1/2} + \beta_3 H_n^{1/3} + \beta_4 K_y + \beta_5 K_p + \beta_6 F_v \quad (14)$$

A hipótese nula adotada para regressão do modelo é dada pela expressão seguinte:

- $H_0$ :

$$(15) \quad \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

Ou seja, todos os coeficientes da regressão são nulos. Já a hipótese alternativa é definida:

- $H_1$ :

$$(16) \quad \exists \beta_i \mid \beta_i \neq 0$$

Ou seja, existe pelo menos um coeficiente  $\beta$  não nulo e que, portanto, explica a série.

Uma das condições para utilização do teste está na distribuição dos resíduos; a diferença entre o valor original da variável resposta e o valor estimado da variável resposta por meio dos coeficientes obtidos na regressão.

Os resíduos,  $u_i$ , devem seguir uma distribuição normal, com

média zero e variância constante, denotada por  $\mu_i \sim N(0; \sigma^2)$ .

Os resíduos são fornecidos pelo programa que efetua a regressão. Esses resíduos são calculados a partir dos coeficientes estimados:

$$(17) \quad u_i = Y_i + Y e_i$$

Outra condição é a independência dos resíduos, a qual assumiremos como verdadeira pois, como se tratam de experimentos diferentes, não temos elementos para rejeitar que tal hipótese não ocorra. Da mesma forma, para avaliar a relevância de uma variável específica, utiliza-se o Teste-t.

A estatística *stat-t* refere-se ao nível de significância sob o qual se rejeita a hipótese nula. O valor da estatística “t” é obtido da distribuição “t” de student, por meio dos parâmetros, quantidade de observações, n e graus de liberdade, gl.

O número de graus de liberdade é definido como a diferença entre a quantidade de observações e a quantidade de coeficientes da regressão, incluindo o termo independente.

Para o teste da regressão individual, tem-se a hipótese nula:

$$(18) \quad \begin{aligned} & \bullet \text{ Ho:} \\ & \beta_i = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, o coeficiente avaliado  $\beta_i$  é nulo. Já a hipótese alternativa é definida:

$$(19) \quad \begin{aligned} & \bullet \text{ H1:} \\ & \beta_i \neq 0 \end{aligned}$$

Ou seja, o coeficiente  $\beta_i$  é não nulo.

A condição básica para utilização do teste é a mesma da regressão global.

A partir da Tabela 2 procedemos a regressão do modelo utilizando as seguintes variáveis:

- Variável explicada -  $R_{par}$  = reação na viga paralela
  - Variáveis explicativas:
    - $\lambda$  = razão entre  $l_y$  e  $l_x$ , onde  $l_x$  é o menor comprimento com sentido paralelo;
    - $H_n$  = altura da nervura;
    - $H_c$  = altura da capa;
    - $K_x$  = razão entre o momento de inércia da seção e o comprimento  $l_x$ ;
    - $K_y$  = razão entre o momento de inércia da seção e o comprimento  $l_y$ ;
    - $K_p$  = razão entre o momento de inércia da seção do pilar e seu comprimento;
    - $F_v$  = fissuração da viga;
- As variáveis  $K_y$  e  $K_x$  foram igualadas intencionalmente para

eliminar a diferença entre as rigidezes. Dessa forma  $K_x$  e  $K_y$  possuem uma relação linear perfeita, no caso a função identidade. Para efeito de regressão, uma delas deve ser eliminada. Eliminaremos  $K_x$ . Da mesma forma foi eliminada da análise a variável  $I_y$ , pois a variável  $\lambda$  é uma função desta.

O resultado da regressão fornece as informações constantes na Tabela 2 a seguir. Observe os valores da tabela ANOVA a qual nos referimos que também consta nessa Tabela 2.

