

EDITORA



UnB

# Física para Ciências Agrárias e Ambientais

Leonardo Luiz e Castro  
Olavo Leopoldino da Silva Filho



# **Física para Ciências Agrárias e Ambientais**



**Universidade de Brasília**

**Reitora**  
**Vice-Reitor**

Márcia Abrahão Moura  
Enrique Huelva

EDITORA



**UnB**

**Diretora**

Germana Henriques Pereira

**Conselho editorial**

Germana Henriques Pereira  
Fernando César Lima Leite  
Beatriz Vargas Ramos Gonçalves de Rezende  
Carlos José Souza de Alvarenga  
Estevão Chaves de Rezende Martins  
Flávia Millena Biroli Tokarski  
Izabela Costa Brochado  
Jorge Madeira Nogueira  
Maria Lídia Bueno Fernandes  
Rafael Sanzio Araújo dos Anjos  
Verônica Moreira Amado



# Física para Ciências Agrárias e Ambientais

Leonardo Luiz e Castro  
Olavo Leopoldino da Silva Filho



**Coordenadora de produção editorial**  
**Preparação e revisão**  
**Diagramação**

**Equipe editorial**

Luciana Lins Camello Galvão  
Tiago de Aguiar Rodrigues  
Tiago de Aguiar Rodrigues  
Leonardo Luiz e Castro

© 2018 Editora Universidade de Brasília

Direitos exclusivos para esta edição:  
Editora Universidade de Brasília  
SCS, quadra 2, bloco C, nº 78, edifício OK,  
2º andar, CEP 70302-907, Brasília, DF  
Telefone: (61) 3035-4200  
Site: [www.editora.unb.br](http://www.editora.unb.br)  
E-mail: [contatoeditora@unb.br](mailto:contatoeditora@unb.br)

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser armazenada ou reproduzida por qualquer meio sem a autorização por escrito da Editora.



Esta obra foi publicada com recursos provenientes do Edital DEG/UnB nº13/2017.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília

---

C355 Castro, Leonardo Luiz e.  
Física para Ciências Agrárias e Ambientais / Leonardo Luiz e Castro, Olavo Leopoldino da Silva Filho. – Brasília : Editora Universidade de Brasília, 2019.  
420 p. ; 23 cm. – (Série Ensino de Graduação).

ISBN 978-85-230-0957-1.

1. Física. 2. Ciências Agrárias. 3. Ciências Ambientais. I. Silva Filho, Olavo Leopoldino da. II. Título.

CDU 53:631

*A Magda, Lara, Regina e Elverte,  
que me deram suporte  
e sofreram minha ausência  
durante a escrita deste livro.*

*Leonardo*

*Dedico esta obra a minha esposa Ana Bárbara  
e a meu filho Olavinho  
pelo amor que tenho recebido deles todo este tempo  
e que, muitas vezes, transformo em texto.*

*Olavo*



# Agradecimentos

É enorme a quantidade de pessoas que possibilitam que um livro seja escrito no seio de uma universidade. São centenas de docentes, discentes, servidores, funcionários, trabalhadores em geral aos quais somos gratos. Não conseguiríamos citar todos sem cometer alguma injustiça. Portanto, iniciamos agradecendo a toda a comunidade da Universidade de Brasília de forma genérica e passamos a agradecimentos mais especificamente ligados à escrita deste livro que nos vieram à memória.

Agradecemos ao Instituto de Física da UnB, no qual desempenhamos nossas atividades de professores e pesquisadores, incluindo a escrita deste livro, influenciada por diversos diálogos com docentes, discentes e funcionários do instituto. Aos autores que nos apresentaram com textos complementares para este livro: Jorlandio Felix, Marco Aurélio Barbosa, Luiz Roncaratti e Alex Campos. Aos membros do Laboratório de Fluidos Complexos, pelo apoio e discussões didático-científicas, em especial ao professor Fabio Paula. Ao professor Pedro Neto, pelas conversas frutíferas sobre texto científico. Ao físico Alexandre de Paula, pelo suporte dado em diversas ocasiões. À professora Erondina de Lima, especialista em Física Ambiental, pelo parecer dado sobre este livro; ela teria sido nossa coautora caso a tivéssemos conhecido a tempo.

Ao Decanato de Ensino de Graduação da UnB, pelo processo de seleção de livros didáticos por meio do qual este livro foi escolhido para publicação. A toda a equipe da Editora UnB, pela oportunidade e pelo suporte. À equipe que trabalhou no trabalho final de editoração, da qual destaco Germana Pereira, Maria Osmarina Oliveira, Luciana Galvão, Wladimir Oliveira, Ana Alethéa e Denise de Oliveira. Em especial ao revisor Tiago Rodrigues, com quem muito interagimos para finalizar a obra. Ao Centro de Informática da UnB, pelo suporte tecnológico.

Aos professores da Faculdade de Agronomia e Medicina Veterinária da UnB, em especial Ana Maria Junqueira e Ernandes Alencar, pelas discussões produtivas e pela colaboração na reformulação da oferta de disciplinas de Física para os cursos de Ciências Agrárias e Ambientais. A diversos professores e estudantes dos cursos de Engenharia Florestal, Ciências Ambientais e Engenharia

Ambiental, com quem também tivemos discussões produtivas. A inumeráveis estudantes que cursaram disciplinas de Física para Ciências Agrárias, que ajudaram direta ou indiretamente a composição deste livro. Este livro foi escrito tendo esses estudantes em mente.

A todos que nos cederam imagens para uso no livro, em especial ao professor Carlos Alberto Varela, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, à equipe do Programa A3M (CEAD/UnB) e aos alunos Tiago Cassiano e Henrique Lima, bolsistas desse projeto. A todos que autorizaram fotografias em suas propriedades, como os casais Rodrigues (Celso e Ginamar) e Santos (Arnô e Eunice).

À equipe do Overleaf, em especial a Lian Tze Lim pela presteza na solução de vários problemas. A incontáveis desenvolvedores de pacotes para TeX/LaTeX, em especial a Lauro César Araujo, da equipe abnTEX2. Aos participantes de fóruns pelos quais resolvemos vários problemas relacionados a esses sistemas de editoração. Destacamos aqui o fórum TeX –LaTeX do site Stack Exchange, no qual até mesmo os próprios desenvolvedores dos pacotes frequentemente responderam às nossas questões.

Finalmente, gostaríamos de agradecer a nossos familiares e amigos que contribuíram de várias formas para a escrita deste livro. O apoio dessas pessoas foi fundamental para que pudéssemos dedicar o tempo necessário às minuciosas tarefas deste trabalho.

# Lista de figuras

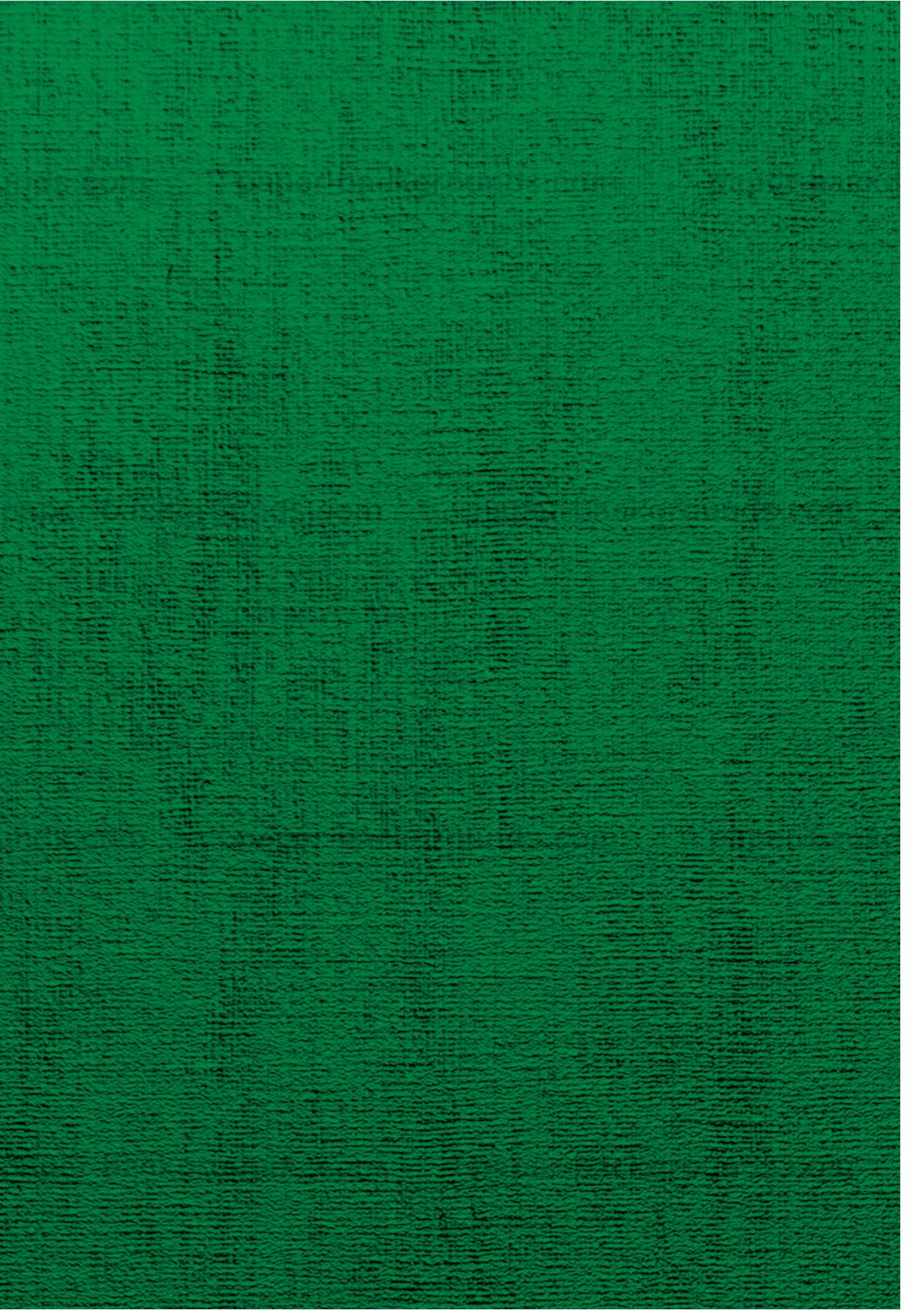
1	Fotografia de uma montagem do Parafuso de Arquimedes . . .	29
1.1	Capa original do livro de <i>Sir</i> Isaac Newton na qual ele apresentou as suas três famosas leis da mecânica . . . . .	35
2.1	Modelos de erro: quadrado ou círculo? . . . . .	46
2.2	Ilustração das relações $1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$ , $1 \text{ dam}^2 = 1 \times 10^2 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2$ e $1 \text{ dam}^3 = 1 \times 10^3 \text{ m}^3 = 1000 \text{ m}^3$ . . . . .	57
2.3	Representação de espaços para canteiros marcados num terreno plano . . . . .	60
2.4	Representação de espaços para canteiros marcados num terreno plano, decompostos em triângulos . . . . .	62
2.5	Representação de um vetor por uma seta . . . . .	63
2.6	Representação de alguns vetores em sistemas cartesianos . .	65
2.7	Representação de alguns vetores em sistema cartesiano . . . .	68
2.8	Representação de alguns vetores em sistema cartesiano . . . .	69
2.9	Representação dos componentes $x$ e $y$ de um vetor expresso por seu módulo $A$ e o ângulo $\theta$ com o eixo $x$ . . . . .	72
2.10	Representação de uma área plantada vista de cima . . . . .	73
2.11	Representação de uma superfície com uma parte inclinada . .	74
3.1	Ilustração de caminhos pelos quais pode haver movimentos lineares . . . . .	87
3.2	Representação de um movimento linear uniforme . . . . .	91
3.3	Representação de um movimento linear uniformemente variado	100
3.4	Fotografia de um pivô central em funcionamento próximo a uma rodovia . . . . .	104
3.5	Imagem de um moedor de cana-de-açúcar de operação manual	106
3.6	Identificação dos mecanismos de transmissão de rotação . . .	107
3.7	Representação esquemática de uma semeadora que lança sementes no solo ao ser empurrada . . . . .	108
4.1	Esquema de um arranjo de correia direta . . . . .	124
4.2	Esquema de um arranjo de correia cruzada . . . . .	124

4.3	Ilustração do cálculo das áreas para tratores de esteira e tratores com pneus . . . . .	131
5.1	Fotografia de um trator com um arado . . . . .	144
5.2	Fotografia de um trator visto por trás e representação esquemática de um trator, visto de frente ou de trás . . . . .	145
5.3	Representação das variáveis utilizadas no cálculo da inclinação de tombamento de um trator . . . . .	146
5.4	Representação da vista de trás de um trator apoiado sobre um plano inclinado de ângulo $\alpha$ . . . . .	147
5.5	Representação do mesmo trator da figura anterior com as rodas posicionadas dentro de um sulco de profundidade $p$ . . . . .	148
5.6	Representação do mesmo trator da figura anterior agora visto longitudinalmente . . . . .	149
5.7	Representação do mesmo trator da figura anterior agora visto longitudinalmente e exercendo tração . . . . .	150
6.1	Representação da velocidade de um carro após descer por rampas de diferentes alturas, sob ação exclusiva da gravidade . . . . .	163
6.2	Ilustração de estruturas elásticas que podem ser descritas pela Lei de Hooke . . . . .	168
6.3	Ilustração de uma mola sustentando um peso . . . . .	169
6.4	Ilustração de uma realização possível de um biodigestor . . . . .	173
6.5	Ilustração de uma miniusina que gera energia elétrica a partir do movimento de uma roda d'água . . . . .	174
6.6	Consumo de energia primária no mundo por fonte no ano de 2012.	182
6.7	(a) Esquemático de uma célula solar de silício convencional; (b) células Solares de banda intermediária . . . . .	184
7.1	Ilustração do Princípio de Pascal . . . . .	188
7.2	Fotografia de braços hidráulicos artesanais apresentados por estudantes . . . . .	189
7.3	Esquema para demonstração da Lei de Stevin . . . . .	191
7.4	Esquema de funcionamento de um macaco hidráulico . . . . .	197
7.5	Ilustração de um aspersor de água com funcionamento baseado na equação de Bernoulli . . . . .	202
7.6	Representação esquemática da montagem de um carneiro hidráulico, com reservatório, bomba e residência receptora da água . . . . .	204
7.7	Ilustração do princípio de funcionamento do carneiro hidráulico . . . . .	205
7.8	Representação gráfica do comprimento equivalente para o caso de uma válvula . . . . .	209
7.9	Diagrama de Moody usado para o cálculo do atrito de Darcy . . . . .	210
7.10	Arranjo de tubulações de exemplo . . . . .	211

7.11	Ilustração de uma câmara de ventilação para secagem de sementes . . . . .	213
7.12	Ilustração de um projeto simplificado de irrigação por gotejamento . . . . .	216
8.1	Representação de um termômetro com temperaturas mostradas em duas escalas . . . . .	223
8.2	Gráfico de pressão <i>versus</i> volume para um mol de gás ideal, com o valor da temperatura em <i>Kelvin</i> mostrado em cada curva . . . . .	230
8.3	Exemplos de processos termodinâmicos, que poderiam ser feitos em sequência . . . . .	232
8.4	Ilustração de um motor simples . . . . .	234
8.5	Ilustração simplificada de um motor de 2 tempos . . . . .	235
8.6	Esquema de funcionamento do motor . . . . .	236
8.7	Esquema de funcionamento do refrigerador . . . . .	236
8.8	Diagramas PV de processos termodinâmicos em um 1 mol de gás ideal . . . . .	239
8.9	Representação do ciclo de Carnot e suas quatro etapas . . . . .	247
8.10	Esquema do irrigador automático solar . . . . .	254
8.11	Esquema de um equipamento para controle de fitopatógenos por meio de aquecimento solar da água de irrigação . . . . .	261
9.1	Representação de superfícies esféricas <i>equipotenciais</i> para uma carga elétrica positiva (pontual ou esférica) . . . . .	278
9.2	Representação de linhas de campo elétrico que saem de uma carga positiva . . . . .	279
9.3	Representação de linhas de campo elétrico que entram numa carga negativa . . . . .	280
9.4	Representação de linhas de campo elétrico e superfícies equipotenciais que entram numa carga negativa . . . . .	280
9.5	Representação de dipolo elétrico, consistindo de uma carga elétrica positiva e outra negativa . . . . .	281
9.6	Representação de quadrupolo elétrico, consistindo de duas cargas elétricas positivas e outras duas negativas . . . . .	281
9.7	Representação de duas cargas elétricas de mesma polaridade: há repulsão . . . . .	282
9.8	Representação de interação entre uma parede carregada com cargas elétricas postivas e uma carga elétrica, pontual ou esférica, negativa: há atração . . . . .	282
9.9	Representação de onda eletromagnética propagando-se ao longo do eixo $x$ . . . . .	289
9.10	Ilustração do funcionamento de um dínamo de corrente alternada . . . . .	292
9.11	Mapas de condutividade elétrica do solo . . . . .	295
9.12	Comparação entre o mapa de produtividade (esquerda) e o mapa de salinidade do solo à profundidade igual a 30 <i>cm</i> (direita) . . . . .	298

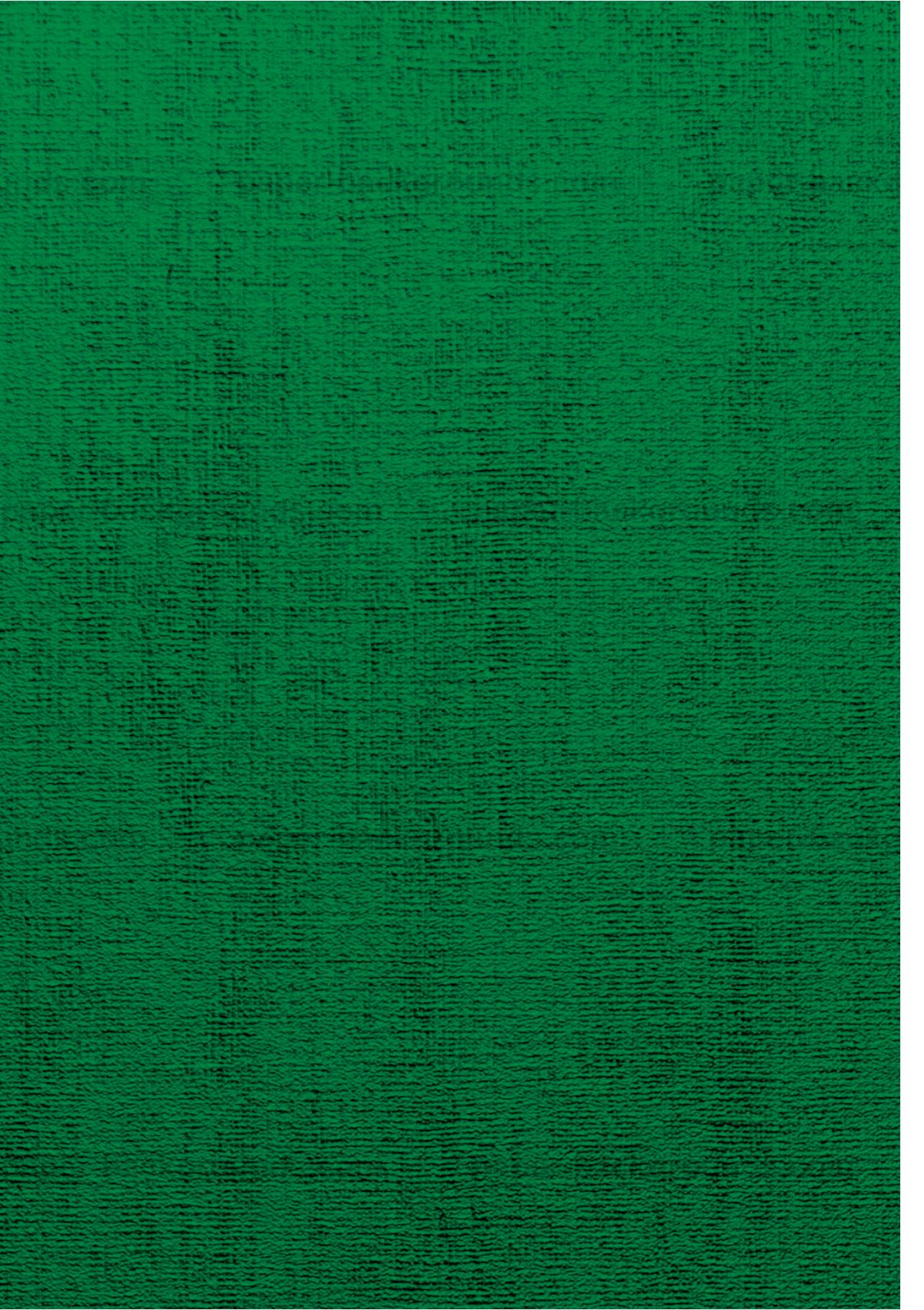
10.1	Representação de uma onda que se propaga linearmente . . .	304
10.2	Ilustração de corrente de ar passando por um tubo, formando ondas sonoras . . . . .	308
10.3	Ilustração do som propagando-se em frentes esféricas, de alta e baixa pressão do ar alternadas . . . . .	310
10.4	Representação de uma corda vibrando e gerando regiões de alta e baixa pressão no ar, configurando uma onda sonora . . . . .	311
10.5	Representação de ondas sonoras em tubos . . . . .	312
10.6	Representação de harmônicos em tubos abertos e fechados . .	313
10.7	Representação de frentes de ondas vindas de dois pontos, interferindo construtiva e destrutivamente . . . . .	315
10.8	Representação de um sonar de um barco sendo usado para mapeamento do leito do rio . . . . .	316
10.9	Ilustração do efeito Doppler . . . . .	317
10.10	Espectro luminoso explicado . . . . .	319
10.11	Espectro luminoso explicado . . . . .	319
10.12	Espectro em fundo cinza . . . . .	319
10.13	Espectro de absorvância das clorofilas A e B . . . . .	323
10.14	Ilustração da técnica da triangulação . . . . .	325
10.15	Representação da técnica da triangulação com três detectores	326
10.16	Curvas características da reflectância do solo e comprimentos de onda de absorvância das clorofilas A e B . . . . .	327
10.17	Ângulo de incidência, de reflexão e de refração . . . . .	329
10.18	Múltipla reflexão e refração sobre uma lente . . . . .	329
10.19	Prisma divide a luz branca em cores . . . . .	330
10.20	Decomposição da luz branca em luzes de diversas cores . . . .	332
10.21	Representação da imagem real e da imagem virtual de um objeto refletido . . . . .	335
10.22	Da esquerda para a direita: imagem real, foco, espelho e imagem virtual . . . . .	336
10.23	Ilustração de uma antena parabólica, com raios incidindo paralelamente, uns aos outros, e sendo refletidos pela superfície da antena de modo a convergir ao foco . . . . .	337
10.24	Ilustração de um conjunto de espelhos especialmente orientados para direcionar raios ao mesmo ponto de captação de energia	338
10.25	Por que o céu é azul durante o dia e avermelhado ao nascer e ao pôr do sol? . . . . .	339
10.26	Por que o céu fica colorido ao amanhecer ou anoitecer? . . . .	339
10.27	Divisão da luz branca em luzes coloridas ao passar por uma região de mais alto índice de refração, como o vidro ou a água . . . .	340
10.28	Fotografia de um arco-íris . . . . .	341
10.29	Ilustração da separação das cores da luz de uma gotícula de água no ar . . . . .	342

10.30	Ilustração de raios de luz colorida vindos de gotículas de água diversas, causando inversão aparente das cores do arco-íris . . .	342
10.31	Resultado do modelo teórico para a parte imaginária do índice de refração da clorofila B . . . . .	344
10.32	Diagrama de energia . . . . .	345
11.1	Gráfico que ilustra o comportamento da parte imaginária da constante dielétrica da noz e de uma de suas pragas em um intervalo de frequência . . . . .	361
11.2	As séries de Lyman, Balmer e Paschen em um diagrama de energia	366
11.3	Espectros de emissão e absorção para o hidrogênio . . . . .	370
11.4	Climograma de Brasília . . . . .	374
11.5	Ilustração da posição da Terra em relação aos raios solares durante o verão do Hemisfério Norte (esquerda) e durante o verão do Hemisfério Sul (direita) . . . . .	375
11.6	Aproximação do comportamento funcional da parte imaginária da constante dielétrica da praga da noz . . . . .	379



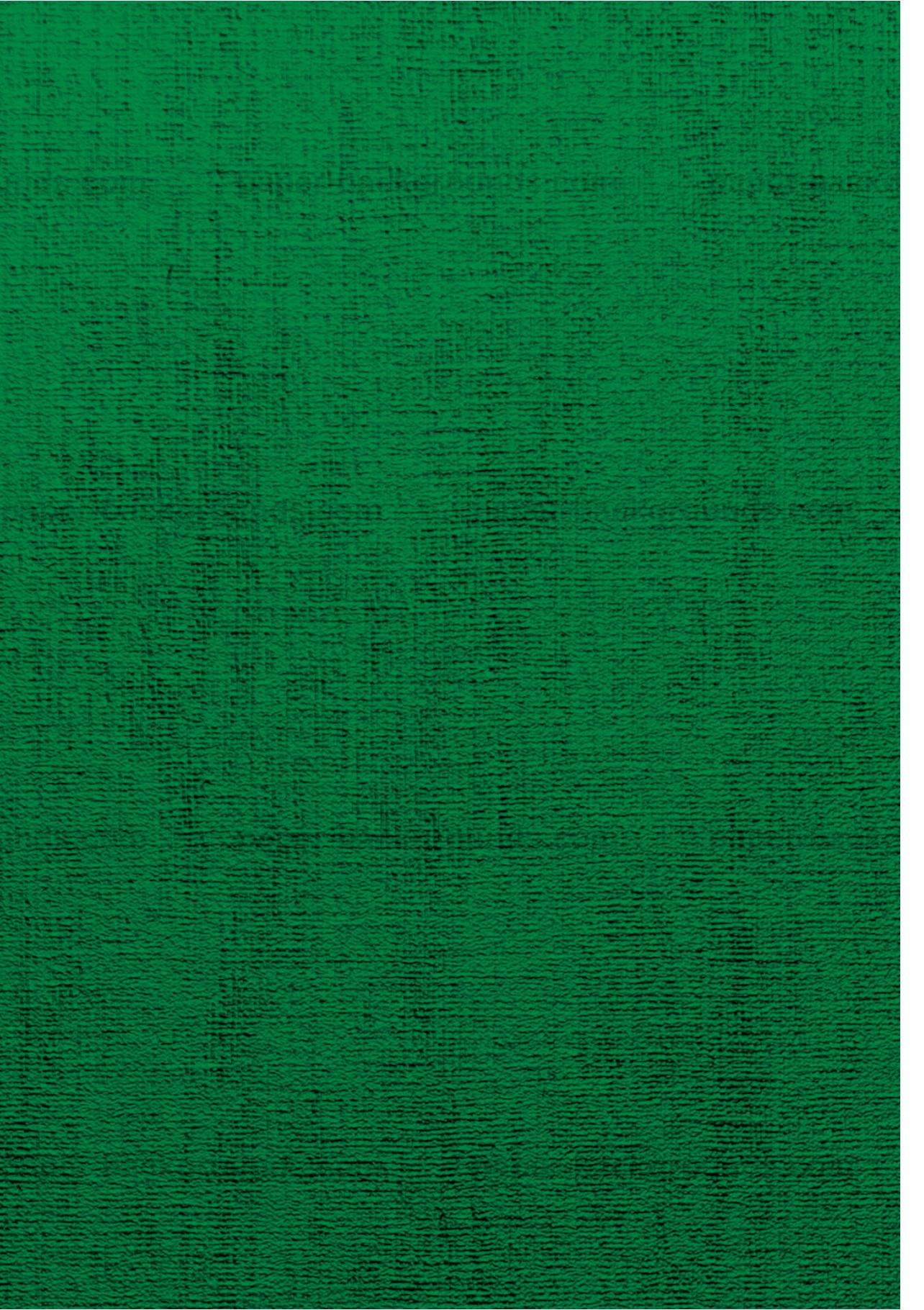
# Lista de tabelas

2.1	Definições regionais de alqueire. . . . .	55
2.2	Polaridade das funções seno e cosseno dentro de cada quadrante	71
4.1	Eficiência de campo em termos do tipo de operação realizada .	127
4.2	Valores das constantes $c$ e $\phi$ em termos do tipo de solo . . . . .	130
4.3	Valores da coesão, do atrito e do coeficiente de penetração do pneu no solo em função do tipo de solo . . . . .	130
6.1	Unidades comuns de energia . . . . .	164
7.1	Comprimentos equivalentes para alguns acessórios e alguns diâmetros . . . . .	209
8.1	Três temperaturas expressas nas três principais escalas . . . . .	224
9.1	Polaridade de $q_i q_j$ para várias combinações de polaridades de $q_i$ e $q_j$ . . . . .	274
9.2	Permissividade elétrica de algumas substâncias . . . . .	276
11.1	Exemplo de decaimento radioativo exponencial . . . . .	372
11.2	Alguns isótopos utilizados para datação radiométrica, com suas respectivas meias-vidas . . . . .	372



# Lista de quadros

2.1	Unidades básicas do SI . . . . .	50
2.2	Algumas unidades derivadas do SI . . . . .	51
2.3	Prefixos do SI . . . . .	52
2.4	Algumas unidades fora do SI, e sua relação com as unidades do SI	53
2.5	Elementos dos vetores explicados . . . . .	64
2.6	Efeito que um escalar acarreta em vetor ao multiplicá-lo . . . . .	66
3.1	Relação entre grandezas translacionais e grandezas rotacionais	102
7.1	Caracterização dos estados da matéria . . . . .	185
8.1	Processos de mudança de estado físico . . . . .	245



# Lista de símbolos

As variáveis listadas a seguir foram adotadas neste livro de forma a minimizar o uso do mesmo símbolo para grandezas distintas. Inevitavelmente, algumas grandezas terão o mesmo símbolo que unidades de medida, como a massa, que é representada tradicionalmente por  $m$ , mesmo símbolo da unidade metro. Portanto, recomenda-se, na resolução de exercícios, evitar misturar variáveis e unidades, substituindo de uma vez só, em cada cálculo, as variáveis pelos valores com unidades. Por exemplo, na equação  $F = ma$  (força é igual a massa vezes aceleração), uma substituição de  $a$  por (digamos)  $2 \text{ m/s}^2$  causaria que dois símbolos  $m$  existissem na mesma expressão, um para a massa, outro para o metro. Isso seria evitado ao se substituir no mesmo tempo a massa por (digamos)  $5 \text{ kg}$ , de modo que o cálculo ficaria assim:  $F = ma = 5 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s}^2 = 10 \text{ N}$ , onde fica evidente que, depois do segundo símbolo de “igual”, as letras representam unidades.

Variável	Grandeza representada	Nota
$A$	área	
$A, B, C\dots$	várias medidas de uma grandeza arbitrária, usadas como exemplo	
$\alpha, \beta, \gamma$	radiações	
$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\dots$	vários vetores, como exemplo	
$a$	aceleração	
$\mathcal{B}$	campo magnético	
$D$	diâmetro	ou “distância típica” no cálculo do número de Reynolds
$d$	deslocamento, distância	
$\mathcal{D}$	dose absorvida	“D” em letra gótica

$\Delta X$	variação ou margem de erro da medida X	$\Delta$ : “delta” maiúsculo
$dX$	elemento infinitesimal, diferencial da grandeza X	
$\delta X$	diferencial inexata da grandeza X	
$E$	energia	
$\mathcal{E}$	campo elétrico	
$\epsilon$	permissividade elétrica	
$\eta$	coeficiente de viscosidade	eta minúsculo
$F$	força	
$F_{at}$	força de atrito	
$F_e$	força elétrica	
$F_g$	força gravitacional	
$F_k$	força elástica	
$F_m$	força magnética	
$\phi$	ângulo, ângulo azimutal (coordenadas polares ou esféricas)	
$h$	altura, elevação	
$H$	dose equivalente	
$I$	corrente elétrica	
$i, j, k, \dots$	índices inteiros para identificar ou contar corpos	
$K$	energia cinética	
$k$	constante elástica	
$\vec{k}$	número de onda, vetor de onda ( $\vec{k}$ )	
$\kappa$	constante eletrostática de um meio	
$\kappa_0$	constante de Coulomb (constante eletrostática do vácuo)	
$L$	lado	
$L$	momento angular	
$l$	comprimento	
$m$	massa	o mesmo símbolo representa a unidade “metro” e o prefixo “mili”

$\mu$	permeabilidade magnética	às vezes usada como coeficiente de atrito, embora preferamos especificar $\mu_{din}$ e $\mu_{est}$ (a seguir)
$\mu_{din}$	coeficiente de atrito dinâmico	
$\mu_{est}$	coeficiente de atrito estático	
$N$	força normal	
$\hat{n}$	vetor normal unitário	
$P$	peso	
$\mathcal{P}$	potência	
$p$	momento linear	
$p$	pressão	
$Q$	calor	
$\mathcal{Q}$	vazão	em letra cursiva para diferenciar de $Q$ (calor)
$\mathcal{Q}$	fator de qualidade	"Q" em letra gótica
$q$	carga elétrica	
$r$	coordenada radial	
$r, \theta$	coordenadas polares	
$r, \theta, \phi$	coordenadas esféricas	
$R$	raio	
$\mathcal{R}$	resistência elétrica	
$\Re$	número de Reynolds	"R" em letra gótica
$\rho$	densidade	"rô" minúsculo
$\sigma_X$	desvio padrão de uma série de medidas da medida X	$\sigma$ : "sigma" minúsculo
$T$	temperatura	não confundir com $\tau$
$\tau$	torque, momento de força	$\tau$ : "tau" minúsculo
$\omega$	velocidade angular	$\omega$ : "ômega" minúsculo
$\Omega$	ohm (unidade de resistência elétrica)	$\Omega$ : "ômega" maiúsculo
$\mathcal{T}$	força de tensão	

$T$	temperatura	em muitas equações da termodinâmica, $T$ significa “temperatura absoluta”, de modo que o uso de outra unidade além do Kelvin (K) causará erro
$T_C$	temperatura em graus Celsius	
$T_F$	temperatura em graus Fahrenheit	
$T_K$	temperatura em Kelvins	
$\theta$	ângulo, ângulo polar (coordenadas polares ou esféricas)	
$\theta_i$	ângulo inicial, ângulo de incidência	
$\theta_f$	ângulo final, ângulo de reflexão	
$\theta_r$	ângulo de refração	
$U$	energia potencial	
$U_g$	energia potencial gravitacional	
$U_k$	energia potencial elástica	
$U_e$	energia potencial elétrica	
$U_m$	energia potencial magnética	
$\mathcal{U}$	diferença de potencial elétrico (voltagem)	
$v$	velocidade	
$\mathcal{W}$	trabalho	do inglês <i>work</i>
$X$	grandeza ou valor arbitrário, como exemplo	
$x$	deformação linear	
$x, y, z$	eixos de um plano cartesiano	
$\bar{X}$	valor esperado, melhor estimativa da grandeza $X$	
$\mathfrak{X}$	exposição	$X$ em letra gótica

# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>27</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>33</b>
<b>2 Medição</b>	<b>39</b>
2.1 Grandezas, medidas, padrões e unidades . . . . .	40
2.2 Sistemas de unidades e conversões . . . . .	50
2.3 Grandezas escalares e vetoriais . . . . .	62
2.4 Uso de cálculo diferencial e integral . . . . .	74
2.5 Mecânica . . . . .	75
2.6 Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	76
<b>3 Cinemática</b>	<b>85</b>
3.1 Partícula e centro de massa . . . . .	85
3.2 Movimento uniforme . . . . .	90
3.3 Cálculo de velocidade de fluxo e vazão de rios . . . . .	94
3.4 Movimento linear uniformemente variado . . . . .	97
3.5 Translação e rotação . . . . .	100
3.6 Pivô central de irrigação . . . . .	102
3.7 Transferência de rotação em máquinas . . . . .	104
3.8 Uso de cálculo diferencial e integral . . . . .	109
3.9 Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	111
<b>4 Dinâmica</b>	<b>119</b>
4.1 Leis de Newton . . . . .	119
4.2 Corpo rígido . . . . .	120
4.3 Moenda . . . . .	122
4.4 Descritores físicos e descritores específicos . . . . .	123
4.5 Tipos de força num corpo rígido . . . . .	128
4.6 Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	132
<b>5 Estática</b>	<b>135</b>
5.1 Equilíbrio de um ponto material . . . . .	135

5.2	Equilíbrio translacional . . . . .	136
5.3	Equilíbrio rotacional . . . . .	137
5.4	Equilíbrio total de um corpo rígido . . . . .	140
5.5	Prevenção de tombamento de tratores . . . . .	144
5.6	Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	151
<b>6</b>	<b>Trabalho e energia</b>	<b>159</b>
6.1	Trabalho . . . . .	159
6.2	Energia . . . . .	161
6.3	Energia cinética e potencial . . . . .	164
6.4	Teorema trabalho-energia . . . . .	170
6.5	Potência . . . . .	171
6.6	Conversão de energia no campo . . . . .	172
6.7	Exercícios adicionais sobre trabalho e energia . . . . .	175
6.8	Fontes renováveis de energia . . . . .	176
6.9	Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	177
<b>7</b>	<b>Mecânica dos fluidos</b>	<b>185</b>
7.1	Hidrostática . . . . .	186
7.2	O macaco hidráulico . . . . .	195
7.3	Hidrodinâmica . . . . .	197
7.4	Hidrodinâmica do fluido ideal . . . . .	198
7.5	Usinas hidrelétricas . . . . .	201
7.6	Aspersores . . . . .	202
7.7	O carneiro hidráulico . . . . .	203
7.8	Escoamento de fluidos reais . . . . .	205
7.9	Escoamento laminar e turbulento . . . . .	206
7.10	Perda de carga . . . . .	207
7.11	Ventilação na secagem de sementes . . . . .	212
7.12	Irrigação por gotejamento . . . . .	214
7.13	Anomalias da água . . . . .	216
7.14	Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	218
<b>8</b>	<b>Termodinâmica</b>	<b>221</b>
8.1	Temperatura, equilíbrio térmico e a Lei zero da termodinâmica . . . . .	221
8.2	Energia interna, calor, trabalho e a Primeira lei da termodinâmica . . . . .	226
8.3	O modelo do gás ideal . . . . .	228
8.4	Processos termodinâmicos e máquinas térmicas . . . . .	231
8.5	Entropia e a Segunda lei da termodinâmica . . . . .	241
8.6	Calor específico, calor latente e a Terceira lei da termodinâmica . . . . .	244
8.7	O ciclo de Carnot . . . . .	246
8.8	Entropia e desorganização . . . . .	250
8.9	Irrigador automático solar . . . . .	254

8.10	Controle térmico do ambiente na pecuária . . . . .	255
8.11	Condução de calor . . . . .	257
8.12	Controle da temperatura do solo . . . . .	260
8.13	Controle de pragas na irrigação por aquecimento da água . . . . .	261
8.14	Uso de cálculo diferencial e integral . . . . .	264
8.15	Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	265
<b>9</b>	<b>Eletromagnetismo</b>	<b>273</b>
9.1	Eletricidade . . . . .	273
9.2	Carga, força, potencial e campo elétrico . . . . .	273
9.3	Separação eletrostática de sementes . . . . .	283
9.4	Corrente elétrica . . . . .	283
9.5	Magnetismo . . . . .	286
9.6	Força e campo magnéticos . . . . .	287
9.7	Fluxo magnético e indução eletromagnética . . . . .	289
9.8	Dínamos . . . . .	291
9.9	Indutância e impedância . . . . .	293
9.10	Agricultura de precisão . . . . .	294
9.11	Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	298
<b>10</b>	<b>Física ondulatória</b>	<b>301</b>
10.1	Tipos de onda . . . . .	302
10.2	Descrição matemática das ondas . . . . .	304
10.3	Acústica . . . . .	309
10.4	Uso de sonar para medida de profundidade das águas . . . . .	315
10.5	Óptica . . . . .	318
10.6	Óptica física: a equação de onda . . . . .	318
10.7	Óptica geométrica . . . . .	328
10.8	Refletores parabólicos e usinas de energia solar . . . . .	337
10.9	A luz e a atmosfera . . . . .	338
10.10	Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	343
<b>11</b>	<b>Radiações</b>	<b>353</b>
11.1	Radiação corpuscular . . . . .	354
11.2	Radiação eletromagnética . . . . .	355
11.3	Dualidade onda-partícula . . . . .	355
11.4	Aplicação de radiação na agricultura . . . . .	358
11.5	Proteção radiológica e dosimetria . . . . .	361
11.6	Níveis de energia de átomos, absorção e emissão de fótons . . . . .	365
11.7	Decaimento radioativo e meia-vida . . . . .	370
11.8	Meteorologia, Climatologia e o aquecimento global . . . . .	373
11.9	Soluções dos exercícios deste capítulo . . . . .	378

<b>Apêndice A – Lista de Constantes e Unidades</b>	<b>393</b>
<b>Apêndice B – Lista de fatores de conversão</b>	<b>397</b>
<b>Anexo A – Unidades de medida agrárias</b>	<b>401</b>
<b>Referências</b>	<b>405</b>
<b>Índice remissivo</b>	<b>415</b>

# Apresentação

Hidráulica, Máquinas agrícolas, Agroclimatologia, Física dos solos. São muitas as disciplinas presentes em currículos de cursos das chamadas Ciências Agrárias. Em muitos desses currículos, existem disciplinas mais básicas destinadas a introduzir os conceitos físicos gerais necessários ao entendimento de temas mais complexos.

Uma dessas disciplinas é Física para Ciências Agrárias, para a qual este livro foi inicialmente escrito, ainda em formato de apostilas. Obrigatória em cursos como Agronomia e Engenharia Florestal, essa disciplina passou por transformações significativas, as quais procuramos contemplar. A primeira transformação foi a divisão em outras duas disciplinas: *Física Teórica para Ciências Agrárias* e *Física Experimental para Ciências Agrárias*. A segunda foi a inclusão da disciplina teórica no currículo do curso de Ciências Ambientais, o que nos encorajou a ampliar a abrangência e o título deste livro para *Física para Ciências Agrárias e Ambientais*.

Aliás, sobre a relação agrárias-ambientais, valem algumas palavras. Como se sabe, a própria Engenharia Florestal parece ser entendida ora como agrária, ora como ambiental, seguindo uma tendência de se arraigar o tema “meio ambiente” às ciências agrárias. Há inúmeros trabalhos acadêmicos que adotam essa perspectiva. Aqui estão dois: a revista acadêmica *Ciências Agrárias e Ambientais*, lançada em 2003, pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná; a *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, coordenada pela Universidade Federal de Campina Grande. Destacamos ainda o curso *Engenharia Agrícola e Ambiental*, criado pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Assim, este livro, criado para atender a uma disciplina básica, pretende trabalhar conceitos da Física para as ciências agrárias e ambientais. Mas para que estudar Física? É muito comum que estudantes de Ciências Agrárias façam essa pergunta, ao professor, aos colegas ou a si mesmos. Nem sempre o estudante busca uma resposta para essa pergunta às vezes feita de forma desafiadora como quem diz “a Física não tem utilidade para mim”. Mas o questionamento pode ser autêntico. Atentos a essa questão, tivemos conhecimento do trabalho de Ana Lúcia Figueiredo de Souza Nogueira (NOGUEIRA, 2008), cuja dissertação

de mestrado teve como tema a adaptação curricular de Física para Ciências Agrárias. Nessa pesquisa, ela elaborou uma lista diversos temas de Ciências Agrárias (particularmente a Agronomia) agrupadas de acordo com a área da Física à qual estão relacionado. A essa lista, acrescentamos também aplicações citadas por Emico Okuno (1986), especialista em radiações. Juntando as duas listas, temos:

- Mecânica:
  - velocidade das águas nos canais;
  - irrigação por sulcos;
  - irrigação por aspersão;
  - pivô central;
  - máquinas agrícolas;
  - conjunto moto-bomba;
  - carneiro hidráulico;
  - aplicador portátil de produtos químicos via água de irrigação;
  - empuxo exercido por um líquido sobre uma superfície plana imersa;
- Termodinâmica:
  - germinação e crescimento de plantas;
  - meteorologia e climatologia;
  - secagem de sementes;
- Ondas:
  - sensoriamento remoto;
  - localização por GPS;
- Eletromagnetismo:
  - separador eletrostático de sementes;
  - cercas elétricas;
  - motor de corrente contínua;
- Noções de Física quântica:
  - uso de radiação no combate de pragas e conservação de alimentos;
  - indução de mutações para melhoramento genético.

Dessa forma, fica claro que é importante que a formação de um profissional de Ciências Agrárias tenha um conhecimento relativamente amplo da Física. Tal conhecimento pode ajudá-lo, em diversas situações, a pensar ou propor soluções adequadas para contextos práticos e usuais. Diferentemente de um físico, porém, um cientista agrário precisa também levar em considerações outras variáveis que não são apenas aquelas relacionadas a uma teoria sobre o mundo natural. Assim, não basta a esse profissional conhecer as leis da Física aplicáveis a uma situação concreta particular e, com isso, ser capaz de propor uma solução *fisicamente adequada*. O profissional deverá ainda ser capaz de levar em consideração questões econômicas e sociais que perpassam a situação em relevo, de modo que a solução física proposta seja também *concretamente adequada*.

Muitas vezes, entretanto, propor uma solução concretamente adequada implica ter em mãos várias soluções fisicamente adequadas, cada qual apresentando uma adequação econômico-social maior ou menor.

Assim, por exemplo, considere uma situação em que se deseja levar água de um ponto mais baixo a um ponto mais alto de um certo terreno. Uma solução possível é usar o parafuso de Arquimedes: máquina inventada pelo famoso cientista da Antiguidade Clássica (séc. III a.C.) justamente para esse fim. Entretanto, sabe-se que a passagem da água de um nível ao outro demandará algum gasto de energia. A solução física está dada, em princípio, pela proposição do uso do parafuso de Arquimedes, mas a solução concreta está ainda longe de ser estabelecida. Para que isso ocorra, caberá ao engenheiro agrônomo dizer *de onde* virá a energia necessária para pôr o parafuso de Arquimedes em funcionamento. Virá da força manual de uma propriedade com muitos funcionários e um uso mais esporádico do sistema? Virá da força animal, uma vez que o proprietário da fazenda possui animais que poderiam ser utilizados para esse fim? Ou poderia vir do funcionamento de um moinho de vento, já que a propriedade fica em lugar amplamente abastecido por esse tipo de energia? Ou quem sabe um motor movido a energia elétrica? Seja qual for a resposta, ela versa sobre *transformação de uma forma de energia em outra* e essa, de fato, é uma situação muito comum na prática.

Nesse sentido, a obra que aqui se introduz tem por finalidade dar ao aluno de Ciências Agrárias e Ambientais um conhecimento físico amplo o suficiente para que ele possa exercer adequadamente sua profissão, ao lançar mão de uma sensibilidade para as dimensões econômico-sociais desenvolvidas ao longo de seu curso.

**Figura 1:** Fotografia de uma montagem do Parafuso de Arquimedes



Fonte: Wikimedia Commons (2007b).

Há ainda uma característica deste livro que merece atenção. Normalmente, cursos básicos de Física são desenvolvidos estritamente no âmbito da própria Física, atendo-se às suas leis fundamentais e aplicações estritas. Entretanto, sabemos que o ramo da Engenharia necessita, pela particularidade de seus âmbitos de aplicação, muitas vezes estender as expressões físicas puramente fundamentadas em elementos fundamentais para incluir um contexto extremamente complexo relativo a um sem-número de variáveis intervenientes. Assim, não raro, temos cursos básicos de Física que *conversam* de modo insuficiente, quando muito, com suas sequências de cursos avançados da Engenharia, mostrando exatamente essa relação e a necessidade dela, dando ao próprio ensino de Física para as Engenharias uma justificação ulterior.

## Organização deste livro

Este livro foi estruturado para servir principalmente como livro-texto em cursos universitários. Estimamos que o conteúdo seria bem estudado em uma ou duas disciplinas, totalizando um total de 60 horas. Assim, dividimos os temas de modo que cada capítulo corresponda aproximadamente a uma atividade avaliativa, como uma prova ou uma lista de exercícios, e cada seção corresponda a uma lição, ou a uma *aula*, ou a um encontro entre o professor e os alunos.

Nos capítulos, há uma distinção entre dois tipos de questões:

- **exercício:** questão na qual o aluno sabe *o que* fazer e também sabe imediatamente *como* fazer;
- **problema:** questão na qual o aluno sabe *o que* fazer, mas deve pensar por algum tempo para descobrir *como* fazer.

Para os exercícios, as soluções estão disponíveis no final dos capítulos. Para os problemas, as soluções não são dadas. Há poucos casos em que o exercício tem complexidade para ser classificado como problema, mas continua como exercício pelo fato de sua solução ser dada no final do capítulo, de modo que o leitor possa ler partes da solução quando não souber como continuar.

Para completar, citemos

- **investigação:** questão na qual o aluno *não* sabe *o que* fazer, nem exatamente *como* fazer.

Esse tipo de investigação é mais comum no âmbito do ensino de Matemática, no qual gráficos são apresentados com pouco ou nenhuma instrução (além de “investigue”) para que o próprio aluno descubra o que há para ser descoberto.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Discussões em inglês sobre esse conceito encontram-se em: <https://math4teaching.com/exercises-problems-and-math-investigations/>; <http://mathandmultimedia.com/2011/04/07/math-exercise-problem-and-investigation/>. Acesso em: 3 set. 2018.

Naturalmente, o aluno deverá saber como fazer o exercício se tiver lido e entendido o texto. Na verdade, é por meio dos próprios exercícios que o aluno saberá se entendeu o texto de fato. Para que essa autoavaliação seja possível, as soluções dos exercícios são apresentadas ao final de cada capítulo. Por outro lado, os problemas são criados para que os alunos passem muito tempo pensando sobre o assunto, refletindo, raciocinando, discutindo entre si ou com o professor. Por isso, as soluções dos problemas não são apresentadas.

Vários elementos do texto são numerados, para facilitar a referência a eles. A numeração sempre inclui o número do capítulo seguido de um ponto. Por exemplo, as equações do capítulo 2 são numeradas como 2.1, 2.2, 2.3, e assim por diante. Da mesma forma são numeradas as figuras e as tabelas. Outros elementos numerados são as definições, os teoremas, as demonstrações e os textos complementares.

Alguns pequenos textos como este, colocados dentro em meio aos capítulos, apresentam informação adicional e opcional, podendo ser omitidos da leitura sem prejuízo da continuidade do texto principal.