**Tabela 2:** Tabela Anova: Regressão do modelo completo. Fonte: Autor (2022)

RESUMO DOS RESULTADOS								
<i>Estatística de regressão</i>								
R múltiplo	0,995103							
R-Quadrado	0,99023							
R-quad aj	0,986567							
Erro padrão	0,009596							
Observações	23							
ANOVA								
	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>			
Regressão	6	0,149344	0,024891	270,291	3,67E-15			
Resíduo	16	0,001473	9,21E-05					
Total	22	0,150818						
	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>	<i>95% inf</i>	<i>95% sup</i>	<i>Inf 95,0%</i>	<i>Sup 95,0%</i>
Interseção	0,363852	0,03738	9,73382	0,0%	0,284609	0,443094	0,284609	0,443094
$\lambda$	-0,1678	0,005289	-31,7279	0,0%	-0,17901	-0,15659	-0,17901	-0,15659
Hn	-0,0764	0,003609	-21,1719	0,0%	-0,08405	-0,06875	-0,08405	-0,06875
Hc	0,286254	0,023567	12,14615	0,0%	0,236293	0,336215	0,236293	0,336215
$K_y$	-3,8E-06	2,49E-06	-1,51617	14,9%	-9,1E-06	1,5E-06	-9,1E-06	1,5E-06
$K_p$	-2,2E-06	2,74E-07	-8,0185	0,0%	-2,8E-06	-1,6E-06	-2,8E-06	-1,6E-06
Fv	-0,00491	0,005589	-0,878	39,3%	-0,01675	0,006941	-0,01675	0,006941

Antes de procedermos a avaliação da regressão, devemos verificar a condição imposta para validade dos testes, qual seja, os retornos devem ter uma distribuição normal com média zero e variância  $\sigma^2$ , mediante a análise de resíduos.

A partir dos dados informados, podemos verificar a hipótese em questão por um teste estatístico de aderência da distribuição. Ao mesmo tempo em que testamos a distribuição, testamos seus parâmetros, média e variância, a partir de estimativas amostrais. Por tratar-se de uma amostra relativamente pequena, devemos utilizar um teste não paramétrico, no caso, KOLMOGOROV-SMIRNOV, ou KS. (Bussab, 2003)

A hipótese nula afirma que as quantias da distribuição empírica são iguais aos da distribuição parametrizada.

Nesse caso, definimos alfa, o nível de significância como 5,0%, que fornece o Dcrit, o valor D crítico, tabelado (Bussab,2003) para n igual a 25, de 0,275. Para o nosso estudo  $D = 0,081 < D_{crit} = 0,275$  a hipótese nula não é rejeitada

Satisfeitas as condições necessárias, procedemos à análise da regressão propriamente dita. A regressão como um todo se mostra bastante ajustada, com R2-ajustado igual a 0,98, sendo o máximo é 1,0. Este parâmetro indica que as variáveis explicam quase que totalmente o modelo.

Já a estatística “F” de Significância igual a  $3,67 \times 10^{-16}$  indica o nível de significância sob o qual não se rejeita a hipótese nula, qual seja, os coeficientes da regressão são todos nulos. Em geral, rejeita-se a hipótese nula a níveis entre 1% e 10%, bem superiores, portanto.

Os valores para a variável Fv é 0,393 ou 39,3%. Isso significa que a probabilidade de erro tipo I, qual seja, rejeitar a hipótese nula quando esta é verdadeira é de 39,3%. O coeficiente para Fv é -0,00491, ou -0,49%, que representa o valor dessa variável quando considerada a fissuração da viga.

Dessa forma, excluímos essa variável procedendo a nova regressão. Temos agora que a variável Ky apresenta valor-P de 18,5%, indicando alto nível de rejeição. Na avaliação preliminar constatamos que essa variável tem pouca influência no resultado, de modo que procederemos outra regressão excluindo-a. A nova regressão encontra-se na Tabela 3.

**Tabela 3:** Regressão do modelo sem Ky e FV. Fonte: Autor (2022)

RESUMO DOS RESULTADOS								
<i>Estatística de regressão</i>								
R múltiplo	0,99429							
R-Quadrado	0,988612							
R-quad aj	0,986081							
Erro padrão	0,009768							
Observações	23							
ANOVA								
	gl	SQ	MQ	F	le significação			
Regressão	4	0,1491	0,037275	390,6449	3,19E-17			
Resíduo	18	0,001718	9,54E-05					
Total	22	0,150818						
	Coeficientes	Erro padrão	Stat t	valor-P	95% inf	95% sup	Inf 95,0%	Sup 95,0%
Interseção	0,373772	0,037132	10,06599	0,0%	0,29576	0,451784	0,29576	0,451784
λ	-0,16866	0,005351	-31,5218	0,0%	-0,1799	-0,15742	-0,1799	-0,15742
Hn	-0,07541	0,003613	-20,8722	0,0%	-0,083	-0,06782	-0,083	-0,06782
Hc	0,27684	0,023074	11,99801	0,0%	0,228364	0,325316	0,228364	0,325316
Kp	-2,2E-06	2,69E-07	-8,30874	0,0%	-2,8E-06	-1,7E-06	-2,8E-06	-1,7E-06