Nem sempre o estudante de Ciências Agrárias tem o conhecimento de cálculo necessário para estudar uma certa equação em sua forma diferencial ou integral. Por isso, as equações são apresentadas, nas seções principais dos capítulos, em formas mais simples. Uma seção chamada “Uso de cálculo diferencial e integral” é incluída ao final de alguns capítulos, em que se discute como o cálculo diferencial e integral pode ser aplicada ao tema daquele capítulo. Em outros capítulos mais avançados, alguns exercícios exigem conhecimento de cálculo diferencial ou integral, o que é avisado no início do enunciado dos exercícios.

Como recursos de formatação de texto, de forma geral,

- aspas duplas (“assim”) são usadas para
  - 1) citar textos de outros autores dentro dos enunciados deste livro (ex.: « Nas palavras do físico Albert Einstein, “conhecer o pensamento de Deus”. »),
  - 2) referir-se a nomes e expressões em si mesmos (ex.: « Outra palavra usada para descrever a Física foi “refinamento”. »),
  - 3) indicar linguagem informal ou figurada (ex.: « a Física ocupa-se dos fundamentos dos fenômenos, ainda que não necessariamente fundamentos “mais fundamentais” »);
- aspas simples (‘assim’) são usadas para “aspas dentro de aspas”, ou seja, aspas dentro de trecho que já está entre aspas (ex. « Abbagnano afirma: “Hertz, em ‘Princípios de Mecânica’, dá ênfase ao mesmo conceito” »);

- aspas angulares (« assim ») são usadas para colocar entre aspas trechos que já têm partes entre aspas duplas e por algum motivo não queremos transformar essas aspas duplas em aspas simples (esta lista está cheia de exemplos desse uso);
- itálico (*assim*) é usado para
  - 1) expressões em línguas estrangeiras (como em « *cluster* » ou « *freezer* »),
  - 2) títulos em geral, de cursos, disciplinas ou livros, por exemplo (como em *Engenharia Agrícola e Ambiental*),
  - 3) ênfase, chamando a atenção do leitor para *uma parte* de uma frase ou parágrafo;
- negrito (**assim**) é usado para destaque visual, ou seja, para ajudar o leitor a identificar as partes mais importantes do texto de cada página ao simplesmente olhá-la, em oposição à ênfase (*assim*), que geralmente é percebida somente no tempo da leitura.

Por meio desses recursos de organização e formatação, esperamos tornar sua leitura mais prazerosa e facilitar o uso do livro para consultas rápidas. Desejamos uma ótima leitura!

# Capítulo 1

## Introdução

### AS PLANTAS E A FÍSICA

É provável que cientistas agrários e ambientais sintam-se mais encorajados ao saber que a palavra “física” significava originalmente “ciência da natureza”, e também tem a mesma origem do prefixo “fito-”, que significa “planta”. Mas talvez esses cientistas não “sintam” a relação da Física que sempre estudaram com o conceito de “natureza”, que apreciam. Embora a palavra “natureza” atualmente se refira principalmente ao ambiente não alterado pelo ser humano, a “natureza” de que trata a Física é mais amplo e abarca praticamente todos os fenômenos observáveis. A palavra “física” é originária do latim *physica*, do grego *physiké* (φυσική), *ciência da natureza* (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2008; ABBAGNANO, 2000; CUNHA, 2010). Segundo os filólogos (HILTNER, 2011; DICTIONARY.COM, 2015; ONLINE ETYMOLOGICAL DICTIONARY, 2015), a raiz grega *physis* (φύσις) deriva da raiz *\*bheue-*, do proto-indo-europeu, que significa “existir, crescer”, e deu origem as palavras “física”, “filo”, “fito-” e até mesmo às formas verbais *be* (“ser” em inglês) e *bin, bist* (“sou”, “és” em alemão). Proto-indo-europeu (PIE) foi a língua que deu origem às línguas da família indo-europeia, que incluem as línguas latinas (espanhol, português, francês, romeno, ...), germânicas (alemão, inglês, holandês, sueco, ...), eslavas (russo, polonês, ...), indo-iranianas (hindí, persa, sânscrito, ...), celtas e várias outras. As palavras do PIE são sempre escritas com um asterisco, o que indica que essas palavras foram *reconstruídas* a partir de comparação metódica entre os idiomas modernos, não havendo registros escritos que as comprovem.

A Física difere de outras ciências mais pelos seus métodos que pelos assuntos tratados, pois ela busca os fundamentos, as relações causais, as descrições e explicações mais gerais dos fenômenos, aspecto em que se aproxima da Filosofia. De fato, a Física foi uma parte da “Filosofia Natural” por muitos séculos, e o próprio livro em que Isaac Newton apresentou suas três leis chamava-se “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, cujo título original em latim era *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.

Nas palavras do físico brasileiro Moysés Nussenzveig, “A Física é em muitos sentidos a mais fundamental das ciências naturais, e é também aquela cuja formulação atingiu o maior grau de refinamento.” (NUSENSVEIG, 2002). Refinamento, fundamental... Essas palavras pomposas podem parecer uma sobrevalorização que os físicos atribuem ao seu próprio trabalho. Na verdade a Física é fundamental não porque os físicos são mais talentosos, mas devido ao seu próprio **objetivo** de buscar as explicações mais fundamentais da natureza. A palavra “fundamental” significa “que serve de fundamento” (DICIONÁRIO PRIBERAM, 2018b), então não é surpreendente que, ao procurar explicações mais básicas dos fenômenos naturais,<sup>1</sup> incluindo os que interessam aos cientistas agrários, acabe sendo necessário recorrer à Física. Portanto, conceitos da Física servem de base para estudos das mais variadas áreas do conhecimento, direta ou indiretamente, incluindo aí vários ramos das Ciências Agrárias e Ambientais.

Desse modo, a Física volta-se aos princípios, aos fundamentos, às bases, em oposição a outras ciências mais voltadas às aplicações, à utilidade prática. Nesse aspecto, a Física guarda muita afinidade com a Filosofia. Muitos físicos procuraram conhecer “a verdade”, saber o que o Universo realmente é. Nas palavras do físico Albert Einstein, “conhecer o pensamento de Deus”.

Por outro lado, os químicos, cientistas muito afins aos físicos, apresentam muito menos interesse nessas questões filosóficas, estando voltados principalmente à manipulação da matéria. Assim, considerar a Física mais fundamental não significa que os físicos sejam arrogantes, que se achem superiores aos químicos, mas apenas que os seus objetivos são diferentes, assim como são diferentes os objetivos de um filósofo e os de um antropólogo, por exemplo.

Nessa busca pelos princípios mais básicos, porém, a Física tomou para si o estudo de várias coisas que eram fundamentais no passado, mas que hoje são descritas em termos de outras coisas. Assim, pode-se dizer que a Física trata de conceitos em diferentes níveis explicativos, com ênfase nas relações entre eles. A Física busca descrever as leis fundamentais da natureza, mas, quando utilizada em aplicações práticas, geralmente não é necessário descer

<sup>1</sup>O adjetivo “básico” significa “que serve de base” e pode ser usado com o mesmo sentido de “fundamental”, “que serve de fundamento”, quando aplicado à Física e seus conceitos. O adjetivo “profundo” também pode ser usado no mesmo sentido, pois, ao “aprofundar-se” num estudo, acaba-se chegando aos conceitos mais básicos. Isso pode causar estranheza a quem use o adjetivo “básico” com o sentido de “fácil” e “profundo” com o sentido de “difícil”, mas essas são derivações dos sentidos originais dessas palavras.

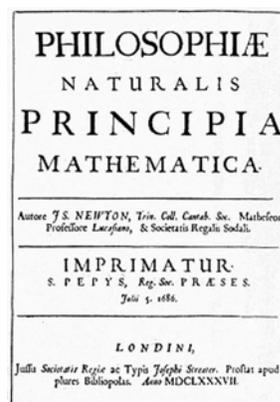
ao nível explicativo mais básico. Por exemplo, para descrever o fluxo de água num cano, é suficiente utilizar grandezas como velocidade, pressão, volume, temperatura etc., sem precisar entrar em detalhes microscópicos, como o fato de que a pressão é gerada por colisões das moléculas dos fluidos nas superfícies.

De todo modo, a Física ocupa-se dos fundamentos dos fenômenos, ainda que não necessariamente fundamentos “mais fundamentais”, enquanto que diversas outras áreas do conhecimento têm por função tomar tais leis em mãos e estabelecer formas de utilização destas leis para propor procedimentos, máquinas, etc. que permitam que atinjamos objetivos relativos à produção de bens materiais, tecnológicos, entre outros.

Outra palavra usada para descrever a Física foi “refinamento”. Para expressar esse refinamento, a Física tem a Matemática como ferramenta que provê precisão a sua descrição do mundo natural, baseada na definição de *grandezas físicas*, que são propriedades como comprimento, velocidade, pressão etc., e podem ser medidas, calculadas ou previstas. Tais grandezas precisam ter definições precisas e métodos bem definidos para medi-las. Entretanto, por definição, deve-se conceber a inclusão de tais grandezas em sua interrelação com outras e não, necessariamente, uma definição do tipo dicionário. Assim, grandezas físicas como “tempo”, “força”, “massa” ou “aceleração”, para ficar em apenas algumas, não possuem definição de dicionário (e.g. “força” é isso e isso), mas uma definição basicamente matemática em termos de outras grandezas físicas (e.g. “força mecânica é o produto da massa pela aceleração”). Isso significa que a sintaxe da Física é a Matemática e é nessa linguagem que devemos expressá-la.

As grandezas físicas são referidas de termos científicos, que, embora usados na linguagem comum, têm sentido mais restrito na linguagem científica. Na maioria das vezes, o sentido desses termos na linguagem comum é mais antigo que o científico. Palavras como massa, pressão, ligação, réptil, anfíbio e fruto têm sentidos bem específicos na Física, na Química ou na Biologia, mas uma simples busca num dicionário mostra que os sentidos dessas palavras em sentido comum podem ser bem diferentes. O trabalho científico se baseia principalmente na definição dessas grandezas, no estabelecimento de métodos para medi-las e na criação de teorias que expliquem as medições. Uma vez que essas teorias estejam bem estabelecidas, passa-se à etapa da aplicação delas à prática, como é o caso da aplicação da Física às ciências agrárias e ambientais.

**Figura 1.1:** Capa original do livro de *Sir Isaac Newton* na qual ele apresentou as suas três famosas leis da mecânica. Note a palavra **NATURALIS**.



Fonte: Wikimedia Commons (2006).

Foi dito que o conceito original de “natureza”, objeto de estudo da Física, abarca praticamente todos os fenômenos observáveis. O que a Física não estuda, então? Quais são os seus limites, o seu escopo? A definição de “física” dada pelo físico e filósofo argentino Mario Bunge em seu “Dicionário de Filosofia” evidenciou que a “natureza” de outrora talvez seja mais bem expressa hoje pela palavra “matéria”: “a ciência fundamental da matéria.” (BUNGE, 2006). Outras definições incluem “energia” como algo distinto de “matéria”: “ramo da ciência que estuda a matéria e a energia.” (ARDLEY, 1996) e “estudo das propriedades da matéria e da energia” (UVAROV, 1964). Por tais definições, o objeto de estudo da Física é “matéria e energia”, mas talvez uma olhada nas definições do adjetivo “físico(a)” também ajude a conceber esse objeto e seus limites (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2008; DUROZOI; ROUSSEL, 1993):

Física/físico: o termo “físico” designa a realidade material, concreta, objeto de nossos sentidos, em contraste com a realidade psíquica, subjetiva, interior, bem como a realidade espiritual ou abstrata.

(JAPIASSÚ; MARCONDES, 2008, p. 113)

Físico: o adjetivo designa de modo geral o que concerne à natureza. Mais especialmente, designa, por oposição à metafísica, o que pertence ao mundo fenomenal e pode ser objeto de experiência.

(DUROZOI; ROUSSEL, 1993, p. 192)

A palavra *Metafísica* refere-se ao estudo dos primeiros princípios e originou-se da expressão grega *ta meta ta physika*, que significa “além da física”, referência ao fato de que esses textos eram colocados depois dos textos sobre Física, o que foi erroneamente interpretado pelos escritores latinos como significando “a ciência do que está além do mundo físico”, donde vem a associação da Metafísica com, tomando as palavras da definição anterior, a “realidade psíquica, subjetiva, interior, bem como a realidade espiritual ou abstrata”.

O filósofo italiano Nicola Abbagnano definiu, ainda em 1961,<sup>2</sup> a natureza como o objeto de estudo da Física (ABBAGNANO, 2000):

---

<sup>2</sup>A tradução para o português foi publicada no ano 2000.

Física (gr. *φυσική* ; lat. *Physica*; in. *Physics* ; fr. *Physique* ; al. *Physik* ; it. *Fisica* )

Disciplina que tem por objeto o estudo da *natureza*; portanto, suas características e seus métodos estão em relação com aquilo que entendemos por *natureza*. Como disciplina específica, pode-se dizer que nasceu com Aristóteles, que a considerou a “filosofia segunda” e, no grupo das ciências teóricas, distinguiu-se da *teologia* e da *matemática* (Met., XI, 7, 1064 b 1).

(ABBAGNANO, 2000, p. 439)

Abbagnano segue definindo três conceitos sucessivos de Física, desde seu surgimento até os tempos modernos:

Podemos distinguir três conceitos fundamentais dessa ciência, que se sucedem ao longo da história: 1ºF. como teoria do movimento; 2ºF. como teoria da ordem necessária; 3ºF. como previsão do observável.

(ABBAGNANO, 2000, p. 439)

Na continuação desse texto, o filósofo explica que o primeiro conceito foi de Aristóteles e que o segundo foi estabelecido durante o Renascimento, com Nicolau de Cusa, Galilei, Kepler e outros. Em seguida, descreve o terceiro conceito cujo desenvolvimento se inicia em 1530:

Comte de fato, seguindo as pegadas de Bacon,<sup>3</sup> havia já insistido sobre a exigência da parte da ciência de estabelecer previsões que permitam o domínio sobre a natureza.<sup>4</sup> “Ciência, donde previsão; previsão, donde ação” (*Cours de phil. positive*, liç. II, § 3).

(ABBAGNANO, 2000, p. 441)

Essa ideia da possibilidade de previsão, a partir da qual se pode agir sobre o mundo, é especialmente importante em Física aplicada. O texto prossegue com a citação de um trecho de Hertz que expressa essa mesma ideia:

<sup>3</sup>Francis Bacon, filósofo inglês, \*1561 (Londres) – †1626 (Londres) (LEA, 2018).

<sup>4</sup>Auguste Comte, filósofo francês, \*1798 (Montpellier [Monpilher]) – †1857 (Paris) (BARNES; FLETCHER, 2016).

Em 1894, Hertz em seu *Princípio de mecânica* insistia sobre o mesmo conceito:<sup>5</sup> “O mais direto e, em certo sentido, o mais importante problema que o nosso ciente conhecimento da natureza deve nos tornar capazes de resolver é a antecipação dos acontecimentos futuros, em virtude disso podemos organizar nossas ocupações presentes sobre a base d tal antecipação”.

(ABBAGNANO, 2000, p. 442)

Essa última frase, se fosse mostrada isoladamente, poderia ser interpretada como uma discussão ecológica, uma referência à necessidade de conservar ou explorar racionalmente o meio ambiente no presente para evitar catástrofes futuras. Mais uma vez, verificamos uma afinidade entre a Física e as Ciências Agrárias e Ambientais.

---

<sup>5</sup>Heinrich Rudolf Hertz, físico alemão, \*1857 (Hamburgo) – †1894 (Bonn [Bona]) (ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA, 2016).

## Capítulo 2

# Medição

### A MEDIDA DA CERVEJA

Ao se formar, William Sealy Gosset conseguiu um emprego na *Cervejaria Guinness*, na cidade de Dublin, Irlanda. Ele havia se formado num curso universitário com ênfase em Química e Matemática. Ele produziu pequenas amostras de cevada, malte e lúpulo para investigar a influência das características dessas plantas na fermentação e na qualidade geral da cerveja. Como a fabricação da cerveja para o comércio envolvia uma quantidade muito maior dessas plantas, Gosset queria estimar a probabilidade de erro ao aplicar suas conclusões à produção real. Para isso, desenvolveu sua própria teoria. Como a cervejaria não queria divulgar seus segredos aos concorrentes, Gosset não foi autorizado a publicar seus resultados. Mas ele os publicou mesmo assim usando um nome falso: *Student*. Seu artigo “O erro provável de uma média” (STUDENT, 1908), de 1908, teve enorme influência na *Estatística* a partir de então.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Para mais informações, veja:

[freakonomics.com/2012/02/the-statistical-significance-of-beer/](https://freakonomics.com/2012/02/the-statistical-significance-of-beer/) (Acesso em: 4 jul. 2018).

Uma das principais características da Física, e não só dela mas de toda a Ciência Empírica tal a concebemos atualmente, é o processo de *medição* como forma de confirmar ou refutar princípios e teorias. A **medição** consiste em comparar uma quantidade a outra. Por exemplo, quando se diz que o comprimento de uma certa mesa é “um metro e meio”, o que se está fazendo é comparar o seu comprimento com outro comprimento chamado *metro*. Um comprimento é um tipo de *grandeza*.

## 2.1 Grandezas, medidas, padrões e unidades

Chama-se de **grandeza** qualquer propriedade de algo que possa ser medida. Para efeito de estudo, a Física restringe-se às grandezas do mundo natural que podem ser estimadas e confirmadas por um processo descrito que pode ser repetido por outras pessoas (chama-se a isso “reprodutibilidade”).

Ao longo deste livro, a fim de termos uma linguagem mais precisa, distinguiremos medição, grandeza e medida por meio das seguintes definições:

### Definição 2.1. MEDIÇÃO, GRANDEZA E MEDIDA

- medição: *processo* pelo qual se mede algo;
- grandeza: *propriedade* quantificada por medição;
- medida: *resultado* do processo de medição.

Por exemplo, o processo pelo qual alguém mede o comprimento de uma mesa é uma *medição*, o comprimento da mesa em si é uma *grandeza* e a representação desse comprimento em metros (por exemplo, 2 m) é uma *medida*.

**Padrões** são medidas específicas adotadas em comum acordo pela comunidade científica para servir de referência para outras medidas. Entre 1889 e 1960, por exemplo, o padrão do metro adotado internacionalmente era a medida do comprimento de uma barra específica de irídio guardada em condições específicas na França. Atualmente, o padrão do metro no *Sistema Internacional de Unidades* é a medida da distância percorrida pela luz durante o tempo de  $\frac{1}{299792458}$  s (*Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM HOME PAGE, 2018)).

Isso significa que esses padrões definem as **unidades** de medida. Por exemplo, nas medidas como 1,5 m, 57 s e  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , as unidades de medida são m (metro), s (segundo) e  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  (quilômetro por hora), respectivamente. Para quaisquer operações matemáticas, as unidades são manipuladas da mesma forma que fatores multiplicados ao valor numérico da medida, como se fossem variáveis ou outros números. Compare:

$$5m + 2m = (5 + 2)m = 7m$$

$$5 \times 4 + 2 \times 4 = (5 + 2) \times 4 = 28$$

$$5x + 2x = (5 + 2)x = 7x$$

**Definição 2.2.** PADRÃO E UNIDADE DE MEDIDA

- padrão de medida: medida específica adotada em comum acordo por uma comunidade científica para servir de referência para outras medidas;
- unidade de medida: quantidade definida por um padrão de medida (p. ex.  $m$ ) pela qual expressam-se quantidades da mesma natureza como múltiplos deste padrão (p. ex. 2 m, 3 m, 5,5 m etc.).

**Margem de erro**

Exemplos simples de grandezas são mostrados a seguir:

- 1200 m (mil e duzentos metros)
- 1,3 km (um vírgula três quilômetros)
- $50 \text{ min} \pm 5 \text{ min}$  (cinquenta minutos com faixa de erro de cinco minutos a mais ou a menos)
- $(30 \pm 1) \text{ s}$  (trinta segundos com faixa de erro de um segundo a mais ou a menos)

Nota-se em algumas grandezas o símbolo  $\pm$ , chamado “mais ou menos”, que tem a função de mostrar a *margem de erro* de uma medida, muitas vezes chamada simplesmente de *erro*. Às vezes, o erro na última casa decimal é expresso como um algarismo adicional entre parênteses. Por exemplo, em vez de escrever  $(21,4 \pm 0,5) \text{ s}$  poderíamos escrever, mais resumidamente,  $21,4(5) \text{ s}$ . O mesmo vale para erros com dois algarismos:  $284 \pm 54 \equiv 284(54)$ .

Às vezes, o mesmo símbolo  $\pm$  é utilizado com um significado diferente: o valor positivo ou o valor negativo de um número. Por exemplo,  $\pm 3$  seria “três positivo ou três negativo”. No caso da expressão de faixas de erro, o símbolo não serve para expressar duas possibilidades de número, mas sim os limites de uma faixa de erro.

Um exemplo bem conhecido de faixa de erro são as intenções de voto em pesquisas eleitorais, do tipo “vinte e três por cento de intenção de votos para Fulano, com margem de erro de dois pontos percentuais para mais ou para menos”; essa grandeza poderia ser expressa simplesmente como  $23\% \pm 2\%$ . O valor 23% seria, nesse caso, a **melhor estimativa**, como é chamado o valor mais provável de uma grandeza, geralmente o valor central de uma faixa de erro (que, nesse caso, vai de 21% a 25%).

## PONTO PERCENTUAL

O uso da expressão “ponto percentual” visa eliminar uma ambiguidade. Suponha que uma pesquisa de intenção de votos tenha apontado que um certo candidato receberá metade dos votos da população votante, com 1 milhão de indivíduos habitantes de sua cidade, com margem de erro de 10 pontos percentuais. Os 10 pontos percentuais correspondem a 10% do **total de votos**, ou seja, 10% de um milhão, que é igual a cem mil. Se fosse usada a expressão “erro de 10 por cento”, esse erro poderia ser entendido como 10% da **quantidade de votos estimada para aquele candidato**, ou seja, 10% de meio milhão, que é igual a 50 mil.

Margens de erro são geralmente chamadas apenas de **erro**, por brevidade. Chama-se de **propagação de erros** as técnicas utilizadas para se calcular o erro associado a grandezas obtidas a partir da combinação de outras em fórmulas matemáticas.

Por exemplo, se um quadrado tem seus lados medidos como  $L_1 = (1,0 \pm 0,2) \text{ m}$  e  $L_2 = (1,0 \pm 0,1) \text{ m}$ , é fácil calcular a sua área como  $A = 1,0 \text{ m}^2$ , mas qual é o erro associado a essa área? Existem múltiplas técnicas para esse tipo de cálculo, e livros inteiros dedicados apenas ao estudo da propagação de erros. No entanto, podemos adotar um critério simples de tratar os erros como termos comuns somados às medidas e fazer o cálculo por meio de aritmética ordinária. No nosso exemplo, isso seria feito assim:

$$\begin{aligned} A &= L_1 L_2 = (1,0 \pm 0,2) \text{ m} (1,0 \pm 0,1) \text{ m} \\ &= (1,0 \cdot 1,0) \text{ m}^2 + (1,0 \cdot (\pm 0,1)) \text{ m}^2 \\ &\quad + ((\pm 0,2) \cdot 1,0) \text{ m}^2 + ((\pm 0,2) \cdot (\pm 0,1)) \text{ m}^2 \\ &= 1,0 \text{ m}^2 + (\pm 0,1) \text{ m}^2 + (\pm 0,2) \text{ m}^2 + (\pm 0,02) \text{ m}^2 \\ &= 1,0 \text{ m}^2 \pm 0,32 \text{ m}^2 \\ &\approx (1,0 \pm 0,3) \text{ m}^2 \end{aligned}$$

O erro foi arredondado de 0,32 para 0,3 para que esteja coerente com o valor esperado 1,0, com apenas uma casa decimal. Essa é considerada uma prática adequada de apresentação de valores com erros,

- “ $4,01 \pm 0,5$ ” deve ser reescrito como “ $4,0 \pm 0,5$ ”
- “ $15,28 \pm 1,2$ ” deve ser reescrito como “ $15,3 \pm 1,2$ ” ou “ $15 \pm 1$ ” ou ainda “ $(1,5 \pm 0,1) \cdot 10^1$ ”
- “ $515 \text{ km} \pm 0,5 \text{ km}$ ” deve ser reescrito como “ $515 \text{ km} \pm 1 \text{ km}$ ”
- “ $1000000 \text{ m} \pm 500 \text{ km}$ ” deve se reescrito como “ $1000 \text{ km} \pm 500 \text{ km}$ ” ou “ $(1,0 \pm 0,5) \cdot 10^6$ ”

**Exercício 2.1** ERRO DA MULTIPLICAÇÃO

Considere duas medidas A e B, cujas melhores estimativas sejam  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  e cujos erros sejam  $\Delta A$  e  $\Delta B$ , ou seja,  $A = \bar{A} \pm \Delta A$  e  $B = \bar{B} \pm \Delta B$ . Defina C como o produto entre A e B, ou seja,  $C = A \cdot B$ , e mostre que o erro associado a C pode ser estimado como  $\Delta C = A \Delta B + B \Delta A$ .

**Exercício 2.2** ERRO DA ÁREA DE UM RETÂNGULO

Calcule a área de um retângulo de lados  $(3,4 \pm 0,2)$  m e  $(6,2 \pm 0,3)$  m, com o erro correspondente.

**Exercício 2.3** ERRO DO VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO

Calcule o volume de uma caixa d'água de lados  $(1,5 \pm 0,1)$  m,  $(1,0 \pm 0,1)$  m e  $(1,0 \pm 0,1)$  m, com o erro correspondente.

De forma geral, pode-se estabelecer os seguintes teoremas:

**Teorema 2.1.** PROPAGAÇÃO DE ERROS PARA A SOMA, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Na soma e na subtração, o erro absoluto do resultado é a soma dos erros absolutos dos termos.

$$\Delta C = \Delta A + \Delta B,$$

onde  $C = A + B$  ou  $C = A - B$ .