Agora, então, podemos continuar a análise da nova regressão. O modelo é dado por:

$$(21) \quad V_{par} = 37,37 - 16,87\lambda - 7,54Hn^{1/2} + 27,68Hc^{1/3} - 2,2 \times 10^{-4} Kp$$

A variável  $K_p$ , rigidez do pilar, permaneceu no modelo devido ao seu grau de explicação. Entretanto, essa variável é, sem dúvida, de difícil avaliação prática, de modo que entendemos seja melhor suprimi-la do modelo de regressão, incluindo seu valor como margem de erro, dentro da parte não explicada. Assim, incluiremos esse valor na margem de erro.

O valor máximo dentro do modelo de regressão, em termos absolutos, para essa variável ocorre quando utilizamos a seção 100x100, é de:

$$(22) \quad \left[ \left( \frac{100 \times 100^3}{12} \right) + 270 \right] \times 2,2 \times 10^{-4} = -6,9\%$$

Como essa variável diminui o valor de reação na viga paralela, adotaremos a favor da segurança que seu valor seja nulo, de modo que a equação tem a seguinte forma:

A fórmula geral para a viga paralela é dada então por:

$$(23) \quad V_{par} = 37,37 - 16,87\lambda - 7,54Hn^{1/2} + 27,68Hc^{1/3}$$

De modo análogo, definimos a equação para a viga perpendicular. Neste caso, adicionaremos o valor referente à rigidez do pilar, pois esta parcela aumenta o valor da reação. (inversão dos sinais)

$$(24) \quad V_{pp} = 100 - Vl$$

$$(25) \quad V_{pp} = 100 - Vl + 6,9 = 62,63 + 6,9 + 16,87\lambda + 7,54Hn^{1/2} - 27,68Hc^{1/3}$$

$$(26) \quad V_{pp} = 69,53 + 16,87 + 7,54Hn^{1/2} - 27,68Hc^{1/3}$$

Por fim, de modo a garantir uma margem de segurança, tendo em vista as incertezas do modelo estabeleceremos um intervalo para as predições:

O intervalo para previsão individual para regressão multivariada é dado por: (Gujarati,2000)

$$(27) \quad Ye_i - t_{\alpha/2}ep(Y_i) \leq Ye_i \leq Ye_i + t_{\alpha/2}ep(Y_i)$$

onde:

- $Ye_i$  = estimativa da variável resposta  $i$ ;
- $t_{\alpha/2}$  = valor da distribuição t de student para o nível de significância  $\alpha$  bicaudal;
- $ep(Y_i)$  – erro padrão da observação  $i$  da variável resposta.

Observamos que o intervalo depende da própria estimativa, sendo que o cálculo do erro padrão envolve alto grau de complexidade. Dessa forma, atribuir margem de segurança vinculada à estimativa anularia todo o esforço de simplificação da expressão para cálculo da reação paralela, contrariando o objetivo deste trabalho.

Alternativamente, propõe-se utilizar o erro-padrão de uma previsão com valores extremos para as variáveis explicativas, o erro padrão é tanto maior quanto esses valores se distanciam da média dos dados amostrais. Chamaremos essa estimativa de previsão base de erro padrão e a denotaremos por  $X_0$ . Podemos utilizar, inclusive, valores que extrapolam os extremos.

Definimos os seguintes valores para a previsão base de erro padrão,  $X_0$  (Tabela 4).

**Tabela 4:** Extremos para variáveis explicativas.

Fonte: Autor (2022)

Tabela de Extremos das Variáveis Explicativas				
	$\lambda$	Hn*	Hc**	Kp
lim. superior	2,0	5,5	1,7	30864,2
lim. inferior	1,0	3,2	1,4	250,0
$X_0$	2,0	6,3	2,0	30864,2

O erro padrão da estimativa é calculado pela seguinte expressão:

(28)  $ep(Y_0) = \sqrt{\text{var}(Y_0)}$

(29)  $\text{var}(Y_0) = \hat{\sigma}^2 [1 + x_0' (X' X)^{-1} x_0]$

onde:

(30)  $\hat{\sigma}^2 = SQR / gl$

**SQR** = soma dos quadrados dos resíduos;

**gl** = número de graus de liberdade;

**X** é a matriz dos valores das variáveis explicativas acrescida de uma coluna unitária:

**$x_0$**  = vetor dos valores de  $x$  para a estimativa.

Fazendo o produto pela sua transposta e calculando o calculando a matriz inversa resultante, temos:

(31)  $x_0' (X' X)^{-1} x_0 = 1,924$

(32)  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,0 \\ 6,3 \\ 30.864 \end{bmatrix}$

Da tabela ANOVA, obtemos os dados para calcular a média da soma dos resíduos:

(33)  $\hat{\sigma}^2 = 0,001717/18 = 0,00095$

Então, a variância da estimativa é igual a:

(34)  $\text{var}(Y_0) = \hat{\sigma}^2 [1 + (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}] = 0,00095(1 + 1,924) = 0,00028$

O erro padrão procurado é igual a:

(35)  $ep(Y_0) = \sqrt{\text{var}(Y_0)} = \sqrt{0,00028} = 0,0167 = 1,67\%$

Resta estabelecer o nível de significância para o intervalo. Definiremos um nível de significância de 5,0% que corresponde a um grau de confiança de 100%-5% = 95%.

Como nos interessa unicamente que a previsão não seja menor que o valor real, por questão de segurança, utilizaremos o teste unicaldal para a estatística t. Nesse caso o valor de t é 1,73.

Assim a margem de erro é dada por;

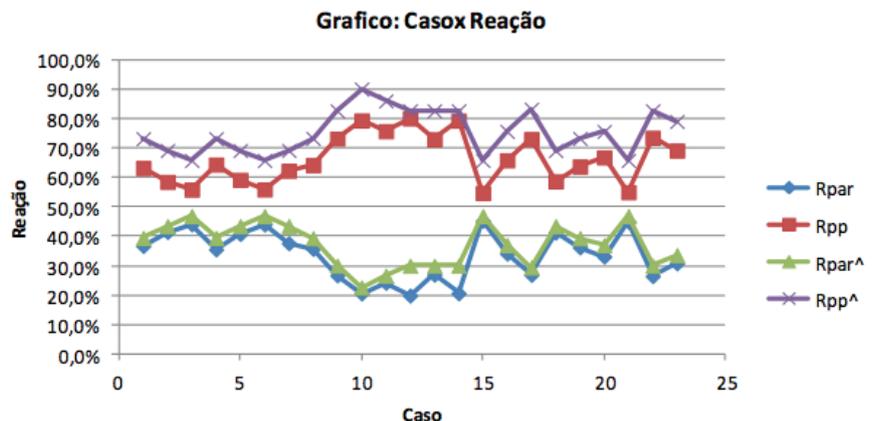
(36)  $\varepsilon(Y_0) = t_{\alpha} x ep(Y_0) = 1,73 x 1,67\% = 2,90\%$

Aplicando a margem de erro ao modelo, temos as expressões finais das reações das vigas:

(37)  $V_{pp} = 72,43 + 16,87\lambda + 7,54Hn^{1/2} - 27,68Hc^{1/3}$ , limitada a 100%.

(38)  $V_{par} = 40,27 - 16,87\lambda - 7,54Hn^{1/2} + 27,68Hc^{1/3}$

Aplicando essas expressões aos dados dos experimentos, têm-se os valores das reações calculadas pelo modelo. No gráfico da Fig.10, apresentamos os valores das reações calculadas pelo programa RE e os valores calculados pela regressão. As linhas do gráfico servem apenas para facilitar a visualização, sendo válidos para análise apenas os pontos.



**Figura 10**  
Reação calculada x reação estimada.  
Fonte: Autor (2022)

Observa-se no gráfico que a reação paralela se encontra em uma faixa entre 20% e 50%. O limite inferior é próximo ao estabelecido no modelo de (Carvalho, 2010). Já o limite de 50% é justificado pelo fato de que, na hipótese extrema, tem-se uma laje quadrada funcionando como laje maciça, logo a distribuição de carregamento deve ser igual a 50%.

Contribui para essa conclusão o fato de que a rigidez das vigas, - perpendiculares e paralelas - é ajustada para permanecerem iguais dadas variações em seus comprimentos.