Na multiplicação e na divisão, o erro relativo do resultado é a soma dos erros relativos dos termos.

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}, \quad 2.1$$

onde  $C = A \cdot B$  ou  $C = A/B$ .

**Demonstração 2.1.** PROPAGAÇÃO DE ERROS PARA A SOMA, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Tratando aritmeticamente o erro como um termo qualquer, é muito fácil mostrar que o erro absoluto da soma é igual à soma dos erros absolutos das parcelas:

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ \Rightarrow \bar{C} \pm \Delta C &= \bar{A} \pm \Delta A + \bar{B} \pm \Delta B \\ \Rightarrow \bar{C} \pm \Delta C &= \bar{A} + \bar{B} \pm (\Delta A + \Delta B) \\ \Rightarrow \bar{C} &= \bar{A} + \bar{B}, \\ \Delta C &= \Delta A + \Delta B, \end{aligned}$$

**como queríamos demonstrar.**

Para a subtração, a conta é praticamente igual, com um detalhe capcioso:

$$\begin{aligned} C &= A - B \\ \Rightarrow \bar{C} \pm \Delta C &= \bar{A} \pm \Delta A - (\bar{B} \pm \Delta B) \\ \Rightarrow \bar{C} \pm \Delta C &= \bar{A} \pm \Delta A - \bar{B} \mp \Delta B \end{aligned}$$

Aqui, o  $\mp$  resulta da multiplicação de  $\pm$  por  $-$ . Em algumas contas,  $\mp$  pode ser diferente de  $\pm$ , mas não quando tratamos de margens de erro, porque o erro pode ser tanto positivo quanto negativo, sem nenhuma prioridade para um ou outro. Assim, pode-se substituir  $\mp$  por  $\pm$  e continuar o cálculo normalmente:

$$\begin{aligned} \bar{C} \pm \Delta C &= \bar{A} \pm \Delta A - \bar{B} \pm \Delta B \\ \Rightarrow \bar{C} \pm \Delta C &= \bar{A} - \bar{B} \pm (\Delta A + \Delta B) \\ \Rightarrow \bar{C} &= \bar{A} - \bar{B}, \\ \sigma_{\bar{C}} &= \Delta A + \Delta B, \end{aligned}$$

**como queríamos demonstrar.**

O erro da multiplicação já foi calculado no exercício 2.1 como  $\bar{A}\Delta B + \bar{B}\Delta A$ . Substitua, na equação 2.1,  $\bar{C}$  por  $\bar{A}\cdot\bar{B}$  e depois isole  $\Delta C$  para chegar à mesma relação:  $\Delta C = \bar{A}\Delta B + \bar{B}\Delta A$ .

A demonstração do erro da divisão é mais complexa e não será discutida, mas você pode substituir  $\bar{C}$  por  $\bar{A}/\bar{B}$  para mostrar uma fórmula alternativa para o **erro da divisão**:

$$\Delta C^{\pm} = \frac{\bar{A}\Delta B + \bar{B}\Delta A}{\bar{B}^2}.$$

### Exercício 2.4 ERRO DA DIVISÃO

Por meio de várias medidas usando um flutuador, constatou-se que a velocidade de fluxo de um rio é igual a  $(20,4 \pm 0,8) \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Considerando que a distância entre um moinho e um dique, localizados ao longo desse rio, seja  $(212 \pm 14) \text{ km}$ , qual é o tempo gasto para que a água percorra todo o caminho entre o moinho e o dique, expresso com a devida margem de erro?

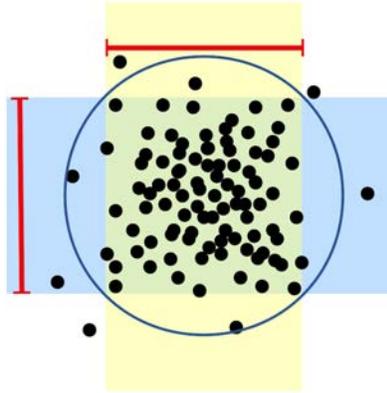
#### APROXIMAÇÃO LINEAR DO ERRO

Esse procedimento, de tratar os erros como simples termos subtrativos ou aditivos e fazer as contas normalmente, é às vezes chamado por expressões como “aproximação linear da propagação de erro”. Mas por que exatamente se trata de uma aproximação? Na verdade, o procedimento é exato se os erros dados forem os *erros máximos*. Ou seja, se todos os valores possíveis estiverem dentro daquela faixa de erros. Geralmente não é assim.

Considere a figura 2.1, onde o eixo horizontal representa valores de medidas da grandeza A e o eixo vertical representa o mesmo para a grandeza B. A faixa amarela inclui pontos dentro da margem de erro de A e a faixa azul inclui pontos dentro da margem de erro de B. A intersecção entre as faixas forma um quadrado esverdeado no meio, que tem pontos dentro de ambas as margens de erro. Cem círculos estão desenhados na figura, representando 100 medidas do par AB. Embora apenas 5 pontos estejam fora da margem de erro de A e apenas 5 pontos estejam fora da margem de erro de B, existem 8 pontos fora da intersecção entre as faixas. Isso mostra que esse quadrado não é a melhor representação dos “valores esperados” para o par AB.

O erro é frequentemente estimado por meio do cálculo do *desvio padrão* ( $\sigma$ ) de uma série de medidas. Se o erro de uma medida A de um grandeza for estimado como duas vezes o desvio padrão ( $\Delta A = 2\sigma_A$ ), estimamos que apenas 5% dos valores medidos para essa grandeza estejam fora da faixa  $\bar{A} \pm \Delta A$ . No entanto, quando fazemos uma operação qualquer entre  $\bar{A} \pm \Delta A$  e  $\bar{B} \pm \Delta B$ , digamos que dada pela função  $f[A, B]$ , deveríamos calcular o erro de  $f$  também como duas vezes o seu desvio padrão ( $\Delta f = 2\sigma_f$ ).

**Figura 2.1:** Modelos de erro: quadrado ou círculo?



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

### CORREÇÃO

Se o círculo desenhado na figura 2.1 for tomado como o limite dos valores esperados para o par AB, teremos novamente 5 pontos fora da margem de erro, como tínhamos originalmente para A e para B, independentemente. É fácil notar que, no desenho, o diâmetro do círculo pode ser calculado a partir das faixas de erro de A e B, utilizando o Teorema de Pitágoras.

Na Estatística, existe prova de que, se A e B são duas grandezas *estatisticamente independentes*, valem as seguintes fórmulas:

$$(\Delta C)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2, \text{ para } C = A + B \text{ ou } C = A - B,$$

$$\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2, \text{ para } C = A \times B \text{ or } C = \frac{A}{B},$$

e, no caso geral em que C é uma função de  $x_1, x_2, \dots$ ,

$$(\Delta C)^2 = \left(\frac{\partial C}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots$$

Essa fórmula envolve as derivadas da função C em relação a todas as suas variáveis ( $x_1, x_2, \dots$ ) e por isso muitos preferem evitá-la e usar a aproximação linear.

**Problema 2.1.** EFEITO DE CONSTANTE NO ERRO

Considere uma área que pode ser representada por um triângulo de base  $b = (23 \pm 10) \text{ km}$  e altura  $h = (50 \pm 5) \text{ km}$ . A área do triângulo pode ser escrita como  $A = \frac{b \cdot h}{2}$ , que é o mesmo que  $A = b \cdot h \cdot \frac{1}{2}$ . Considerando que  $\frac{1}{2}$  é um fator multiplicativo, como ele seria levado em conta no cálculo do erro? Que erro poderia ser considerado para esse fator? Calcule.

**Algarismos significativos**

Ainda que uma medida não seja apresentada com um erro explícito, pode-se inferir a ordem de magnitude de sua margem de erro por meio da quantidade de algarismos utilizados para expressá-la. Isso significa que, de forma geral, 2 m é diferente de 2,0 m, porque, quando alguém expressa uma medida como 2 m, está implicitamente informando que não tem informações confiáveis a respeito das casas decimais, de modo que essa medida poderia ser, na verdade, 2,1 m, 2,2 m, 2,3 m, ou mesmo 1,9 m ou 1,8 m arredondado.

Por outro lado, quando se escreve 2,0 m, informa-se explicitamente que o algarismo da primeira casa decimal deve ser considerado 0 e não algum outro.<sup>1</sup>

Nesse contexto, os cientistas buscaram definir a quantidade de algarismos com que uma medida deve ser expressa, de forma que essa quantidade esteja relacionada com a precisão da medida. No entanto, certa medida pode ser expressa com diferentes quantidades de algarismos dependendo da unidade e das potências utilizadas. Por exemplo, considere as várias maneiras de se escrever 1,5 cm: 0,015 m, 0,000015 km,  $1,5 \times 10^{-2} \text{ m}$  etc.

No entanto, note que, independentemente da maneira escrita, os algarismos 1 e 5 estão obrigatoriamente presentes nessa medida se não se quer perder precisão – dizemos que esses são os algarismos significativos da medida.

Neste contexto, definem-se **algarismos significativos** como os algarismos de uma medida que contribuem para a sua precisão, excluindo aqueles que apenas indicam a ordem de magnitude da medida (a “escala”).

Assim, os seguintes algarismos *não são significativos*:

- zeros à esquerda não intercalados, como os zeros em 0,000345 e 0,015 (mas o zero de 3,04 é considerado um algarismo significativo por estar intercalado com outro número diferente de zero, enquanto 0,203 tem um zero não significativo e um zero significativo);
- algarismos em potências de 10 multiplicadas, expressas normalmente como nos exemplos “ $\times 10^{10}$ ”, “ $\cdot 10^2$ ”, “ $10^{-3}$ ”;

<sup>1</sup>Mais precisamente, quando se escreve 2,0 m, se está dizendo que o algarismo *mais provável* na casa dos décimos é 0. No entanto, muitas vezes considera-se que 2,0 m represente, implicitamente,  $(2,0 \pm 0,1) \text{ m}$  (ou seja, atribui-se o menor erro possível na casa dos décimos), o que significa que os valores prováveis estariam entre 1,9 e 2,1.

- zeros à direita **em medidas sem casas decimais, escritos sem o objetivo de precisão**; por exemplo, quando se diz que a distância entre Brasília e Rio de Janeiro é 1200 km, esse valor é apenas uma aproximação grosseira, portanto os dois zeros não são algarismos significativos, mas estão ali colocados porque são indispensáveis para expressar o número, a menos que se use *notação científica*;
- algarismos em casas decimais que não são exatas nem têm erro estimado; por exemplo, ao dividir-se 1,0 km por 3,0 h, o resultado é  $0,33333333 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , com algarismos “3” repetindo-se indefinidamente; mas nem todos esses algarismos são significativos e, não havendo estimativa de erro disponível, consideramos apenas dois algarismos “3” como significativos, assim como os números operandos ( $1,0/3,0 = 0,33$ ).

### **Definição 2.3.** ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Os algarismos significativos de uma medida são aqueles que contribuem para sua resolução e incluem

- os chamados “algarismos corretos”, que são aqueles considerados exatos na medida, com exceção de zeros à esquerda não intercalados por algarismos diferentes;
- os “algarismos duvidosos” para os quais haja estimativa de margem de erro.

## **Notação científica**

Embora  $1,5 \times 10^{-2} \text{ m}$  seja a mesma medida que 0,000015 km, na primeira forma de expressar a quantidade de algarismos significativos é mais evidente. Assim, uma maneira conveniente de não sobrecarregar medidas com algarismos não significativos é separar a indicação de ordem de magnitude numa potência de 10, deixando o número que a multiplica apenas com algarismos significativos:

- 0,000345 m  $3,45 \times 10^{-3} \text{ m}$  ;
- 0,0105 J  $1,05 \times 10^{-2} \text{ J}$  ;
- 800 km  $8,00 \times 10^2 \text{ km}$  ou  $8,0 \times 10^2 \text{ km}$  ou  $8 \times 10^2 \text{ km}$ .

Há várias maneiras de expressar 800 km, mas a escolha não é totalmente livre. De fato, a notação científica obriga aquele que mede uma propriedade a definir claramente quais algarismos são significativos, pois algarismos não significativos simplesmente não devem ser expressos. Assim, a pessoa que faz a medição só deve escrever  $8,00 \times 10^2 \text{ km}$  se essa medida realmente tiver uma

precisão da ordem do quilômetro, ou seja, ela está afirmando que a incerteza na medida não inclui a possibilidade de ela ser 794 m ou 823 m – a medida é algo como  $(800 \pm 1)$  km ou  $(800 \pm 2)$  km (o erro certamente não chega a alterar a casa das dezenas, então ele é, no máximo, 9 km).

**Exercício 2.5** PASSANDO PARA NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Escreva as seguintes medidas em notação científica:

(a) 79,0 km

(f) 1 h 23 min

(b) 56,78

(g) 3 h 52 min 59 s

(c) 1005 m

(h) 4581 m

(d) 400 km

(i)  $45 \times 10^6$  m

(e) 59 s

(j) 5 l

**Concordância, discordância, discrepância**

Ainda utilizando o exemplo das intenções de voto, se dada agência de estatística estimasse  $23\% \pm 2\%$  para Fulano e outra estimasse  $25\% \pm 3\%$ , poderíamos dizer que houve *discordância* entre as medidas?

Na linguagem científica, não! Diríamos que há *discrepância* de 2%, que é a diferença entre as melhores estimativas das agências. As medidas, na verdade, estão em **concordância**, que é o conceito que descreve o fato de que duas medidas concordam entre si quando há sobreposição de suas faixas de erro, considerando-se a melhor estimativa e a faixa de erro.

**Exercício 2.6** CONCORDÂNCIA ENTRE BARRAS DE ERRO

Desenhe uma reta graduada entre 0% e 100% e ilustre as medidas  $(45 \pm 5)\%$  e  $(56 \pm 8)\%$  através de barras sobre essa reta. Ilustre a faixa na qual as medidas concordam.

## 2.2 Sistemas de unidades e conversões

### Sistema Internacional de Unidades - SI

As medidas mais antigas não tinham padrões bem definidos. As medidas de comprimento frequentemente se baseavam em comparação com partes do corpo, e daí surgiram nomes utilizados até hoje para se medir comprimentos, como *pé* e *polegada*. Medidas são basicamente comparações de uma grandeza com outra já conhecida: uma *unidade de medida*. Na ciência e na tecnologia moderna, não é adequado que cada um utilize o seu próprio pé ou a sua palma da mão para medir comprimentos, portanto decidiu-se estabelecer *padrões* que unificassem as unidades de medida.

Assim surgiram os *sistemas de unidade*, dos quais os mais conhecidos são o **Sistema Inglês** (ou “Sistema Imperial”), que inclui unidades como a libra e a polegada, e o **Sistema Internacional de Unidades** – SI, destinado a padronizar os trabalhos científicos, o qual estudaremos em maior detalhe.

O quadro 2.1 mostra as unidades básicas do SI, a partir das quais são definidas as unidades derivadas mostradas no quadro 2.2. O quadro 2.3 mostra os prefixos oficiais do SI, que são utilizados para expressar números de diferentes ordens de magnitudes de forma concisa.

**Quadro 2.1:** Unidades básicas do SI

<b>Grandeza</b>	<b>Unidade</b>	<b>Símbolo</b>
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	s
corrente elétrica	ampère	A
temperatura	kelvin	K
quantidade de matéria	mol	mol
intensidade luminosa	candela	cd

Fonte: elaboração dos autores.

**Quadro 2.2:** Algumas unidades derivadas do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo	Equivalência
força	newton	N	$\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$
pressão	pascal	Pa	$\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$
energia	joule	J	$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$
potência	watt	W	$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$
carga elétrica	coulomb	C	A s
tensão elétrica	volt	V	$\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2 \text{ A}}$

Fonte: elaboração dos autores.

O SI (do francês *Système international d'Unités*) é adotado como principal sistema de unidades na maioria dos países, com exceção de alguns (notavelmente, os Estados Unidos da América). Os quadros 2.1 e 2.2 mostram as chamadas “unidades básicas” e as “unidades derivadas” do SI. Como pode ser observado no quadro 2.2, as unidades derivadas são assim chamadas porque são equivalentes a relações algébricas entre as unidades básicas. O quadro 2.4 mostra a equivalência de algumas unidades que não fazem parte do SI com unidades do SI.

### Exercício 2.7 DECOMPOSIÇÃO DE UNIDADES DERIVADAS

Escreva, em função de unidades básicas do SI, as seguintes unidades:

- $\Omega$  (ohm), unidade de resistência elétrica, igual a  $\text{V}/\text{A}$ ;
- F (farad), unidade de capacitância, igual a  $\text{A}\cdot\text{s}/\text{V}$ ;
- Wb (weber), unidade de fluxo magnético, igual a  $\text{V}\cdot\text{s}$ .

### Problema 2.2. HECTARE E HECTOARE

Sabendo que um *are* é igual a  $100 \text{ m}^2$  e que o prefixo *h* (hecto) equivale ao fator multiplicativo  $10^2$ , calcule quanto vale um “hectoare” em  $\text{m}^2$ . Qual a relação entre o “hectoare” e o hectare?

## Unidades fora do SI

No momento da escrita deste livro, apenas três países não haviam aderido oficialmente ao SI: os Estados Unidos da América, a Libéria (na África) e Myanmar (também conhecido como Birmânia, na Ásia).

**Quadro 2.3:** Prefixos do SI

Fator multiplicativo		Prefixo		Exemplo	
potência	decimal	por extenso	símbolo	por extenso	símbolo
$10^{12}$	1.000.000.000.000	tera	T	terabyte <sup>a</sup>	TB
$10^9$	1.000.000.000	giga	G	gigabyte	GB
$10^6$	1.000.000	mega	M	megahertz	MHz
$10^3$	1.000	quilo	<i>k</i>	quilograma	<i>kg</i>
$10^2$	100	hecto	<i>h</i>	hectômetro	<i>hm</i>
$10^1$	10	deca	<i>da</i>	decâmetro	<i>dam</i>
$10^0$	1	<i>nenhum</i>	<i>nenhum</i>	metro	<i>m</i>
$10^{-1}$	0,1	deci	<i>d</i>	decilitro	<i>dL</i>
$10^{-2}$	0,01	centi	<i>c</i>	centímetro	<i>cm</i>
$10^{-3}$	0,0001	mili	<i>m</i>	milímetro	<i>mm</i>
$10^{-6}$	0,000001	micro	$\mu$	micrômetro	$\mu m$
$10^{-9}$	0,000000001	nano	<i>n</i>	nanômetro	<i>nm</i>
$10^{-12}$	0,000000000001	pico	<i>p</i>	picossegundo	<i>ps</i>
$10^{-15}$	0,000000000000001	femto	<i>f</i>	femtosegundo	<i>fs</i>

Fonte: elaboração dos autores.

<sup>a</sup>Em informática, os prefixos representam números ligeiramente diferentes, porque o computador trabalha internamente com números binários, o que exige que os prefixos sejam potências de 2. Desse modo, 1 *kB* (quilobyte) equivale a 1.024 bytes, ou 210 bytes. Temos também as seguintes relações:

$$1\text{MB} = 1.024 \times 1.024 \text{ bytes} = 220 \text{ bytes} = 1.048.576 \text{ bytes} \approx 106 \text{ bytes};$$

$$1\text{GB} = 1.024 \times 1.024 \times 1.024 \text{ bytes} = 230 \text{ bytes} = 1.073.741.824 \text{ bytes} \approx 109 \text{ bytes};$$

$$1\text{TB} = 1.024 \times 1.024 \times 1.024 \times 1.024 \text{ bytes} = 240 \text{ bytes} = 1,099511628 \times 10^{12} \text{ bytes} \approx 1012 \text{ bytes}.$$

Entretanto, mesmo nos demais países, muitas outras unidades são utilizadas, seja por costume, seja por conveniência. Nos noticiários, ninguém informa a temperatura em kelvins, mas em graus Celsius ou graus Fahrenheit, dependendo do país. E seria muito inconveniente perguntar “Quantos segundos são?” em vez de “Quantas horas são?”.

Nas Ciências Agrárias, usa-se muito mais o hectare ou os alqueires (porque existem vários padrões de alqueire) para se medir área, ao invés do metro quadrado. Também é muito mais comum medir-se volume em litros que em metros cúbicos. Em alguns países, pés, milhas e polegadas são muito mais usados que metros e quilômetros. E, para medir distâncias da ordem de raios atômicos, o angstrom é uma unidade muito utilizada. O quadro 2.4 mostra a relação entre algumas dessas unidades e as unidades do SI.

**Quadro 2.4:** Algumas unidades fora do SI, e sua relação com as unidades do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo	Equivalência SI
comprimento	pé ( <i>foot</i> )	ft	0,3048 m
	polegada ( <i>inch</i> )	in, <sup>a</sup>	0,0254 m
	milha terrestre	<i>mi</i>	≈ 1609 m
	angstrom	Å	$1 \cdot 10^{-10}$ m
tempo	minuto	<i>min</i>	60 s
	hora	<i>h</i>	3600 s
volume	litro	ℓ, L	0,001 m <sup>3</sup>
área	hectare	<i>ha</i>	10000 m <sup>2</sup>
	are	<i>a</i>	100 m <sup>2</sup>
	alqueire paulista		24200 m <sup>2</sup>
força	libra	lb	0,4536

Fonte: elaboração dos autores.

<sup>a</sup>Usa-se também “pol” como símbolo de “polegada” no Brasil, embora o padrão internacional seja “in”, do inglês “inch”. Por outro lado, o símbolo de “libra” é “lb” mesmo em língua inglesa na qual o nome da unidade é “pound”; isso deve-se à origem latina da unidade: *libra* em Latim.

### Exercício 2.8 DIÂMETROS INTERNOS DE CANOS EM POLEGADA

No Brasil, alguns canos de PVC, usados em tubulações de água, são popularmente chamados de “cano meio” e “cano três quartos”. Esses nomes referem-se aos diâmetros internos, medidos em polegadas:  $\frac{1}{2}$  in e  $\frac{3}{4}$  in. Converta esses diâmetros para *milímetros*.

### Exercício 2.9 CONVERSÃO AO SI

Reescreva os seguintes valores para que fiquem adequados ao SI:

- |              |             |
|--------------|-------------|
| a) 25 litros | c) 300 Å    |
| b) 14 ha     | d) 24 horas |

## O alqueire

O dicionário português Priberam traz as seguintes definições para “alqueire”:

**al-quei-re** *substantivo masculino*

1. Antiga medida de capacidade (1/60 do moio). [O alqueire varia entre 13,215 l e 22,605 l.]
2. Terreno que leva essa medida de sementeira.
3. Medida de seis canadas (para azeite).

Dicionário Priberam (DICIONÁRIO PRIBERAM, 2018a)

Nesse contexto, “capacidade” refere-se ao volume que um recipiente pode armazenar. A palavra “alqueire”, usada desde o ano 1111, originou-se do árabe “al-káil” (HOUAISS, 2001), que originalmente se referia à capacidade de um certo tipo de sacola na qual se carregava sementes. A mesma palavra acabou sendo utilizada para se referir à área semeada pelas sementes contidas numa sacola dessas. A área que pode ser semeada por uma certa quantidade de sementes depende da distância entre as sementes, portanto não é muito surpreendente que existam várias definições de alqueire como medida de área.

O Ministério do Desenvolvimento Agrário divulgou uma tabela com várias definições do alqueire (BRASIL. Ministério do Desenvolvimento Agrário, 2016?), algumas das quais são mostradas na tabela 2.1. As definições variam muito, de modo que um alqueire pode ser igual a 1,21 ha ou a 19,36 ha dependendo da definição. Nota-se que, dentro de um mesmo estado brasileiro, usa-se diversas definições de “alqueire”. A tabela completa está disponível no apêndice A e mostra também outras medidas comuns no meio agrário, como “légua”, “conta”, “tarefa” e “vara quadrada”. A maioria das medidas mostradas nessa tabela têm definições conflitantes.

**Tabela 2.1:** Definições regionais de alqueire.

Designação	Braças	Metros	Hectares	Estados
Alqueire	50 × 50	110 × 110	1,21	SP, MG
Alqueire		440 × 440	19,36	MG, BA, GO
Alqueire	75 × 75	165 × 165		TODOS
Alqueire Paulista	50 × 100		2,42	MA, ES, RJ, SP, MG, PE, SC, RS, MT, GO e PB
Alqueire Mineiro	100 × 100	220 × 220		AC, RN, BA, ES, RJ, SP, SC, RS, MT, GO, TO, MG

Fonte: elaboração dos autores.

### Exercício 2.10 DEFINIÇÕES DE ALQUEIRE

Complete a tabela 2.1, preenchendo as células em branco com os valores adequados.

### Problema 2.3. PADRONIZAR MEDIDAS AGRÁRIAS?

Medidas agrárias como “alqueire” e “tarefa”, que possuem múltiplas definições divergentes, deveriam ser abandonadas, padronizadas, ou tudo deve ser deixado como está? Justifique.

## Conversão de unidades de comprimento, área e volume

Converter uma medida de polegadas para metros é bem fácil, pois temos um fator direto de conversão. De polegadas para metros, multiplica-se por 0,0254. De metros para polegadas, divide-se pelo mesmo valor. E se quisermos converter de polegadas para centímetros? Isso também é bem fácil! Sabemos que um metro equivale a 100 centímetros, então converter de polegadas para centímetros resulta num número 100 vezes maior que converter de polegadas para metros. Então, para converter de polegadas para centímetros, multiplica-se agora por 2,54, que é 100 vezes maior que o valor de 0,0254 usado anteriormente. Esse raciocínio, estendido para um comprimento de  $\alpha$  polegadas, é expresso

matematicamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\alpha \text{ in} &= \alpha \cdot 0,0254 \text{ m}, 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \\ \Rightarrow \alpha \text{ in} &= \alpha \cdot 0,0254 \cdot 100 \text{ m} = 2,54 \cdot \alpha \cdot \text{cm},\end{aligned}$$

que para  $\alpha = 5$ , por exemplo, ficaria

$$\begin{aligned}5 \text{ in} &= 5 \times 0,0254 \text{ m}, 1 \text{ m} = 100 \text{ m} \\ \Rightarrow 5 \text{ in} &= 5 \times 0,0254 \times 100 \text{ m} = 2,545 \text{ cm} = 12,7 \text{ cm},\end{aligned}$$

Se quisermos agora converter uma área de  $\alpha$  polegadas quadradas para centímetros quadrados, como devemos proceder? É muito comum que se tente o mesmo que foi feito para converter comprimentos de polegadas para metros: apenas multiplicar por 2,54. **O problema é que isso é errado!** Uma polegada quadrada é uma polegada vezes outra polegada, então

$$\begin{aligned}1 \text{ in}^2 &= 1 \text{ in} \times 1 \text{ in} \\ &= 2,54 \text{ cm} \times 2,54 \text{ cm} \\ &\approx 6,45 \text{ cm}^2,\end{aligned}$$

e, para passar de  $\text{in}^2$  para  $\text{cm}^2$ , multiplica-se agora por 6,45, que é o quadrado de 2,54 (aproximadamente).

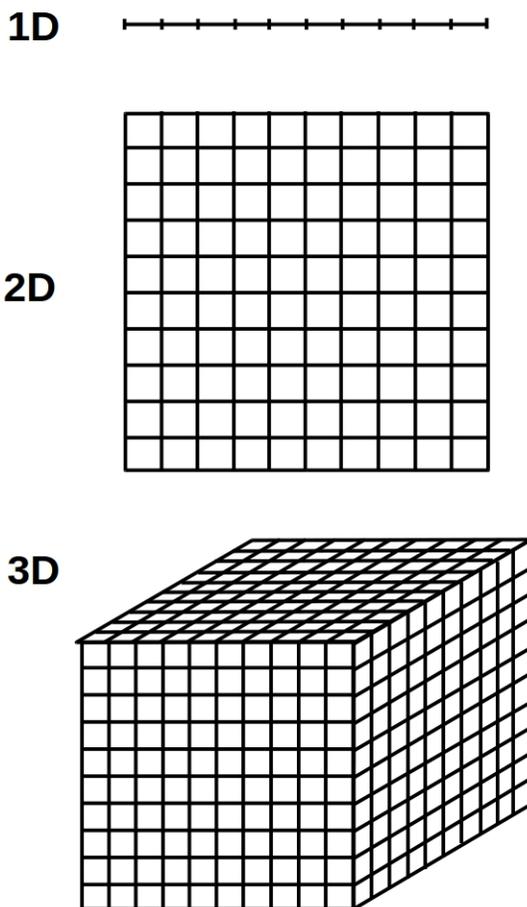
Para converter volumes expressos em unidades cúbicas, o procedimento é análogo:

$$\begin{aligned}1 \text{ in}^3 &= 1 \text{ in} \times 1 \text{ in} \times 1 \text{ in} \\ &= 2,54 \text{ cm} \times 2,54 \text{ cm} \times 2,54 \text{ cm} \\ &\approx 16,4 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

Ou seja, de in para cm, multiplica-se agora por 16,4, que é o cubo de 2,54 (aproximadamente).

Analogamente, um decâmetro equivale a dez metros, mas um decâmetro quadrado **não** é igual a dez metros quadrados, mas a *cem* metros quadrados ( $10^2 \text{ m}^2$ ). E um decâmetro cúbico ( $1 \text{ dam}^3$ ) é igual a *mil* metros cúbicos ( $10^3 \text{ m}^3$ ). Isso é ilustrado geometricamente na figura 2.2.

**Figura 2.2:** Ilustração das relações  $1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$ ,  
 $1 \text{ dam}^2 = 1 \times 10^2 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2$  e  $1 \text{ dam}^3 = 1 \times 10^3 \text{ m}^3 = 1000 \text{ m}^3$



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

Assim, deve-se ter atenção especial a conversões entre duas unidades prefixadas e elevadas ao quadrado ou ao cubo, como, por exemplo, uma conversão de  $\text{km}^2$  (quilômetro quadrado) para  $\text{hm}^2$  (hectômetro quadrado). Como o prefixo k equivale a  $1 \times 10^3$  e o prefixo h equivale a  $1 \times 10^2$ , é comum que estudantes

pensem que basta multiplicar por 10 para fazer a conversão. Mas isso só vale para conversão de km para hm, lineares, mas não para as unidades quadradas e cúbicas, pois o prefixo também é elevado a essas potências.

$$\begin{aligned} 1 \text{ km}^2 &= 1 \times (10^3 \text{ m})^2 \\ &= 1 \times 10^6 \text{ m}^2 \\ 1 \text{ hm}^2 &= 1 \times (10^2 \text{ m})^2 \\ &= 1 \times 10^4 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Note que um quilômetro quadrado é igual a um milhão de metros quadrados, enquanto um hectômetro quadrado é igual a dez mil metros quadrados. Logo, para converter uma área de  $\text{km}^2$  para  $\text{hm}^2$ , deve-se multiplicar por 100, não por 10. A conversão poderia ser feita nesta ordem:

- converte-se da unidade prefixada (aqui  $\text{km}^2$ ) à unidade sem prefixo (aqui  $\text{m}^2$ ), substituindo o prefixo pela potência de 10 correspondente e elevando-a à potência externa (aqui 2):

$$1 \text{ km}^2 = 1 \times (10^3 \text{ m})^2 = 1 \times 10^6 \text{ m}^2 \quad 2.2$$

- identifica-se qual potência de 10 devemos evidenciar para encontrar a unidade prefixada final desejada (aqui  $\text{hm}^2$ ):

$$1 \text{ hm}^2 = 1(10^2 \text{ m})^2 = 1 \times 10^4 \text{ m}^2$$

- então, já sabendo a potência que se quer isolar (aqui  $10^4$ ), decompõe-se a potência da expressão inicial (equação 2.2) até que essa potência apareça:

$$1 \times 10^6 \text{ m}^2 = 1 \times 10^2 \times 1 \times 10^4 \text{ m}^2$$

Olhe lá nosso  $10^4$ !

- finalmente, expressa-se a potência isolada em termos do prefixo desejado:

$$\begin{aligned} 1 \times 10^2 \times 10^4 \text{ m}^2 &= 1 \times 10^2 \times (10^2 \text{ m})^2 \\ &= 1 \times 10^2 \times (\text{hm})^2 \\ &= 1 \times 10^2 \text{ hm}^2 \end{aligned}$$

Mas nem sempre tais truques são fáceis... Se tivéssemos ficado com um potência ímpar de 10, como  $10^3$ , não seria possível interpretá-la como o quadrado de outra potência inteira. De forma geral, a parte difícil do procedimento é converter a unidade não prefixada à unidade prefixada que se quer obter. Tentemos elaborar um procedimento geral! Por exemplo, para se converter de metros para

decâmetros, podemos multiplicar e dividir a medida pelo prefixo *da* (deca):

$$14 \text{ m} = 14 \cdot \frac{\text{da}}{\text{da}} \cdot \text{m}$$

Em seguida, anexa-se o prefixo do numerador à unidade e expressa-se o prefixo do denominador como potência de 10:

$$14 \text{ m} = 14 \cdot \frac{\text{da}}{\text{da}} \cdot \text{m} = 14 \cdot \frac{\text{dam}}{10^1}$$

Depois, é só resolver as operações numéricas:

$$14 \text{ m} = 14 \cdot \frac{\text{da}}{\text{da}} \text{m} = 14 \cdot \frac{\text{da}}{10^1} = \frac{14}{1 \times 10^1} \text{dam} = 1,4 \text{ dam}$$

Analogamente, para conversões de unidades não prefixadas quadradas (ou cúbicas) para unidades prefixadas quadradas, multiplica-se e divide-se pelo prefixo ao quadrado (ou ao cubo).

Por exemplo, para converter  $56 \text{ m}^2$  para  $\text{dam}^2$ , pode-se fazer assim:

$$\begin{aligned} 56 \text{ m}^2 &= 56 \frac{\text{da}^2}{\text{da}^2} \text{m}^2 \\ &= 56 \frac{\text{da}^2}{(10^1)^2} \text{m}^2 \\ &= \frac{56}{100} \text{da}^2 \text{m}^2 \\ &= 0,56 \text{ dam}^2 \end{aligned}$$

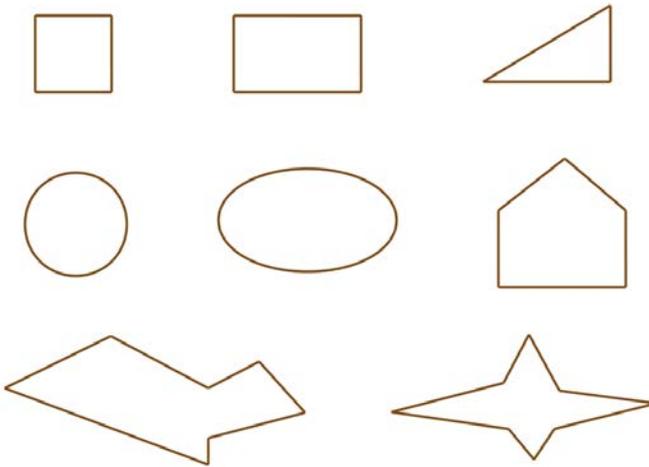
De  $1400 \text{ m}^3$  para  $\text{cm}^3$ , converte-se assim:

$$\begin{aligned} 1400 \text{ m}^3 &= 1400 \frac{\text{c}^3}{\text{c}^3} \text{m}^3 \\ &= 1400 \frac{\text{c}^3}{(10^{-2})^3} \text{m}^3 \\ &= \frac{1,4 \times 10^3}{1 \times 10^{-6}} \text{c}^2 \text{m}^2 \\ &= 1,4 \times 10^9 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

É preciso informar que o procedimento de separar o prefixo da unidade de medida, como mostrado acima, é apenas um *truque*. Não é convencional que prefixos sejam separados das unidades e elevados a potências isoladamente. Os cálculos acima, reescritos da maneira convencional, ficam assim:

$$\begin{aligned} 1400 \text{ m}^3 &= 1400 \frac{(1 \times 10^{-2})^3}{(1 \times 10^{-2})^3} \text{ m}^3 \\ &= \frac{1,4 \times 10^3}{1 \times 10^{-6}} \text{ cm}^2 \\ &= 1,4 \times 10^9 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**Figura 2.3:** Representação de espaços para canteiros marcados num terreno plano



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

## Cálculo de áreas delimitadas por fronteiras irregulares

Existe uma história sobre um jardineiro que tinha pouquíssimo conhecimento de Matemática, mas que conseguia calcular a área de qualquer canteiro, que tivesse qualquer forma, pela quantidade de sacos de semente gastos para semeá-lo.

Histórias como essa mostram, com justiça, como a racionalidade está presente nas pessoas, mesmo sem que estas possuam instrução formal.

No entanto, o que essa história não diz é se esse jardineiro seria capaz de prever a quantidade de sementes que precisaria para semear um novo canteiro ainda não semeado. Talvez ele o conseguisse comparando visualmente o novo canteiro com um canteiro que tivesse semeado anteriormente. Mas tal estimativa dependeria da experiência prática do semeador, de sua intuição, algo que é difícil de passar a um semeador novo.

Medir com rigor, seguindo um procedimento que possa ser ensinado a novos profissionais, facilita o planejamento em casos como esse, evitando assim o desperdício de recursos. O rigor ao medir e planejar é uma habilidade que notavelmente distingue trabalhadores com formação superior de trabalhadores práticos.

Presumivelmente, uma pessoa que procura uma formação superior pretende adquirir esse rigor, para complementar a intuição, o conhecimento prático que já tem e que continuará adquirindo de maneiras diversas e imprevisíveis, tal qual o jardineiro da história.

Com que rigor você já é capaz de medir e planejar? Suponha que as figuras marcadas na figura 2.3 sejam canteiros desenhados numa escala em que cada centímetro represente um metro. Se você tivesse sacos de sementes cujas instruções indicassem a semeadura de 200 sementes por metro quadrado, saberia calcular quantas sementes gastaria em cada um desses canteiros?

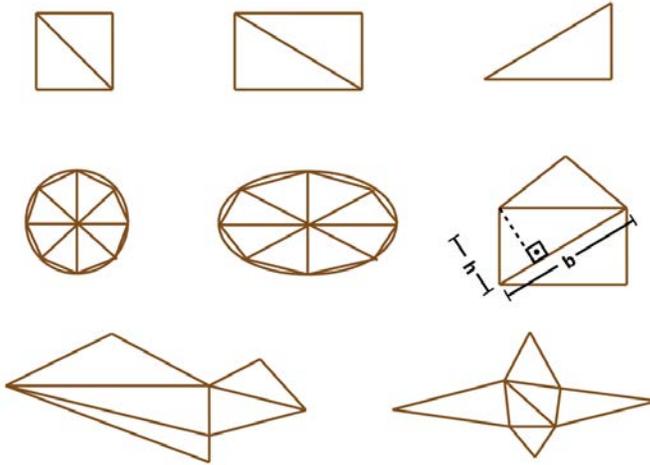
Uma maneira simples de calcular a área dentro de uma fronteira irregular de forma aproximada pode ser concretizada decompondo-a em figuras geométricas conhecidas. Para polígonos, que são figuras cujos lados são todos retos, pode-se dividir sua área em triângulos, cuja área é dada pela fórmula

$$A = \frac{b \cdot h}{2}, \quad 2.3$$

onde  $A$  é a área do triângulo,  $b$  é o comprimento de sua base e  $h$  é sua altura. Mas deve-se ter o cuidado para que a altura seja sempre medida na direção perpendicular à base que, por sua vez, pode ser definida como qualquer lado do triângulo. Assim, você pode calcular as áreas mais difíceis da figura 2.3 dividindo-as em triângulos, como mostrado na figura 2.4.

Mesmo para as figuras com fronteiras curvas, é possível dividi-las em triângulos desprezando-se pequenas partes da borda, o que acarreta um pequeno erro no cálculo, erro que será menor se a figura for dividida em mais triângulos. Todas as figuras foram divididas em triângulos para ilustrar como isso é possível, mas, naturalmente, em alguns casos, é mais conveniente usar outras figuras de fórmulas de área conhecidas, como retângulos, círculos, trapézios etc. Note que um dos canteiros da figura 2.4 (aquele com as distâncias  $h$  e  $b$  indicadas) está dividida em três triângulos, mas sua área seria mais facilmente calculada se ela fosse decomposta em um triângulo e um retângulo.

**Figura 2.4:** Representação de espaços para canteiros marcados num terreno plano, decompostos em triângulos  
A figura mostra, para um dos triângulos, uma possível definição para a base ( $b$ ) e para a altura ( $h$ ).



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

### Exercício 2.11 DECOMPOSIÇÃO DE ÁREAS EM TRIÂNGULOS

Considere que cada centímetro da figura 2.4 represente um metro real. Com o uso de uma régua, calcule as áreas das figuras ali mostradas, por meio do cálculo da área dos triângulos que as formam.

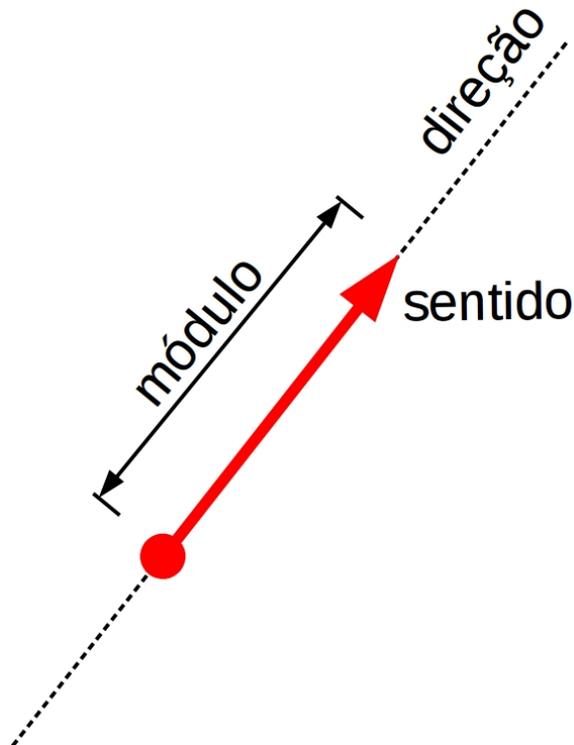
## 2.3 Grandezas escalares e vetoriais

Em algumas situações, uma medida com apenas número e unidade pode não ser suficiente para expressar todas as informações necessárias na situação. Por exemplo, a medida 30 km não fornece informação alguma sobre a direção na qual essa distância foi medida e nem mesmo se é uma distância em linha reta ou ao longo de um caminho curvo. Para expressar o caminho preciso, precisaríamos de algum tipo de mapa. No entanto, se estamos tratando da simples distância em linha reta entre dois pontos, essa distância poderia ser expressa, obviamente, por uma reta no mapa. No entanto, se queremos diferenciar se a distância

é “do ponto A ao ponto B” ou “do ponto B ao ponto A”, uma reta não é mais suficiente: precisaríamos desenhar uma seta ( $\rightarrow$ ). Essa distinção pode parecer desnecessária nesse exemplo, mas é de fato necessária em muitos casos que estudaremos.

Uma grandeza desse tipo é uma *grandeza vetorial* e é adequadamente representada graficamente por um segmento de reta orientados (uma seta) ao qual se dá o nome geral de **vetor**. De maneira mais formal, uma **grandeza vetorial** é uma grandeza definida por um *módulo*,<sup>2</sup> uma *direção* e um *sentido*, explicados na tabela 2.5. Por outro lado, uma grandeza que apresenta somente módulo e não direção nem sentido é uma **grandeza escalar**.

**Figura 2.5:** Representação de um vetor por uma seta. O comprimento representa o módulo, a reta de apoio representa a direção e a ponta da seta representa o sentido.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

<sup>2</sup>Nomes alternativos comuns para módulo são “intensidade” e “magnitude”.

**Quadro 2.5:** Elementos dos vetores explicados

Elemento do vetor	Explicação	Representação gráfica	Exemplos
módulo	Tamanho da grandeza, representado por um número e (opcionalmente) uma unidade de medida.	comprimento do segmento de reta (figura 2.5)	10 65 N 3,5 m $1,02 \times 10^{-1} s$
direção	Conjunto de retas paralelas ao longo de uma das quais a grandeza vetorial age.	reta sobre a qual um segmento é escolhido (figura 2.5)	horizontal vertical "30° com o eixo x"
sentido	Definição de origem e destino sobre a reta que define a direção.	ponta no segmento de reta (figura 2.5)	"de cima para baixo" "da esquerda para a direita" "do ponto A ao ponto B" (ou vice-versa)

Fonte: elaboração dos autores.

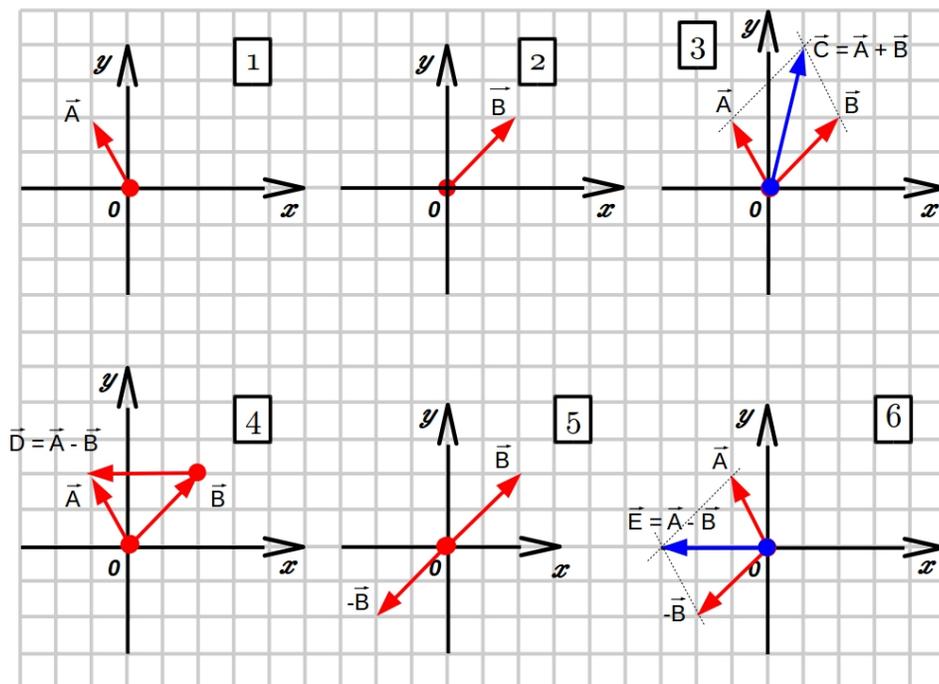
## Soma de vetores

Quando dois vetores de mesma natureza atuam num mesmo corpo, o efeito conjunto é expresso pela soma dos dois, o que gera um **vetor resultante**. Por exemplo, para decidir se um corpo está ou não em *equilíbrio*, deveremos somar suas forças e *torques* (explicado no capítulo 5) e avaliar se a força e o torque resultantes são nulos. Mas, como forças e torques são representados por vetores, essa soma é feita por uma operação específica chamada de *soma vetorial*.

Se temos dois vetores representados por duas setas, podemos somá-los graficamente pela *regra do paralelogramo* (figura. 2.6, sistemas 3 e 6), que consiste em posicionar os dois vetores numa mesma origem, desenhar um paralelogramo ao completar com mais dois lados,<sup>3</sup> e ligar a origem ao canto oposto, encontrando assim o **vetor resultante**, ou seja, a soma dos dois vetores.

<sup>3</sup>O termo "losango" é mais específico: losango é um paralelogramo com os quatro lados de comprimentos iguais.

**Figura 2.6:** Representação de alguns vetores em sistemas cartesianos  
 O vetor  $\vec{C}$ , mostrado no sistema cartesiano 3, é a soma vetorial entre  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , mostrados nos sistemas 1 e 2. Nos sistemas 4 e 6, estão representadas duas maneiras de subtrair vetores graficamente. O vetor  $\vec{E} = \vec{A} - \vec{B}$  pode ser obtido ligando-se a ponta do vetor subtraendo ( $\vec{B}$ ) à ponta do vetor minuendo ( $\vec{A}$ ).



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

Se dois vetores são representados por meio de componentes num eixo cartesiano,

$$\vec{A} = (A_x)\hat{x} + (A_y)\hat{y} + (A_z)\hat{z},$$

$$\vec{B} = (B_x)\hat{x} + (B_y)\hat{y} + (B_z)\hat{z},$$

então a soma vetorial é dada pela soma das componentes em cada direção de forma independente:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}.$$

Para simplificar, podemos exemplificar com vetores num espaço bidimensional, que têm componentes  $z$  nulas. Na figura 2.6, representamos os vetores

$$\vec{A} = -1\hat{x} + 2\hat{y},$$

$$\vec{B} = 2\hat{x} + 2\hat{y},$$

cujas componentes podemos somar independentemente em cada eixo para obter o vetor  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ :

$$\vec{C} = (-1 + 2)\hat{x} + (2 + 2)\hat{y} = 1\hat{x} + 4\hat{y}.$$

No sistema cartesiano 3 da figura, nota-se que o mesmo vetor pode ser obtido graficamente pela regra do paralelogramo (note as linhas tracejadas que formam um paralelogramo com os vetores).

## Multiplicação de vetor por escalar

Multiplicar um vetor por um escalar equivale a multiplicar todas as suas componentes cartesianas por aquele mesmo escalar. O efeito gráfico da multiplicação por um escalar é mostrado no quadro 2.6.

**Quadro 2.6:** Efeito que um escalar acarreta em vetor ao multiplicá-lo

Escalar $a$		Efeito ao multiplicar um vetor		
Módulo	Polaridade	Direção	Sentido	Módulo
$ a  > 1$	+	mesma	mesmo	aumenta
$ a  > 1$	-	mesma	oposto	aumenta
$ a  < 1$	+	mesma	mesmo	diminui
$ a  < 1$	-	mesma	oposto	diminui
$ a  = 1$	+	mesma	mesmo	mesmo
$ a  = 1$	-	mesma	oposto	mesmo

Fonte: elaboração dos autores.

## Subtração de vetores

Tendo a soma vetorial e a multiplicação de vetor por escalar definidas, podemos agora usar essas duas operações em conjunto para definir a subtração de vetores. Uma subtração de vetores é simplesmente uma soma de um vetor com outro multiplicado por  $-1$ , ou seja,

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-1 \times \vec{B}).$$

Na figura 2.6, nos sistemas cartesianos 4, 5 e 6, mostramos como isso funciona. No sistema cartesiano 4, mostra-se que  $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$  é o vetor que liga a ponta do vetor  $\vec{B}$  à do vetor  $\vec{A}$ . Isso pode também ser checado pela subtração das componentes:

$$\vec{D} = (-1 - 2)\hat{x} + (2 - 2)\hat{y} = -3\hat{x} + 0\hat{y} = -3\hat{x}.$$

Ou seja, o vetor  $\vec{D}$  “caminha” três unidades no sentido negativo do eixo  $x$ , e não sobe nem desce no eixo  $y$ .