Nas séries das reações perpendiculares, observamos certo distanciamento entre a série de regressão e a série original. Essa diferença refere-se à influência da rigidez do pilar.

Na hipótese extrema de rigidez do pilar a reação tende a alcançar o limite da margem de previsão. Já nas séries das reações paralelas, ocorre o inverso: a influência da rigidez do pilar somente poderá diminuir a reação paralela.

## 7 CONCLUSÕES

A primeira conclusão e mais importante desse trabalho é a de que não se pode negligenciar o carregamento nas vigas de bordo paralelas, uma vez que seu carregamento deve ser de, no mínimo, 20% do carregamento total. Assim, é necessário avaliar as características da laje nervurada (pré-moldada) a fim de calcular o valor estimado de carregamento.

Quanto à influência das variáveis, constatamos que a rigidez das vigas de bordo, tanto paralela quanto perpendicular, não são significativas, com influência inferior a 1,0% no resultado. Dada a pequena influência de rigidez das vigas, a fissuração destas tem menor relevância ainda, conforme se confirmou, da ordem de 0,97%.

Já a rigidez do pilar tem contribuição em torno de 6,9% na explicação do modelo de regressão.

Foi avaliada a influência do comprimento  $l_x$ , ou seja, foi verificado o comportamento da estrutura entre uma laje de 3,6m e outra de 5,2m para  $l_x$ , não tendo sido verificadas diferenças inferiores a 1,3%. Assim, as principais variáveis, em ordem de relevância, que apresentaram maior influência foram: altura da capa,  $\lambda$  ( $l_x/l_y$ ) e altura da nervura. A altura da capa, tem influência da ordem entre 40,0% e 55,0%, para alturas entre 3cm e 8cm.

O valor de  $\lambda$  tem influência entre 17,0% e 34,0%. A reação paralela em função dessa variável tem comportamento semelhante ao de uma laje maciça. A altura da nervura tem influência entre 23,0% e 47,0%. Em princípio, poder-se-ia imaginar que essa fosse a principal variável explicativa, uma vez que esta determina a rigidez das nervuras, as quais absorvem

carregamento no plano da laje, transferindo-o para as vigas perpendiculares. Entretanto, como se observou, a rigidez e geometria da capa mostraram-se de maior relevância.

O cálculo proposto está fundamentado em procedimento que utiliza outro modelo, com solução por elementos finitos. Portanto, além da incerteza referente a aproximação do modelo de regressão em relação ao método de resolução, há que se considerar, ainda a incerteza devida à aproximação do modelo original da realidade. Isso significa que, mesmo estando de acordo com o método original de cálculo, não se pode garantir a sua completa aderência ao comportamento real da estrutura.

Não obstante, agregada a margem de erro - a favor da segurança - espera-se que o comportamento estimado não se distancie de modo significativo do comportamento real e que eventuais discrepâncias se situem dentro dessa margem.

Do comportamento da estrutura, observa-se que as principais variáveis explicativas foram consideradas, uma vez que foram testados outros modelos alterando-se, por exemplo, a condição de apoio das vigas nos pilares, e constatando que essas modificações não alteraram significativamente os resultados.

Os resultados confirmam o comportamento teórico e ilustram o processo de transferência de esforços em função da alteração da rigidez em uma laje (inclusão das vigotas).

## 8 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2002. NBR 14.859-1/2002: *Laje pré-fabricada – Requisitos Parte 1 Lajes Unidirecionais*, ABNT. Rio de Janeiro.

BUSSAB, WILTON DE O. et al. , 2003. *Estatística Básica*, 5ª ed. Saraiva, São Paulo.

CAIXETA, DELMA P., 2010. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado*, 3ª ed. EdUFSCar. São Carlos.

CARVALHO, ROBERTO.C. E FIGUEIREDO, JASSON, 2010. *Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado*, 3ª ed., EdUFSCar, São Carlos.

CLÍMACO, J. C. T. DE SOUSA, 2008. *Estruturas de Concreto Armado*, 2ª ed., FINATEC, Brasília.

GUJARATI, DAMODAR N. , 2000. *Econometria Básica*, 3ª ed., Makron Books, São Paulo.

\_\_\_\_\_. *Manual RAMTM Elements V8i*, Release 12.5, Bentley.



ISBN: 978-65-84854-12-3

**QRL**



9 786584 854123