**Definição 2.4.** SUBTRAÇÃO DE VETORES

Seja  $\vec{A} - \vec{B}$  uma subtração de vetores, em que  $\vec{A}$  é o chamado “vetor minuendo” e  $\vec{B}$  é o chamado “vetor subtraendo”.

A subtração de vetores descreve a posição apontada pelo vetor minuendo ( $\vec{A}$  neste caso) em relação à posição apontada pelo vetor subtraendo ( $\vec{B}$  neste caso).

Numa linguagem menos técnica, a subtração vetorial liga a ponta de um vetor à ponta de outro vetor.

Nos sistemas cartesianos 5 e 6, mostramos como a subtração  $\vec{A} - \vec{B}$  pode ser substituída por uma soma vetorial entre  $\vec{A}$  e  $-\vec{B}$ . No sistema 5,  $-\vec{B}$  é encontrado graficamente através da inversão de  $\vec{B}$  e, no sistema 6, aplica-se a regra do paralelogramo a  $\vec{A}$  e  $-\vec{B}$  para encontrar  $\vec{E}$ . Note que  $\vec{E}$  é igual a  $\vec{D}$ ,

$$\vec{D} = \vec{E},$$

embora tenham origens diferentes no sistema cartesiano. **São vetores iguais em posições diferentes.**

Pode-se também realizar a subtração ao se subtrair as componentes independentemente em cada eixo cartesiano. Como os vetores  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  são, matematicamente, ambos  $\vec{A} - \vec{B}$ , eles têm as mesmas componentes e portanto são **vetores equivalentes**:

$$\vec{D} \equiv \vec{E} = \vec{A} - \vec{B} = (2 - (-2))\hat{x} + (2 - 2)\hat{y} = 4\hat{x}.$$

## Igualdade de vetores e componentes de um vetor num sistema cartesiano

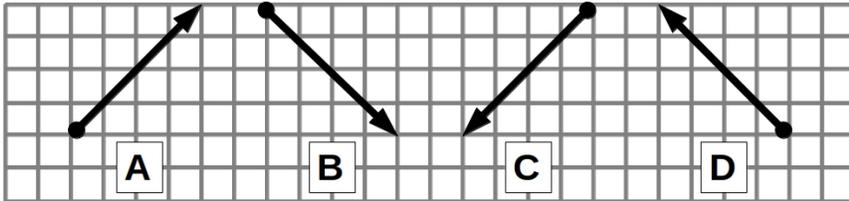
Na figura 2.6, os vetores  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$ , embora sejam iguais, estão posicionados em pontos diferentes em relação à origem na figura 2.6. Deve, então, haver uma maneira de descrevê-los de forma independente da posição em que se encontram. Ou seja, devemos descrever as componentes de vetores de modo que, **se dois vetores têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo, eles são iguais, mesmo que sejam posicionados em pontos diferentes.**

Para que isso seja representado matematicamente, as componentes de um vetor cuja origem não coincide com a origem do sistema de eixos cartesianos devem ser expressas como as componentes da ponta do vetor menos as componentes da origem do vetor, ou seja,

$$\vec{A} = (A_{px} - A_{ox})\hat{x} + (A_{py} - A_{oy})\hat{y} + (A_{pz} - A_{oz})\hat{z},$$

onde  $A_{px}\hat{x} + A_{py}\hat{y} + A_{pz}\hat{z}$  é a posição da ponta do vetor e  $A_{ox}\hat{x} + A_{oy}\hat{y} + A_{oz}\hat{z}$  é a posição da origem do vetor.

**Figura 2.7:** Representação de alguns vetores em sistema cartesiano



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

### Exercício 2.12 COMPONENTES CARTESIANAS DE UM VETOR

Considere que na figura 2.7, a origem do sistema de coordenadas seja o canto inferior esquerdo. Descreva os vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  e  $\vec{D}$  em coordenadas cartesianas  $xy$ .

**Exercício 2.13** IGUALDADE DE VETORES

Com base nos vetores mostrados na figura 2.7, julgue cada uma das seguintes igualdades como verdadeira (V) ou falsa (F):

a. ( )  $\vec{A} = -\vec{C}$

d. ( )  $\vec{A} = -\vec{D}$

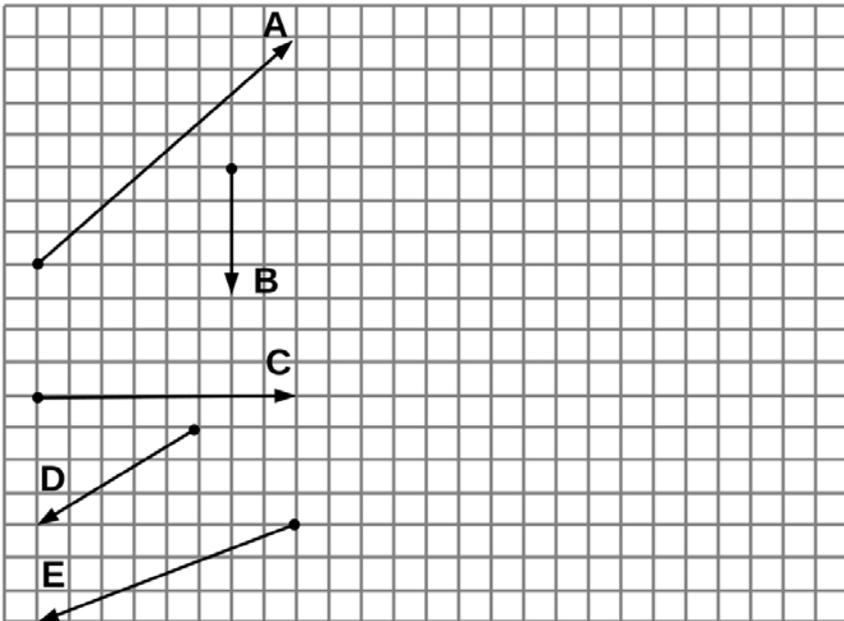
b. ( )  $\vec{B} = -\vec{D}$

e. ( )  $-\vec{A} - \vec{B} = +\vec{C} + \vec{D}$

c. ( )  $\vec{A} + \vec{B} = -(\vec{C} + \vec{D})$

f. ( )  $-\vec{A} - \vec{B} = -\vec{D} - \vec{B}$

**Figura 2.8:** Representação de alguns vetores em sistema cartesiano



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

**Problema 2.4.** REPRESENTAÇÃO DE SOMAS VETORIAIS

Na figura 2.8, desenhe os seguintes vetores:

a)  $\vec{A} + \vec{B}$

e)  $\vec{B} - \vec{A}$

b)  $\vec{B} + \vec{A}$

f)  $\vec{B} + \vec{C}$

c)  $-\vec{B}$

g)  $\vec{B} - \vec{D}$

d)  $\vec{A} - \vec{B}$

h)  $\vec{D} - \vec{E}$

**Soma de múltiplos vetores**

Somar mais de dois vetores é uma extensão simples da soma de dois vetores, pelo uso da *propriedade associativa* dos vetores

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

ou

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}).$$

Ou seja, escolhe-se dois vetores e se os somam. Depois soma-se o vetor resultante ao outro. Isso pode ser repetido até que se tenham somados todos eles.

Graficamente, somar múltiplos vetores pode ser feito ao deslocá-los, mantendo todos os módulos, as direções e os sentidos inalterados, de modo que formem uma cadeia, com a ponta de um coincidindo com a origem do seguinte; a soma vetorial, ou seja, o vetor resultante é obtido ligando-se a origem do primeiro à ponta do último encadeado. A ordem com que eles são encadeados não interfere no resultado. Tente verificar essa afirmação por si próprio ao somar três vetores graficamente em ordens diferentes. Isso é uma consequência da *propriedade comutativa* dos vetores:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}.$$

**Decomposição de vetores em eixos cartesianos**

Quando um vetor  $\vec{A}$  está expresso por meio de seu módulo  $A$  e ângulo  $\theta$  que esse vetor faz com o eixo  $x$ , conforme ilustrado na figura 2.9, pode-se identificar na figura um triângulo retângulo cujo cateto oposto ao ângulo  $\theta$  tem comprimento  $A_y$ , cujo cateto adjacente a  $\theta$  tem comprimento  $A_x$  e cuja hipotenusa tem comprimento  $A$ . Usando as definições usuais de seno e cosseno,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta &= \frac{\textit{cateto oposto a } \theta}{\textit{hipotenusa}}, \\ \operatorname{cos}\theta &= \frac{\textit{cateto adjacente a } \theta}{\textit{hipotenusa}},\end{aligned}$$

pode-se facilmente mostrar que as componentes  $A_x$  e  $A_y$  são dadas por

$$\begin{aligned}A_x &= A \cdot \operatorname{cos}\theta, \\ A_y &= A \cdot \operatorname{sen}\theta,\end{aligned}\tag{2.4}$$

e a transformação inversa é

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \\ \theta &= \operatorname{arctan} \frac{A_y}{A_x},\end{aligned}$$

onde  $\operatorname{arctan}$  é a função “arcotangente”, inverso da função tangente (igual ao seno sobre o cosseno:  $\tan \theta = \operatorname{sen}\theta / \operatorname{cos}\theta$ ).

A equação  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$  vem naturalmente do teorema de pitágoras. Para um vetor tridimensional, a relação equivalente seria  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ .

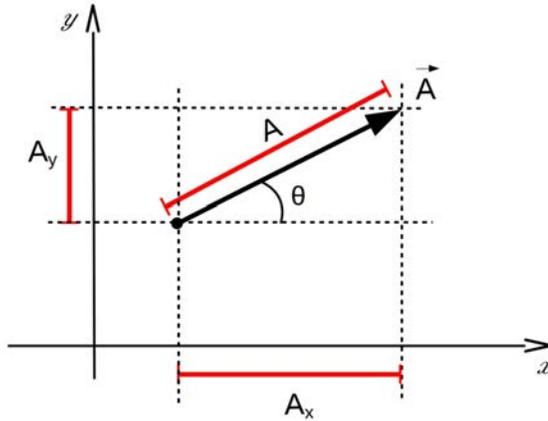
Quando o vetor aponta no sentido de diminuir  $x$ , a componente  $A_x$  será negativa, e o mesmo acontecerá na direção  $y$ . Isso já está expresso na equação 2.4, pois as funções seno e cosseno mudam a polaridade (positiva ou negativa) de maneira conveniente para isso.

**Tabela 2.2:** Polaridade das funções seno e cosseno dentro de cada quadrante

Função ↓ faixa →	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$270^\circ < \theta < 360^\circ$
$\operatorname{sen}\theta$	+	-	-	+
$\operatorname{cos}\theta$	+	+	-	-

Fonte: elaboração dos autores.

**Figura 2.9:** Representação dos componentes  $x$  e  $y$  de um vetor expresso por seu módulo  $A$  e o ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$



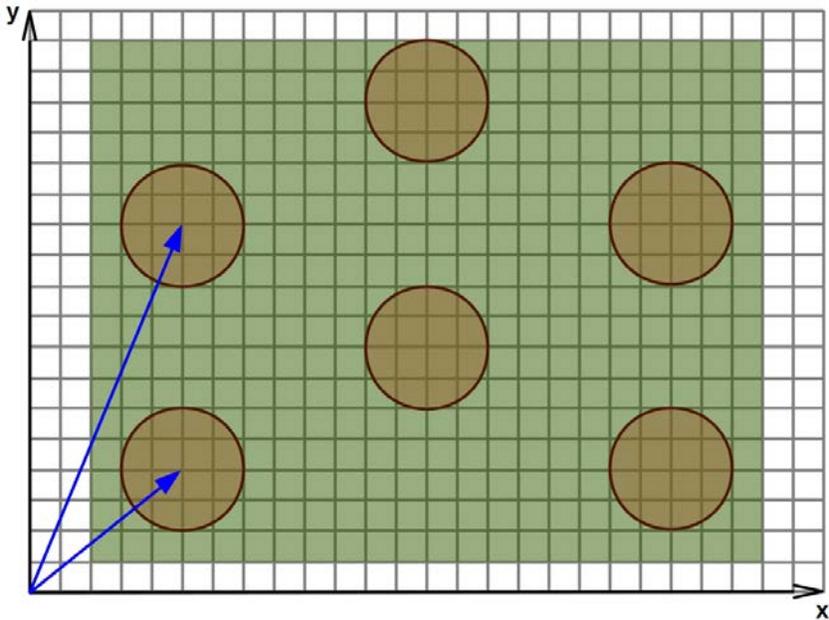
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

**Problema 2.5.** CÁLCULO DE ÁREA GRAMADA

Considere a área representada na figura 2.10 e descrita em sua legenda. Calcule

- a) a área total gramada;
- b) a massa total de sementes recomendada para plantar um gramado com essa área, considerando que se recomendam 4 gramas de sementes por metro quadrado;
- c) a quantidade total de sementes equivalente a essa massa, considerando que cada grama em sementes tem 200 sementes;
- d) o volume de concreto, em metros cúbicos, que seria utilizado para substituir a grama por uma massa de concreto de 2 cm de espessura;
- e) esse mesmo volume em litros, considerando que um litro equivale a um decímetro cúbico.

**Figura 2.10:** Representação de uma área plantada vista de cima. Identifica-se seis árvores plantadas, cujas bases dos troncos são representados pelos círculos, e uma área gramada, representada pela fronteira retangular. Cada lado dos quadrados da grade representa o comprimento de 10 *cm*.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

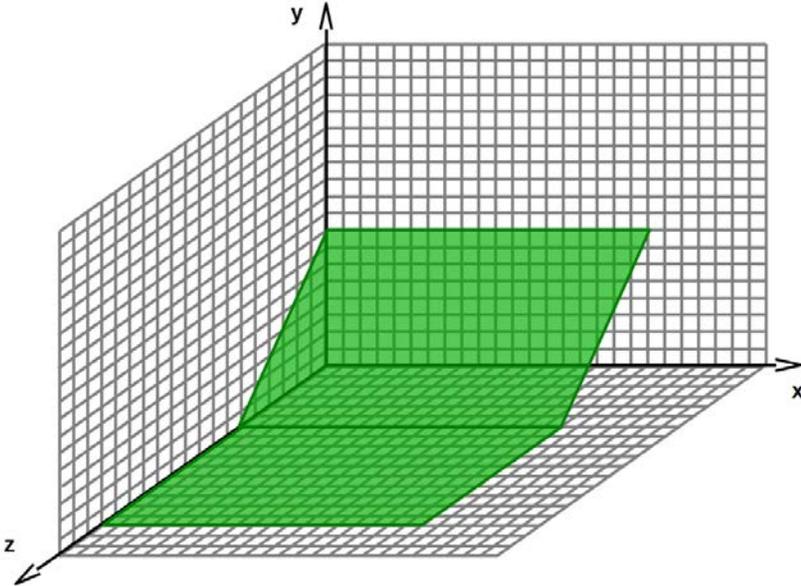
**Problema 2.6.** POSICIONANDO ÁRVORES COM VETORES

Numere as árvores representadas na figura 2.10 e represente a posição de cada uma delas como um vetor que vai da origem do sistema cartesiana ao centro da base de cada tronco. Depois, calcule o vetor que posiciona a árvore representada mais próxima ao canto superior direito em relação àquela representada mais próxima do canto inferior esquerdo. Em seguida, calcule a distância entre elas como o módulo desse vetor.

**Problema 2.7.** ÁREA TOTAL DE PLANOS EM DIFERENTES DIREÇÕES

Calcule a área total da superfície, composta de dois planos, representada na figura 2.11.

**Figura 2.11:** Representação de uma superfície com uma parte inclinada. Sua descrição é feita num sistema de eixos cartesianos tridimensional. Cada divisão em cada eixo representa 10 metros.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

## 2.4 Uso de cálculo diferencial e integral

O cálculo de áreas e volumes para os quais não há fórmula pré-definida pode ser feita por meio de integrais, desde que seja conhecida uma expressão matemática que descreva seus limites.

Provavelmente, o leitor já conhece as fórmulas da área da superfície de uma esfera,

$$A = 4\pi R^2,$$

e do volume de uma esfera,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

mas talvez não tenha percebido que essa área é a derivada desse volume, ou seja,

$$A = \frac{dV}{dR} = \frac{d\frac{4}{3}\pi R^3}{dR} = 4\pi R^2.$$

A operação inversa da derivada é a *integral indefinida*, então esse volume pode ser obtido pela integral indefinida da área sobre o raio, ou seja,

$$V = \int AdR = \int 4\pi R^2 dR = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Analogamente, as fórmulas da área interna de um círculo ( $A = \pi R^2$ ) e de sua circunferência ( $A = 2\pi R$ ) estão relacionadas por derivada e integral.

## 2.5 Mecânica

Grande parte da Física é considerada parte da **Mecânica**, o ramo da Física que estuda o movimento e o repouso dos corpos em vários aspectos, e tradicionalmente dividida em outros ramos: *Cinemática* (descrição matemática do movimento), *Dinâmica* (estudo de forças, massas e a influência destas no movimento) e *Estática* (estudo de corpos em equilíbrio), tratados em capítulos separados nesta obra. Algumas divisões da Mecânica incluem outros ramos como *Mecânica dos Fluidos* e *Trabalho e Energia*, que também são aqui tratados em capítulos separados.

É um fato bem conhecido popularmente que o adjetivo “mecânico” está relacionado a máquinas, e também que um mecânico é um profissional que trabalha com máquinas, com automóveis em especial. As palavras *máquina* e *Mecânica* têm a mesma origem. De fato, o uso do termo remonta já à época de Aristóteles, a quem se atribuiu por algum tempo a autoria de um livro chamado “Mecânica”, que versava principalmente sobre o funcionamento das alavancas.

A **Mecânica** é a ciência das máquinas e, por extensão, tornou-se também a ciência que busca descrever o funcionamento do mundo natural, que por muito tempo foi compreendido como uma máquina, sendo esta metáfora a base de uma corrente de pensamento importante chamada “mecanicista”, que, de fato, ia muito além da percepção da natureza como uma máquina (assim, por exemplo, na Arquitetura, gerou a concepção de que as casas são “máquinas de morar”, como defendia Le Corbusier).

De modo menos estrito, o termo pode se referir ao *mecanismo* pelo qual os fenômenos ocorrem, mesmo que não se adote a metáfora mecanicista. Atualmente, é até mesmo difícil distinguir “Física” de “Mecânica”, pois a Mecânica é usada, em diferentes graus, como fundamento para todos ramos da Física.

## 2.6 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 2.1

Substituindo as medidas  $A$  pelos valores esperados (melhores estimativas) com seus erros, temos

$$\begin{aligned}
 C &= A \cdot B \\
 \Rightarrow C &= (\bar{A} \pm \Delta A)(\bar{B} \pm \Delta B) \\
 \Rightarrow C &= [\bar{A}\bar{B}] + [\bar{A} \cdot (\pm\Delta B)] + [\bar{B} \cdot (\pm\Delta A)] + [(\pm\Delta A)(\pm\Delta B)] \\
 \Rightarrow C &= \bar{A}\bar{B} \pm \bar{A}\Delta B \pm \bar{B}\Delta A \pm \Delta A\Delta B \\
 \Rightarrow C &= \bar{A}\bar{B} \pm (\bar{A}\Delta B + \bar{B}\Delta A + \Delta A\Delta B)
 \end{aligned}$$

Sabemos que  $C$  deve ser expresso como uma melhor estimativa  $\bar{C}$  e um erro  $\Delta C$ . Nos termos da expressão acima, nós os identificamos como

$$\begin{aligned}
 \bar{C} &= \bar{A}\bar{B}, \\
 \Delta C &= \bar{A}\Delta B + \bar{B}\Delta A + \Delta A\Delta B \approx \bar{A}\Delta B + \bar{B}\Delta A,
 \end{aligned}$$

onde o termo  $\Delta A\Delta B$  foi desprezado porque um erro deve ser sempre de ordem de magnitude menor que a respectiva melhor estimativa, de modo que termos de dois ou mais erros multiplicados serão sempre muito menores que os demais termos.

### Solução 2.2

$$\begin{aligned}
 &(3,4 \pm 0,2) \text{ m} \times (6,2 \pm 0,3) \text{ m} \\
 &= [(3,4 \times 6,2) \pm (3,4 \times 0,3) \pm (0,2 \times 6,2) \pm (0,2 \times 0,3)] \text{ m}^2 \\
 &= [(21,08) \pm (1,74)] \text{ m}^2 \\
 &= (21,08 \pm 1,74) \text{ m}^2 \\
 &= (2,108 \pm 0,174) \times 10^1 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

**Solução 2.3**

$$\begin{aligned}
 & (1,5 \pm 0,1) \text{ m} \times (1,0 \pm 0,1) \text{ m} \times (1,0 \pm 0,1) \text{ m}^3 \\
 & = [ (1,5 \times 1,0 \times 1,0) \\
 & \pm (1,5 \times 1,0 \times 0,1) \pm (1,5 \times 0,1 \times 1,0) \pm (0,1 \times 1,0 \times 1,0) \\
 & \pm (1,5 \times 0,1 \times 0,1) \pm (0,1 \times 0,1 \times 1,0) \pm (0,1 \times 1,0 \times 0,1) \\
 & \pm (0,1 \times 0,1 \times 0,1) ] \text{ m}^3 \\
 & = [ 1,5 \pm (0,15 + 0,15 + 0,1 + 0,015 + 0,01 + 0,01 + 0,001) ] \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

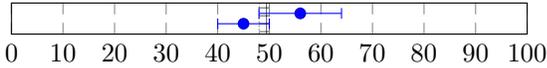
**Solução 2.4**

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{s}{t} \\
 \Rightarrow t &= \frac{s}{v} \\
 &= \frac{(212 \pm 14) \text{ km}}{(20,4 \pm 0,8) \frac{\text{km}}{\text{h}}} \\
 &= 10,4 \text{ h} \pm \frac{212 \cdot 0,8 + 20,4 \cdot 14}{20,4^2} \text{ h}
 \end{aligned}$$

**Solução 2.5**

Seguem algumas soluções do exercício.

- a)  $79,0 \text{ km} = 7,90 \times 10^1 \text{ km}$  (se o zero não fosse significativo, não precisaria ter sido mostrado em  $79,0 \text{ km}$ )
- b)  $56,78 = 5,678 \times 10^1$  (trata-se de uma medida adimensional)
- c)  $1005 \text{ m} = 1,005 \times 10^3 \text{ m}$  (os zeros estão intercalados por outros algarismos, então são significativos com certeza)
- d)  $400 \text{ km} = 4 \times 10^2 \text{ km}$  ou  $4,0 \times 10^2 \text{ km}$  ou  $4,00 \times 10^2 \text{ km}$  dependendo da significância dos zeros em  $400 \text{ km}$
- e)  $1 \text{ h } 23 \text{ min} = 83 \text{ min} = 8,3 \times 10^1 \text{ min}$  ou  $1 \text{ h } 23 \text{ min} = 1 \text{ h} + (23/60) \text{ h} = 1 \text{ h} + 0,38 \text{ h} = 1,38 \text{ h}$  ou  $1,38 \text{ h}$

**Solução 2.6****Solução 2.7**

Deve-se substituir as unidades derivadas pelas combinações de unidades básicas mostradas no quadro 2.2, por exemplo,  $\Omega = \frac{V}{A} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3 \text{ A}} \div A = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3 \text{ A}^2}$ .

**Solução 2.8**

Como uma polegada é igual a 2,54 cm, ou seja, 25,4 mm, basta multiplicar os valores em polegadas por 25,4 mm:

$$\frac{1}{2} \times 25,4 \text{ mm} = 12,7 \text{ mm}$$

$$\frac{3}{4} \times 25,4 \text{ mm} = 19,1 \text{ mm}$$

**Solução 2.9**

- a)  $2,5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$
- b)  $1,4 \times 10^5 \text{ m}^2$
- c)  $3 \times 10^{-8} \text{ m}$
- d)  $8,6 \times 10^4 \text{ s}$

**Solução 2.10**

Designação	Braças	Metros	Hectares	Estados
Alqueire	50 × 50	110 × 110	1,21	SP, MG
Alqueire	200 × 200	440 × 440	19,36	MG, BA, GO
Alqueire	75 × 75	165 × 165	2,72	TODOS
Alqueire Paulista	50 x 100	110 × 220	2,42	MA, ES, RJ, SP, MG, PE, SC, RS, MT, GO, PB
Alqueire Mineiro	100 x 100	220 x 220	4,84	AC, RN, BA, ES, RJ, SP, SC, RS, MT, GO, TO, MG

**Solução 2.11**

Este é um exercício prático, cuja resposta depende do tamanho com que a página foi impressa nesta edição. Para cada um dos triângulos, escolha um lado qualquer para ser a base, e trace uma reta perpendicular a essa base, indo da base até o vértice oposto do triângulo. Calcule, então, a área de cada triângulo pela equação 2.3.

**Solução 2.12**

O vetor  $\vec{A}$  origina-se no ponto  $2\hat{x} + 2\hat{y}$  e aponta para  $6\hat{x} + 6\hat{y}$ . Suas componentes, então, são  $(6 - 2)$  em  $x$  e  $(6 - 2)$  em  $y$ , ou seja, o vetor é  $4\hat{x} + 4\hat{y}$ .

Já o vetor  $\vec{C}$  vai do ponto  $18\hat{x} + 6\hat{y}$  ao  $14\hat{x} + 2\hat{y}$  (cheque isso contando os quadradinhos que representam unidades em  $x$  e em  $y$ ), portanto esse vetor é representado por  $(14 - 18)\hat{x} + (2 - 6)\hat{y}$ , ou seja,  $-4\hat{x} - 4\hat{y} = -(4\hat{x} + 4\hat{y})$ .

O cálculo de  $\vec{B}$  e  $\vec{D}$  é realizado de forma análoga.

**Solução 2.13**

a. (V)  $\vec{A} = -\vec{C}$

d. (V)  $\vec{A} + \vec{B} = -(\vec{C} + \vec{D})$

b. (V)  $\vec{B} = -\vec{D}$

e. (V)  $-\vec{A} - \vec{B} = +\vec{C} + \vec{D}$

c. (F)  $\vec{A} = -\vec{D}$

f. (F)  $-\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{D} + \vec{B})$

Temos  $\vec{A} = 4\hat{x} + 4\hat{y}$  e  $\vec{C} = -(4\hat{x} + 4\hat{y})$ . Isso significa que  $\vec{A} = -\vec{C}$ , o que pode ser checado na figura ao constatar que  $\vec{A}$  e  $-\vec{C}$  têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos contrários.

Analogamente, pode-se mostrar que  $\vec{B} = -\vec{D}$  e que  $\vec{A} \neq -\vec{D}$ .

Pode-se facilmente julgar os outros itens. Para isso, o sinal “menos” deverá ser distribuído dentro dos parênteses:  $-(\vec{C} + \vec{D}) = -\vec{C} - \vec{D}$  e  $-(\vec{D} + \vec{B}) = -\vec{D} - \vec{B}$ . Em seguida, deve-se fazer as seguintes substituições de maneira conveniente:  $\vec{A} \leftrightarrow -\vec{C}$  e  $\vec{B} \leftrightarrow -\vec{D}$ .

## Texto complementar 1

### RESERVA AMBIENTAL E RESERVA INDÍGENA

Confunde-se com frequência a natureza e os objetivos das reservas ambientais com os das reservas indígenas.

Reservas ambientais, ou áreas de proteção ambiental, são destinadas a preservar o ambiente nativo, incluindo a fauna, a flora, os rios e a vegetação. O objetivo é tanto proteger a biodiversidade, que se refere à diversidade de espécies de seres vivos existentes, quanto aos recursos que servem diretamente ao ser humano, como as águas e o solo. No Brasil, o Código Florestal em 2012 definiu:

Art. 3º Para os efeitos desta Lei, entende-se por: [...] III - Reserva Legal: área localizada no interior de uma propriedade ou posse rural, delimitada nos termos do art. 12, com a função de assegurar o uso econômico de modo sustentável dos recursos naturais do imóvel rural, auxiliar a conservação e a reabilitação dos processos ecológicos e promover a conservação da biodiversidade, bem como o abrigo e a proteção de fauna silvestre e da flora nativa; [...]  
(BRASIL, 2012)

O mesmo código estabeleceu as frações de área que deve ser preservada nas propriedades:

Art. 12. Todo imóvel rural deve manter área com cobertura de vegetação nativa, a título de Reserva Legal, sem prejuízo da aplicação das normas sobre as Áreas de Preservação Permanente, observados os seguintes percentuais mínimos em relação à área do imóvel, excetuados os casos previstos no art. 68 desta Lei: (Redação dada pela Lei no. 12.727, de 2012).  
I - localizado na Amazônia Legal:  
a) 80% (oitenta por cento), no imóvel situado em área de florestas;

- b) 35% (trinta e cinco por cento), no imóvel situado em área de cerrado;
  - c) 20% (vinte por cento), no imóvel situado em área de campos gerais;
- II - localizado nas demais regiões do País: 20% (vinte por cento).  
(BRASIL, 2012)

É comum que se pense que reservas indígenas também se destinem à preservação ambiental, tendo os povos indígenas como um tipo de vigilantes. Na verdade, o principal objetivo das reservas indígenas é permitir que os povos nativos tenham controle sobre seu modo de vida tradicional, mas os recursos naturais podem ser explorados com o consentimento desse povo. Assim, qualquer ação nessas áreas que interfira na vida dos nativos, como acordos com o governo para exploração dos recursos do subsolo, requerem “consulta prévia, livre e informada”. Não há obrigação de que os nativos mantenham sua cultura inalterada, apenas que tenham controle sobre ela. Essas condições foram estabelecidas na “Convenção nº 169 da Organização Internacional do Trabalho - OIT sobre Povos Indígenas e Tribais”, da qual o Brasil tornou-se signatário em 2004. Logo em seu caput, essa convenção traz o seguinte texto:

Reconhecendo as aspirações desses povos a assumir o controle de suas próprias instituições e formas de vida e seu desenvolvimento econômico, e manter e fortalecer suas identidades, línguas e religiões, dentro do âmbito dos Estados onde moram; [...]  
(BRASIL, 2004)

Essa convenção não se aplica apenas aos povos do continente americano conhecidos coletivamente como “índios”, mas a quaisquer povos “indígenas ou tribais”, que incluem, por exemplo, os *saami* da Suécia, os *ainu* do Japão e os quilombolas do Brasil.

No Brasil, a Fundação Nacional do Índio faz distinção de quatro tipos de terras indígenas:

Nos termos da legislação vigente (CF/88, Lei 6001/73 – Estatuto do Índio, Decreto n.º1775/96), as terras indígenas podem ser classificadas nas seguintes modalidades:

- Terras Indígenas Tradicionalmente Ocupadas: São as terras indígenas de que trata o art. 231 da Constituição Federal de 1988, direito originário dos povos indígenas, cujo processo de demarcação é disciplinado pelo Decreto n.º 1775/96.
- Reservas Indígenas: São terras doadas por terceiros, adquiridas ou desapropriadas pela União, que se destinam à posse permanente dos povos indígenas. São terras que também pertencem ao patrimônio da União, mas não se confundem com as terras de ocupação tradicional. Existem terras indígenas, no entanto, que foram reservadas pelos estados-membros, principalmente durante a primeira metade do século XX, que são reconhecidas como de ocupação tradicional.
- Terras Dominiais: São as terras de propriedade das comunidades indígenas, havidas, por qualquer das formas de aquisição do domínio, nos termos da legislação civil.
- Interditadas: São áreas interditadas pela Funai para proteção dos povos e grupos indígenas isolados, com o estabelecimento de restrição de ingresso e trânsito de terceiros na área. A interdição da área pode ser realizada concomitantemente ou não com o processo de demarcação, disciplinado pelo Decreto n.º 1775/96.

(FUNAI, 2018)

A página da FUNAI também informava no tempo da escrita deste texto (10 de julho de 2015) que havia 588 unidades de terras indígenas no país, totalizando  $113,518 \times 10^6$  ha, dos quais  $112,362 \times 10^6$  ha são de terras tradicionalmente ocupadas, sendo  $104,824 \times 10^6$  ha regularizados e o

resto dessa terra em outras fases de processo (delimitada, declarada e homologada). Havia ainda 125 processos em estudo, portanto com terra indígena desconhecida. Muitos conflitos entre produtores rurais e povos nativos devem-se à dificuldade em determinar o direito à terra. Embora os povos nativos sejam, por definição, os povos que ocupavam originalmente a terra de todo o país, muitos desses povos são seminômades, como, por exemplo, os guaranis, que frequentemente se deslocam em busca de *ivy marãey*, a “terra sem males”, e também não se pode ignorar os direitos de todos os não nativos que povoaram o país desde então. Por outro lado, muitos produtores têm títulos de propriedades que lhes foram passados por seus antepassados, e muitas vezes é difícil saber se a terra foi originalmente obtida de modo legítimo ou por meio de “grilagem” de terras indígenas. Produtores rurais também podem recorrer ao direito de uso, o chamado “usucapião”, por estarem *de facto* na terra há anos. Para complicar, “produtor rural” e “indígena” não são atributos mutuamente excludentes, pois existem também agricultores indígenas com diferentes graus de apego à cultura materna e diferentes graus de mestiçagem. Embora essa questão enseje muito posicionamento automático, ideologicamente motivado, a maioria dos conflitos está sendo decidida judicialmente, caso a caso (o que não signifique que a ideologia de cada juiz não interfira eventualmente). Parece-nos uma questão delicada, com potencial de polarizar o país, e requer muita ponderação e tentativa de conciliação.



# Capítulo 3

## Cinemática

A **Cinemática** é a parte da Mecânica que descreve o movimento dos corpos, mas ainda sem explicar as causas desses movimentos. Por meio da cinemática, descrevemos a posição, a velocidade e a aceleração de um corpo nos mais diferentes tipos de movimento: retilíneo, circular, acelerado etc.

### JETHRO TULL E A SEMEADEIRA

Muitos já ouviram falar na banda inglesa *Jethro Tull*. Talvez bem menos pessoas saibam que o nome da banda é referência ao agricultor Jethro Tull, que inventou a semeadeira mecânica em 1701. Esse aparato tornou o plantio mais rápido e controlado em todo o mundo. Existem vários modelos, desde portáteis, artesanais e manuais até aqueles de alta tecnologia acoplados a tratores.

### 3.1 Partícula e centro de massa

#### Partícula

Existem situações nas quais as dimensões de um corpo podem ser desprezadas, de modo que podemos considerá-lo como uma *partícula*. Por exemplo, quando alguém pega uma pequena pedra e a lança com força, obliquamente,<sup>1</sup> a trajetória que a pedra “desenha” no ar pode ser descrita pela curva chamada “parábola”. Mas, quando assim a descrevemos, estamos ignorando vários detalhes (que assumimos como) irrelevantes, como o formato da pedra, sua estrutura química, sua rotação. No entanto, é bem fácil imaginar situações em que detalhes

<sup>1</sup>A palavra “oblíquo(a)” significa “inclinado(a)” e é tradicionalmente usada na Física em expressões tais como “lançamento oblíquo”.

de uma pedra são importantes. Você provavelmente não lançaria uma pedra de diamante com o mesmo descuido que lança cascalhos. Isso indica que um corpo pode ou não ser considerado uma partícula, dependendo de como descreve o sistema.

Em geral, um corpo pode ser considerado uma partícula quando suas dimensões são muito pequenas em relação às dimensões do problema. De todo modo, o conceito de partícula é um conceito fundamental da Mecânica (LANDAU; LIFSHITZ, 1960), sem o qual a maioria de suas descrições seriam impossíveis. Outros nomes utilizados para “partícula” são “ponto material” e “corpo pontual”.

### Exercício 3.1 CORPO COMO PARTÍCULA

Imagine e descreva duas situações físicas:

- uma na qual um corpo é adequadamente descrito como uma partícula;
- outra na qual um corpo (o mesmo ou outro) *não* pode ser considerado uma partícula.

### Exercício 3.2 SEMENTES NUMA SEMEADEIRA

Em uma semeadeira, as sementes devem ser consideradas como partículas?

## Movimento linear

Como uma partícula não tem dimensão volumétrica, o seu movimento mais geral é ao longo de uma linha, definida como um caminho com comprimento mas sem largura, com velocidade qualquer, constante ou variável. Essa linha pode se curvar no espaço de qualquer modo possível, pode se dobrar em ângulos e passar pelos mesmos pontos várias vezes. Em alguns casos, o movimento linear é dividido em dois tipos:

- movimento retilíneo: ao longo de uma linha reta;
- movimento curvilíneo: ao longo de uma linha curva.

Como, atualmente, a ciência é divulgada principalmente no idioma inglês, é importante apontar uma diferença no uso de expressões cognatas dessas.<sup>2</sup> Normalmente, em inglês, usa-se a expressão *linear* com o sentido de “retilíneo” (*rectilinear*). Ou seja, *linear* e *rectilinear*, na maneira normalmente empregada

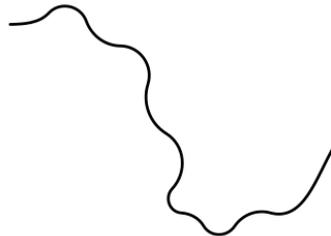
<sup>2</sup>Cognatos: que têm a mesma origem

na Física em inglês, são praticamente sinônimos. No entanto, parece-nos mais lógico que “linear” inclua “retilíneo” e “curvilíneo”. A julgar pelas palavras em inglês (*linear*, *rectilinear* e *curvilinear*), essa definição pareceria ainda mais lógica em inglês, a despeito do uso corrente.

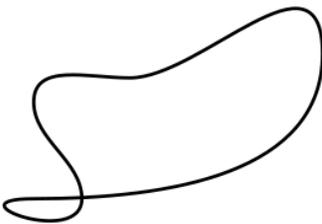
**Figura 3.1:** Ilustração de caminhos pelos quais pode haver movimentos lineares. Todos os caminhos mostrados são planares (bidimensionais), por estarem contidos no plano do papel. Um movimento linear também poderia sair do plano, fazendo assim uma trajetória linear num espaço tridimensional.



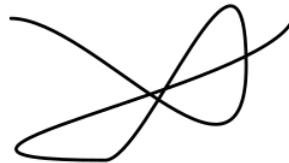
(a) Um caminho linear.



(b) Ilustração de um caminho linear sinuoso. Talvez descreva o curso de um rio.



(c) Caminho linear cíclico.



(d) Caminho linear com cruzamentos.

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro usando *LuaTeX* (pacote *luamplib*).

## Centro de massa

Experimente lançar um objeto longo, como uma caneta, para cima, de modo que ele gire. Observe que a maioria dos pontos do corpo descrevem trajetórias curvas, mas existe uma pequena região no meio do objeto que parece não girar. Por outro lado, parece que todas as outras partes do objeto giram em torno dessa pequena região.

Essa “pequena região” é imensamente importante em Física. De fato, existe um único ponto desse objeto, em seu interior, que descreve uma trajetória relativamente simples, parabólica. Esse ponto é chamado de “centro de massa”.

A posição do **centro de massa de um conjunto discreto de partículas** é calculada como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N [m_i \vec{r}_i]}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad 3.1$$

onde  $\vec{r}_{cm}$  é a posição do centro de massa;  $i$  percorre os índices de todas as partículas do sistema;  $N$  é o número total de partículas, e  $m_i$  é a massa da partícula  $i$ . Note que o centro de massa se define como uma *média ponderada* dos elementos que o compõem, sendo as massas destes elementos os pesos da ponderação.

O centro de massa de um corpo coincide com o seu *centro geométrico* se sua densidade for homogênea, ou seja, se a sua massa está igualmente distribuída pelo seu volume. Isso pode ser visto a partir da equação anterior. De fato, grosso modo, se as massas que compõem o corpo não variam de região a região deste, então podemos colocá-las em evidência no numerador e o centro de massa será, apenas, a média simples, não a média ponderada, dos pontos geométricos do corpo.

Existe também o conceito de “centro de gravidade”, que coincide com o centro de massa para os nossos propósitos. Novamente, poderíamos pensar no centro de gravidade como sendo definido não apenas pela média ponderada das massas, mas a média ponderada dos pesos, ou seja, envolvendo a aceleração da gravidade, tanto no numerador, quanto no denominador. Se a gravidade se apresenta essencialmente constante na região de interesse, então o termo relativo à aceleração da gravidade pode ser colocado em evidência tanto no numerador, quanto no denominador e, assim, cancelado da expressão.

### Exercício 3.3 ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE

A aceleração da gravidade é dada pela expressão

$$g = \frac{MG}{(R + r)^2},$$

em que  $M$  é a massa da Terra,  $G$  a constante de gravitação,  $R$  é o raio da Terra e  $r$  é a posição da partícula contada desde a superfície. Considere, agora, o cálculo do centro de massa de duas partículas, de massas  $m_1 = 1$  kg e  $m_2 = 2$  kg posicionadas sobre a superfície da Terra e sobre o topo de um prédio com aproximadamente 120 m.

Calcule o centro de massa desprezando a aceleração da gravidade. Calcule também o centro de gravidade, tomando por base a gravidade sobre a superfície da Terra. Encontre, então, a diferença entre os dois resultados.

O centro de gravidade de um corpo somente seria significativamente diferente de seu centro de massa se ele fosse tão alto que a força da gravidade sofrida por sua parte mais baixa fosse significativamente maior que a força da gravidade sofrida por sua parte mais alta. De fato, a força da gravidade sofrida por um corpo (ou pela parte de um corpo) é maior quando ele está mais próximo da superfície da Terra (do centro da Terra, mais precisamente), mas essa diferença é desprezível na maioria dos problemas, pois o ser humano ocupa uma finíssima película na superfície terrestre, de espessura desprezível em relação ao seu diâmetro. Essa diferença só será considerável em problemas aeroespaciais e astronômicos.

Entretanto, em alguns casos, mais associados à *hidrostática* e à *hidrodinâmica*, que estudaremos mais adiante, o “corpo” pode ser a atmosfera toda, ou uma extensa parte dela, e o estudo em questão pode referir-se à distribuição de vegetação em função da altitude (e, portanto, também do clima). Voltaremos a esses pontos quando estudarmos a *Mecânica dos Fluidos*, em capítulo posterior.

Para muitos sólidos de densidade homogênea, uma esfera ou um cubo, por exemplo, a posição do centro de massa é óbvia. Tal obviedade decorre da existência de *simetrias*, ou seja, de partes do corpo que são equivalentes. Se um bastão cilíndrico, de densidade homogênea, tem um metro de comprimento, o seu centro de massa só pode estar a meio metro da extremidade, porque uma metade é igual à outra e, assim, não há razão para que o centro de massa esteja mais próximo de uma extremidade que da outra.

Alguns outros corpos, embora sejam mais complexos, podem ser decompostos e representados por um *conjunto discreto de partículas*. Considere, por exemplo, um halter de musculação composto de duas esferas ligadas por uma haste cilíndrica. Os centros de massa das esferas e da haste localizam-se em seus centros geométricos. Portanto, o halter pode ser representado por um conjunto de três partículas localizadas nesses centros de massa, cada uma contendo toda a massa da respectiva parte.

A equação 3.1 é um pouco difícil de ser entendida por conter grandezas vetoriais e somatórias. Por isso, é conveniente apresentá-la também numa forma menos sintética, mais “aberta”. Se o vetor  $\vec{r}_{cm}$  for representado por coordenadas  $xyz$ , a equação 3.1 pode ser escrita na forma

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{x} + y_{cm}\hat{y} + z_{cm}\hat{z},$$

ou, de forma expandida,

$$\begin{aligned}\vec{x}_{cm} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N}, \\ \vec{y}_{cm} &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N}, \\ \vec{z}_{cm} &= \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \dots + m_Nz_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N}.\end{aligned}$$

### Exercício 3.4 HALTERE

Um haltere de musculação é composto de duas esferas, cada uma de massa igual a 5,0 kg, cujos centros são ligados por uma haste cilíndrica de massa igual a  $2,0 \times 10^{-1}$  kg e comprimento igual a 60 cm. Considerando que a densidade de cada um desses elementos é homogênea, responda:

- Onde se localiza o centro de massa do haltere?
- Se uma das esferas for retirada do haltere, onde estará localizado o novo centro de massa do sistema composto pela haste e apenas uma esfera?

## 3.2 Movimento uniforme

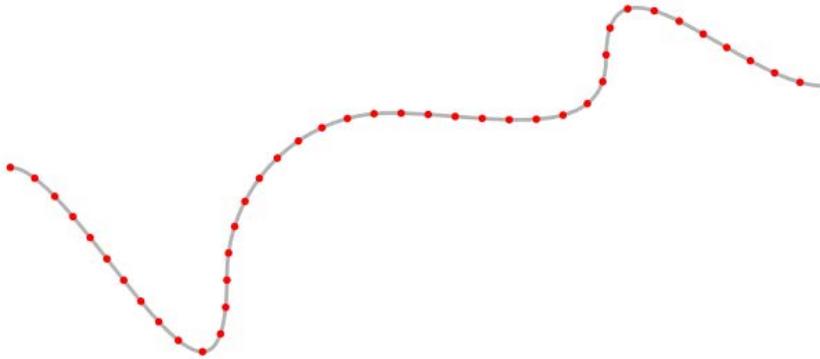
Na Cinemática, o adjetivo “uniforme” é reservado ao movimento de um corpo cuja velocidade, *em módulo*, é mantida constante.

### Movimento linear uniforme

O caso mais geral de movimento uniforme de um corpo pontual é o **Movimento Linear Uniforme** (MLU), o que significa simplesmente que sua posição segue uma “linha” com velocidade constante de magnitude constante. Bem, o movimento de uma partícula só poderia ser *linear*, uma vez que ela não tem dimensão considerável, mas o caminho pode ter absolutamente qualquer forma.

**Figura 3.2:** Representação de um movimento linear uniforme

Mais especificamente, movimento curvilíneo uniforme. Os círculos representam a posição de um corpo pontual após períodos regulares, ou seja, em instantes separados pelo mesmo intervalo de tempo do instante anterior. Por ter movimento uniforme, a distância percorrida ao longo da linha também é regularmente espaçada.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro usando *LuaTeX* (pacote *luamplib*).

Por exemplo, se quisermos medir a velocidade de fluxo de um rio, podemos soltar um flutuador em sua correnteza e medir o tempo que ele leva para percorrer uma certa distância. Tal flutuador poderia ser, por exemplo, uma simples garrafa vazia. Se a garrafa não ficar presa em vórtices e pudermos desconsiderar pequenas variações de sua velocidade, o seu movimento será bem descrito por um MLU.<sup>3</sup>

Se um corpo se movimenta em MLU com velocidade  $v$ , o seu deslocamento  $\Delta s$  ao longo do caminho, durante um período de tempo  $\Delta t$ , é descrito por

$$\Delta s = v\Delta t. \quad 3.2$$

<sup>3</sup>O leitor deve começar a ter uma noção da importância de se fazer certas simplificações para que um determinado problema tenha solução passível de ser obtida com razoável grau de precisão. Em vários casos concretos, as simplificações usuais da Física não podem ser aplicadas e são necessárias especificações de caráter empírico sobre o sistema natural considerado. O campo da Engenharia não se reduz, portanto, a uma "Física aplicada", mas carrega consigo suas próprias especificidades. O conhecimento dos princípios, entretanto, conhecimento precípuo da Física, é condição de possibilidade para a compreensão de situações concretas mais complexas. Veremos exemplos disso ao longo de toda esta obra.

A versão mais conhecida dessa fórmula é obtida substituindo  $\Delta s$  por  $s - s_0$  e  $\Delta t$  por  $t - t_0$ ,

$$\begin{aligned} s - s_0 &= v(t - t_0), \\ \Rightarrow s &= s_0 + v(t - t_0) \end{aligned}$$

e definindo  $t_0 = 0$ , de modo que

$$s = s_0 + vt, \quad 3.3$$

que é a chamada “**função horária da posição do movimento uniforme**”.

Se, além disso, definimos  $s_0 = 0$ , temos

$$s = vt. \quad 3.4$$

### Exercício 3.5 FLUTUADOR EM MLU

Por meio de várias medidas usando um flutuador, constatou-se que a velocidade de fluxo de um rio é igual a  $(20,4 \pm 0,8) \text{ km/h}$ . Que distância, ao longo do rio, esse flutuador percorrerá em 45 minutos?

## Movimento retilíneo uniforme

No caso particular em que a direção e o sentido da velocidade também são mantidos constantes, diz-se que a velocidade é *vetorialmente constante* e que o movimento é um **Movimento Retilíneo Uniforme** (MRU), pelo qual um corpo desloca-se ao longo de uma linha reta. Desse modo, o MRU é um caso particular de MLU.

O estudo do MRU é importantíssimo na Dinâmica, tendo papel fundamental nas *Leis de Newton*. Matematicamente, a descrição de um MRU é feita definindo o eixo- $x$  como tendo a direção do movimento e substituindo  $s$  por  $x$  nas equações 3.2-3.4, de modo a termos

$$\begin{aligned} \Delta x &= v\Delta t, \\ x - x_0 &= v(t - t_0), \\ x &= x_0 + vt \quad \text{para } t_0 = 0. \end{aligned}$$

## Movimento circular uniforme

Outro tipo de movimento linear uniforme é o **Movimento Circular Uniforme** (MCU), no qual uma partícula segue uma trajetória circular com velocidade de magnitude constante. O MCU pode ser usado para descrever a posição de um planeta em torno de seu sol ou de um ponto de um corpo qualquer em rotação. As equações 3.2-3.4 aplicam-se também ao MCU, mas, devido ao fato de o caminho ser cíclico, deve-se tomar alguns cuidados. A posição  $s$ , por exemplo, após uma volta completa será igual a  $2\pi R$ , não zero, mesmo que o corpo tenha voltado à posição inicial. Assim,  $\Delta s$  deve ser definido como a distância *total* percorrida sobre a circunferência num tempo  $\Delta t$ , somando o comprimento de um caminho quantas vezes ele for novamente percorrido.

A capacidade de se manter um movimento uniforme em uma dada região pode ter relevância para, por exemplo, o efeito da irrigação de determinada plantação. Em irrigadores que utilizam o processo de pivotagem, o movimento do braço de irrigação é essencialmente circular (ao redor do pivot) e a uniformidade do movimento assegura a distribuição homogênea de água ao longo do processo de irrigação. Assim, para regiões cuja topologia não é muito simples, como um plano, conseguir uma irrigação homogênea por meio de irrigadores com movimento circular pode se tornar uma questão consideravelmente mais complexa, uma vez que a manutenção da velocidade uniforme não será mais uma tarefa simples.

### Exercício 3.6 REGIÃO DE PLANTIO EM DECLIVE

Considere uma região para plantio que seja em declive. Discorra sobre a maneira que você consideraria mais apropriada para se planejar a irrigação da região. Investigue, na internet, os tipos de irrigação que existem e escolha aquele que julgar mais pertinente à situação em questão. Mais ainda, uma vez escolhido o *tipo* de irrigação, discorra sobre uma possível solução para que o *resultado* da irrigação seja o mais homogêneo possível.

## Aplicação a movimentos não uniformes

As equações que se aplicam ao MLU podem ser aplicadas a movimentos lineares em geral, não necessariamente uniformes, desde que a velocidade  $v$  seja reinterpretada como a velocidade média. Ou seja, deve-se fazer a substituição  $v \rightarrow \bar{v}$ , onde  $\bar{v}$  representa a velocidade média durante o período de tempo  $\Delta t$ , obtendo assim

$$\Delta s = \bar{v} \Delta t. \quad 3.5$$

Entretanto, a utilização dessa equação é diferente para um movimento não uniforme arbitrário. Como o valor de  $\bar{v}$  varia com o tempo, ele não pode ser previamente definido. Por isso, normalmente  $\bar{v}$  é calculada *depois* de ter-se já medidas as variações  $\Delta s$  e  $\Delta t$ , de modo que a equação 3.5 é melhor escrita como

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Se, em alguma situação, tivéssemos a velocidade média  $\bar{v}$  disponível antes de  $\Delta s$  e  $\Delta t$ , essa velocidade média seria uma *estimativa*, não uma medição. Por exemplo, se sabemos que as aves de uma determinada espécie viajam a uma velocidade média de  $20,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  durante sua migração anual, podemos estimar que uma ave terá percorrido algo em torno de vinte quilômetros no período de uma hora. No entanto, não se pode ter certeza dessa distância, pois a velocidade das aves não é constante. Outra possibilidade é que sua velocidade média seja de fato calculada através dos valores medidos para  $\Delta s$  e  $\Delta t$  durante todo o percurso das aves, e queira-se depois saber *onde* estavam num tempo anterior, ou *quando* estavam num certo local de seu caminho.

### Exercício 3.7 MIGRAÇÃO DE AVES

Durante sua migração anual, um certo bando de aves viaja, em linha reta, a uma velocidade média de  $20,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Esse valor foi obtido por meio de uma média dos valores observados em anos anteriores. Na migração deste ano, a que distância estarão de sua posição inicial após um tempo de 12 h de viagem? Essa é uma medida precisa?

### Exercício 3.8 ATRASADO OU ADIANTADO?

Um agricultor deve transportar um trator, percorrendo um caminho de  $(135 \pm 6) \text{ km}$ , em três horas, no máximo. Considerando que, após uma hora de viagem, ele tenha percorrido  $(47 \pm 5) \text{ km}$ , devemos considerar que está atrasado, adiantado ou em progresso adequado?

## 3.3 Cálculo de velocidade de fluxo e vazão de rios

A velocidade média de fluxo da água de um rio pode ser estimada por meio de um flutuador, que pode ser, por exemplo, uma garrafa PET preparada apropriadamente. Para isso, o seguinte procedimento poderia ser seguido:

- esvazie a garrafa PET de seu conteúdo original;

- preencha o seu volume interno até a metade com água;
- feche-a com sua tampa de modo que ela esteja completamente vedada (pode ser utilizado algum tipo de fita).

Assim, você terá uma garrafa com metade de seu volume interno preenchido com água e a outra metade preenchida com ar. Com isso, aproximadamente metade da garrafa ficará dentro da água quando ela for deixada sobre a correnteza do rio. Se a garrafa estivesse preenchida apenas com ar, ficaria quase toda fora da água e provavelmente não seria levada com a mesma velocidade da correnteza. Por outro lado, se estivesse preenchida apenas com água, ficaria quase totalmente dentro da água, podendo não ficar suficientemente visível pelo lado de fora, ou poderia até mesmo afundar devido a uma diferença de densidade entre a água de dentro e a de fora. No entanto, Carvalho (2008) recomenda colocar areia dentro da garrafa para que sua maior parte fique submersa; uma vantagem desse procedimento é permitir que o mesmo lado da garrafa fique sempre do lado de fora, visto que a areia ocupa um volume menor no fundo da garrafa e é menos provável que ela mude de lado (ao contrário da água). Por outro lado, pode ser que a garrafa se comporte como um pêndulo, usando parte da energia da correnteza para oscilar.

A vazão de um rio é definida como o volume de água que ele transporta num certo tempo. Essa vazão pode ser calculada multiplicando-se, num certo ponto, sua velocidade pela área de sua seção transversal. Por exemplo, se a sua velocidade é  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  num ponto em que sua seção transversal é  $30 \text{ km}^2$ , sua vazão é  $600 \frac{\text{km}}{\text{h}^3}$ . Essa medida é mais bem realizada num trecho do rio em que a velocidade varie menos. A velocidade do rio varia com sua largura e sua profundidade. De modo geral, a velocidade é maior onde o rio é mais estreito (na verdade, onde sua seção transversal é menor). Assim, deve-se escolher um trecho em que a largura do rio seja mais estável.

Ainda nos falta decidir como estimar a área da seção transversal do rio. Para isso, devemos conhecer sua profundidade em alguns pontos. O seguinte procedimento poderia ser realizado:

- defina uma linha no rio que o atravesse de uma margem à margem oposta, na direção perpendicular ao fluxo;
- atravesse o rio seguindo essa linha, medindo a profundidade do rio em vários pontos igualmente espaçados;
- calcule a profundidade média a partir dessas medidas;
- multiplique a profundidade média pela largura do rio (que é o comprimento da linha acima definida).

Uma outra questão é como medir a profundidade do rio. Se for um rio não muito profundo, isso poderia ser feito, em cada ponto, inserindo-se uma longa vara verticalmente até que a ponta da vara toque o leito do rio. Então, marca-se a parte da vara que está na superfície do rio, retira-se a vara e mede-se a distância entre essa marca e a ponta que tocava o leito: esta é a profundidade do rio nesse ponto.

Este procedimento fornece uma estimativa para a vazão do rio, mas tem várias limitações. Primeiramente, a velocidade da água na superfície do rio é, de forma geral, diferente da velocidade da água no interior do volume do rio. Essa velocidade também é menor na superfície próxima às margens. À medida que se aproxima do leito do rio (o “fundo”) ou de uma de suas margens, a velocidade da água aproxima-se de zero, ou seja, a água permanece quase parada quando está próxima das margens ou do leito. Isso acontece devido à *viscosidade*, ou seja, ao atrito das camadas de água entre si e com as superfícies sólidas. Quando feita profissionalmente, a medida da vazão inclui alguns equipamentos especiais, como o *molinete hidrométrico*, que possui uma hélice que gira em contato com a água em movimento e permite calcular a velocidade da água pela quantidade de voltas que a hélice realiza em certo tempo.

Outra limitação é que, se o rio for muito profundo, não é adequado medir sua profundidade com uma vara. Uma solução poderia ser amarrar uma pedra a uma linha de pesca e liberá-la até que a pedra toque o leito do rio; mas pode ser difícil saber se a pedra realmente já chegou ao leito e garantir que a linha não esteja curvada. Existem métodos profissionais para medir a profundidade do rio, como as *ecossondas*, que emitem ondas sonoras que são refletidas pelo leito do rio e detectadas novamente quando retornam.<sup>4</sup> Outro fenômeno importante, discutido nesse trabalho, é que a vazão de um rio tende a diminuir ao longo de seu fluxo, pois há sempre uma fração da água perdida por penetração no subsolo e formação de lagos.

**Problema 3.1.** Um flutuador, deixado na correnteza de um rio, percorre  $(1,5 \pm 0,1)$  km em 30 min. Se a seção transversal desse rio foi estimada como  $50 \text{ m}^2$ , qual é a vazão do rio, em volume de água por unidade de tempo?

<sup>4</sup>Thiago Morato de Carvalho (2008) discute métodos de medição da vazão, de forma didática, em seu artigo *Técnicas de medição de vazão por meio convencionais e não convencionais* (CARVALHO, 2008).

**Problema 3.2.** A largura de um riacho, medida ao longo de uma linha que o atravessa perpendicularmente ao seu fluxo, foi medida como 3,1 m. Em seguida, a profundidade desse rio foi medida em sete pontos igualmente espaçados ao longo dessa linha, de uma margem à outra. Os resultados foram: 0,0 m, 0,5 m, 0,7 m, 1,5 m, 1,0 m, 0,3 m e 0,1 m.

- (a) Estime a área da seção transversal desse rio.
- (b) Considerando que a velocidade média de fluxo do rio, nessa seção transversal, é igual a  $5,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , estime a vazão do rio.

**Problema 3.3.** A seção transversal de um rio pode ser considerada um quadrado de um metro de profundidade por um metro de largura. A velocidade máxima da água ocorre na superfície do rio e num ponto equidistante das duas margens. Nesses pontos, seu valor é  $2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . A velocidade da água decresce linearmente na superfície, do meio até cada uma das partes, chegando a zero nas margens. Além disso, a velocidade também decresce linearmente ao percorrer qualquer linha vertical que vá da superfície ao fundo do rio, chegando a valor também nulo na parte mais funda do rio. Tomando essas informações como base, calcule a velocidade média de fluxo do rio.

### Exercício 3.9 VELOCIDADE DAS ÁGUAS

Considere um tubo de raio  $R$  e comprimento  $L$  no interior do qual é possível mover-se uma esfera homogênea de raio ligeiramente menor que  $R$ . Sugira um arranjo experimental para se medir, mesmo que de modo rudimentar, a velocidade das águas de um rio em determinada região. Que especificação deve ter: (a) a esfera, para que a medição seja a melhor possível? (b) o tubo, para que a medição represente um valor de velocidade, em termos práticos, em um *ponto* do rio? (c) como deveria ser feita a medição para que se chegasse ao valor médio das águas do rio naquele ponto?

## 3.4 Movimento linear uniformemente variado

É bem evidente que uma pedra de meio quilo, se solta de uma altura de dois metros, fará mais estrago no piso que se for solta de apenas dez centímetros. Isso acontece porque a pedra chegará ao solo numa *velocidade maior* se vier em queda livre de um ponto mais alto. Parece, então, que a velocidade da pedra em queda seja proporcional ao tempo em que ela permanece caindo.

Num movimento linear uniformemente variado (MLUV), a velocidade, em módulo, aumenta uniformemente com o tempo. No movimento linear uniforme (MLU), era o deslocamento que aumentava uniformemente com o tempo, portanto a equação 3.2 pode ser adaptada ao MLUV ao se fazer as substituições  $s \rightarrow v$  e  $v \rightarrow a$ , resultando em

$$\Delta v = a\Delta t,$$

onde  $a$  é a aceleração, que é a grandeza constante no MUV.

Fazendo as mesmas substituições na equação 3.3, chegamos, para o MLUV, a

$$v = v_0 + at, \quad 3.6$$

onde  $v_0$  é a velocidade inicial (no tempo  $t = 0$ ).

Se, além disso, definimos  $v_0 = 0$ , temos

$$v = at.$$

*Leonardo da Vinci* achava que a distância vertical percorrida pelos corpos em queda aumentava linearmente, ou seja, seguia a sequência dos números inteiros: percorreria 1L no primeiro segundo, 2L no segundo segundo, e 3L, 4L, e assim por diante, nos segundos seguintes (FRAUTSCHI, 2007). Posteriormente, *Galileu Galilei* mostrou que isso estava incorreto e a sequência dos *números ímpares* é que deveria ser utilizada: o corpo percorreria 1L no primeiro segundo, 3L no segundo segundo, e 5L, 7L, e assim por diante, nos segundos seguintes.

É interessante notar que os números ímpares, somados em série, dão origem a números inteiros ao quadrado:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 &= 36 = 6^2 \end{aligned}$$

...

Isso significa que a distância total percorrida é proporcional ao quadrado do tempo total decorrido. Atualmente, isso é facilmente entendido através da chamada “**função horária da posição do movimento linear uniformemente variado (MLUV)**”, estudada no Ensino Médio:

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad 3.7$$

onde  $v_0$  é a velocidade inicial (no tempo  $t = 0$ ) e  $a$  é a aceleração, constante no MLUV.

Mais especificamente, o corpo em queda livre, se solto com velocidade nula ou vertical para baixo, seguirá um **movimento retilíneo uniformemente variado**, pois desce verticalmente ao solo. Para passar de “linear” a “retilíneo”, apenas mude  $s$  pela coordenada cartesiana alinhada com o movimento. Se representarmos o eixo vertical por  $z$ , e a aceleração da gravidade por  $g$ , a equação fica:

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}gt^2. \quad 3.8$$

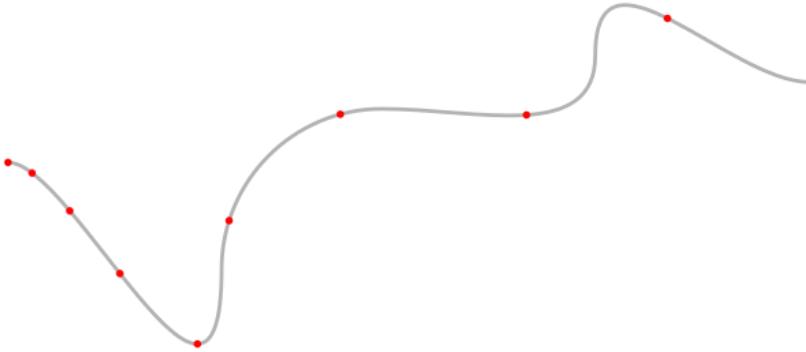
É interessante que, mesmo que o corpo tenha componentes de velocidade inicial nas direções perpendiculares ao eixo  $z$ , ou seja,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$ , essas componentes não influenciarão a componente  $z$  da posição, de modo que a equação 3.8 continue válida. Tratar-se-á assim de um **lançamento oblíquo**, equivalente à composição formada por um MRUV na direção vertical e um MRU nas direções horizontais:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \\ y &= y_0 + v_y t \\ z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Note que a ausência do índice 0 nas variáveis  $v_x$  e  $v_y$  indica que elas não variam. Ou seja, a velocidade horizontal de um corpo em queda livre permanece constante, não é afetada pela gravidade.

É conveniente ressaltar aqui que, na prática, corpos em queda nem sempre aumentam uniformemente o módulo da componente vertical de sua velocidade vertical. Se um paraquedista, após saltar, aumentasse sua velocidade vertical uniformemente, logo chegaria a  $36.000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  depois de apenas um minuto de queda. Considerando que um paraquedista salta tipicamente de uma altura de uns 3600 m (aprox. 12 mil pés), isso significa que ele cairia dez vezes mais que a altura *total* da queda *em apenas um segundo*. Essa velocidade enorme não é atingida devido à **resistência do ar**, que ocorre em função do atrito do corpo do paraquedista com as moléculas de ar. Quanto maior a sua velocidade de queda, maior também a resistência do ar, de modo que, após algum tempo, a força de resistência do ar equilibra a força da gravidade, e o paraquedista passa a cair em movimento *uniforme*, não mais uniformemente variado.

**Figura 3.3:** Representação de um movimento linear uniformemente variado. Mais especificamente, movimento curvilíneo uniformemente variado. Os círculos representam a posição de um corpo pontual após períodos regulares, ou seja, em instantes separados pelo mesmo intervalo de tempo do instante anterior. Por ter movimento uniformemente variado, a distância percorrida ao longo da linha também aumenta por uma mesma quantidade a cada período.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro usando *LuaTeX* (pacote *luamplib*).

### 3.5 Translação e rotação

Quando alunos do Ensino Fundamental estudam o movimento dos planetas, são expostos pela primeira vez aos conceitos de *translação* e *rotação*. Em geral, fica-se com a falsa impressão de que translação significa “rotação em torno do Sol”, quando, na verdade, **translação é o movimento paralelo de todas as partes de um corpo numa direção**. A expressão “translação da Terra” é provavelmente devido ao fato de que a direção do movimento da Terra em torno do Sol muda muito vagarosamente, de modo que pode ser tomada como uma translação pontualmente, principalmente quando contrastada com a rotação da Terra em torno de seu próprio eixo.

O movimento de **rotação** é caracterizado pelo **movimento das partes de um corpo em torno de um eixo**. Um pião que gira numa posição fixa do chão executa uma rotação pura (ou quase pura) em torno de um eixo que passa por seu centro na direção vertical. A roda de um carro também gira em torno de um eixo durante o seu movimento, mas o seu movimento é uma composição de

translação e rotação chamada **rolamento**, pois a posição do eixo sofre translação. O movimento de um corpo rígido é adequadamente descrito por meio de composições de translações e rotações, ainda que às vezes seja necessário mudar a direção da translação e do eixo de rotação durante o movimento.

Um fato muito interessante é que, além da inércia convencional descrita na *Primeira Lei de Newton*, também se observa uma **inércia rotacional** num corpo rígido, pois ele tende a manter o seu estado de rotação, a menos que alguma força o altere. A capacidade que uma força tem de alterar esse estado de rotação é chamada de *torque*. A inércia rotacional é observada num pião em rotação, que demora a perder seu movimento, e também na rotação de rodas de veículos de duas rodas, caso no qual ela ajuda a manter a estabilidade do veículo, pois a inércia rotacional dificulta a mudança da direção do eixo de rotação das rodas. Assim como a força tende a alterar o movimento translacional de uma partícula, mudando seu *momento linear*, o torque tende a alterar o movimento rotacional de um corpo, mudando seu *momento angular*.

## Grandezas rotacionais

Para descrever propriamente a rotação de corpos em torno de eixos, definem-se as **grandezas rotacionais**, mostradas no quadro 3.1. Nessa tabela, a maioria das grandezas rotacionais está expressa como *escalar* ao invés de *vetorial*, mas pode-se defini-las todas como vetores, tomando, como sua direção, a direção do eixo de rotação e, como seu sentido, o sentido dado pela *regra da mão direita* que, neste caso, pode ser simplificada estabelecendo-se que **rotações do sentido horário correspondem ao sentido que vai do observador ao sistema** (“entrando no papel”, quando o sistema está desenhado) e **rotações do sentido anti-horário correspondem ao sentido que vai do sistema ao observador ao sistema** (“saindo do papel”). Algumas das grandezas translacionais mostradas no quadro 3.1 são, na verdade, todas ao longo da linha de uma circunferência, mas que a definição de momento angular e torque são mais gerais e não valem apenas para movimentos circulares.

**Quadro 3.1:** Relação entre grandezas translacionais e grandezas rotacionais. Grandezas com índice  $\circ$  (círculo) (p.ex.  $v_s$ ) indicam que ela é tomada ao longo de uma circunferência em vez de uma linha reta. Para relacionar os dois tipos de grandezas, usa-se a distância ao eixo de rotação  $r$ , com o ângulo  $\theta$  dado em radianos.

Grandeza translacional		Grandeza rotacional		Relação
Nome	Símbolo ou fórmula	Nome	Símbolo ou fórmula	
posição	$s_{\perp}$	posição angular	$\theta$	$s_{\perp} = r\theta$
deslocamento	$d_{\perp} = \Delta s_{\perp}$	posição angular	$\Delta\theta$	$\Delta s_{\perp} = r\Delta\theta$
velocidade	$v = \frac{ds_{\perp}}{dt}$	velocidade angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$v_s = r\omega$
aceleração	$a = \frac{dv}{dt}$	aceleração angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	$a_s = r\alpha$
massa	$m$	momento de inércia	$I$	$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$
momento linear	$\vec{p} = m\vec{v}$	momento angular	$\vec{L} = m\vec{\omega}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
força	$\vec{F} = m\vec{a}$	torque	$\tau = I\alpha$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Fonte: elaboração dos autores, com base em Halliday (1996a).

### 3.6 Pivô central de irrigação

Por volta de 1950, no estado de Nebraska, Estados Unidos, o primeiro pivô central foi usado, tendo sido patenteado em 1952 por *Frank L. Zybach* (TESTEZLAF, s.d.). O pivô central é um método de irrigação muito utilizado em grandes lavouras. É considerado um método de *aspersão*, o que significa que a água é *aspergida*, borrifada sobre os vegetais, diferentemente dos métodos de *irrigação por sulcos* (também chamados de “irrigação por superfície”) pelos quais a água chega aos vegetais por canais estreitos cavados na terra (os “sulcos”).

A palavra “pivô” refere-se ao eixo vertical da *torre fixa*, em torno do qual giram as *torres móveis*. A distância percorrida por uma torre móvel num dado intervalo de tempo  $\Delta t$  é igual a  $R\theta$ , onde  $R$  é a distância radial (da torre fixa à torre móvel) e  $\theta$  é o ângulo que o eixo girou durante esse período. Para uma volta completa,  $\theta = 2\pi$ , portanto a circunferência realizada por essa torre móvel tem comprimento igual a  $2\pi R$ . Do mesmo modo, todas as grandezas lineares que descrevem o movimento das torres móveis (velocidade, aceleração, força, etc.) são relacionadas com grandezas rotacionais em torno da torre fixa, da maneira mostrada no quadro 3.1.

Embora o pivô seja muito importante, os dados do *Censo Agropecuário 1995-1996* mostraram que nem mesmo os métodos de aspersão como um todo eram os mais usados no Brasil: a irrigação por superfície ainda correspondia a 59% da área total irrigada (LOIOL; SOUZA, 2001). Dez anos depois, o *Censo Agropecuário 2005-2006* mostrou que apenas na Região Sul a irrigação por superfície ainda predominava (82,18%) (SARAIVA; SOUZA, 2012), enquanto nas outras regiões a irrigação por *aspersão* já predominava (71,35% no Sudeste; 61,81% no Nordeste; 84,25% no Centro-Oeste e 36,23% no Norte). Existem ainda outros métodos de irrigação muito menos utilizados: *localizada, por inundação, subterrânea etc.*

**Problema 3.4.** Uma estrutura de irrigação tem um pivô ligado a uma linha lateral metálica com suportes em formato de “A” conectados entre si por juntas flexíveis. Um pequeno motor elétrico, colocado em cada torre, permite o acionamento independente dessas (Cf. figura 3.4).

O suprimento de água é feito através do ponto pivô, requerendo que a água seja conduzida até o centro por adutora enterrada ou que a fonte de água esteja no centro da área. Pivôs podem ser empregados para irrigar áreas de até 117 ha. O ideal, todavia, é que a área não ultrapasse 50 a 70 ha, embora o custo por unidade de área tenda a reduzir à medida que aumenta a área irrigada por cada estrutura.

Discorra acerca das questões relativas à Física que podem levar a comprimentos menores da linha lateral do que os 117 ha. Leve em consideração a questão do peso da estrutura que compõe a linha lateral lembrando-se do que acontece com uma corda longa presa apenas pelas suas extremidades.

Considerando-se o conceito de torque, avalie o melhor lugar para se posicionar o(s) motor(es) que irá(ão) movimentar a linha lateral. Explique sua solução.

**Figura 3.4:** Fotografia de um pivô central em funcionamento próximo a uma rodovia. Na fotografia menor, as pessoas analisam a eixo central do equipamento (parte que mais propriamente deveria ser chamada de “pivô”).



Fonte: tirada e gentilmente cedida por Magda Marques Castro (foto maior); Wikimedia Commons (2004, foto menor).

### 3.7 Transferência de rotação em máquinas

Uma das características mais marcantes de máquinas em geral é a transferência de rotação entre *rodas dentadas*. O conjunto de **rodas dentadas** de uma máquina geralmente é chamado de **engrenagem**. Essas rodas também são conhecidas como **polias** ou **roldanas**, mas existe uma tendência a chamar de “rodas dentadas” aquelas que ficam na parte interior das máquinas, tais como em motores de carro, enquanto os termos “polia” e “roldana” aplicam-se mais frequentemente a rodas pelas quais passam cordas ou cabos em mecanismo externos ou abertos, tais como em montagens para suspender caixas ou aparelhos de academia de musculação.

De todo modo, a transferência de rotação entre essas rodas ocorre principalmente de duas formas:

- **eixo de rotação** em comum, pelo qual a **velocidade angular** das duas rodas é a mesma;
- **correia** atando as duas rodas, pela qual a **velocidade linear tangencial** das rodas, nas circunferências nas quais a correia é atada, é a mesma.

**Exercício 3.10** ENGRENAGENS DE UM MOEDOR

Na figura 3.6a, que pares de rodas dentadas têm a mesma velocidade angular? Que pares de rodas têm a mesma velocidade circular nas suas extremidades?

**Exercício 3.11** DUAS RODAS DENTADAS UNIDAS PELOS EIXOS

Duas rodas dentadas (1 e 2) estão fixas no mesmo eixo de rotação. Seus raios são, respectivamente,  $R_1 = 2,5 \times 10^{-1} \text{ m}$  e  $R_2 = 5,0 \text{ m}$ . Se uma correia atada à roda 1 (em sua circunferência máxima) tem velocidade linear de  $20 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ , calcule

- a velocidade angular da roda 1;
- a velocidade angular da roda 2;
- a velocidade linear circular de uma correia atada à roda 2, em sua circunferência máxima.

**Exercício 3.12** DUAS RODAS DENTADAS UNIDAS POR UMA CORREIA

Duas rodas dentadas (1 e 2) estão atadas por uma correia em suas circunferências máximas. Seus raios são, respectivamente,  $R_1 = 2,5 \times 10^{-1} \text{ m}$  e  $R_2 = 5,0 \text{ m}$ . Se uma correia atada à roda 1 (em sua circunferência máxima) tem velocidade angular de 100 rpm, calcule

- a velocidade linear circular da roda 1, em sua circunferência máxima;
- a velocidade linear circular da roda 2, em sua circunferência máxima;
- a velocidade angular da roda 2.

**Figura 3.5:** Imagem de um moedor de cana-de-açúcar de operação manual



**(a)** Vista em perspectiva



**(b)** Vista de frente



**(c)** Vista de trás

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro. Fotografia na propriedade de Arnô Rodrigues dos Santos e Eunice da Silva Santos, em Caldas Novas.

**Figura 3.6:** Identificação dos mecanismos de transmissão de rotação



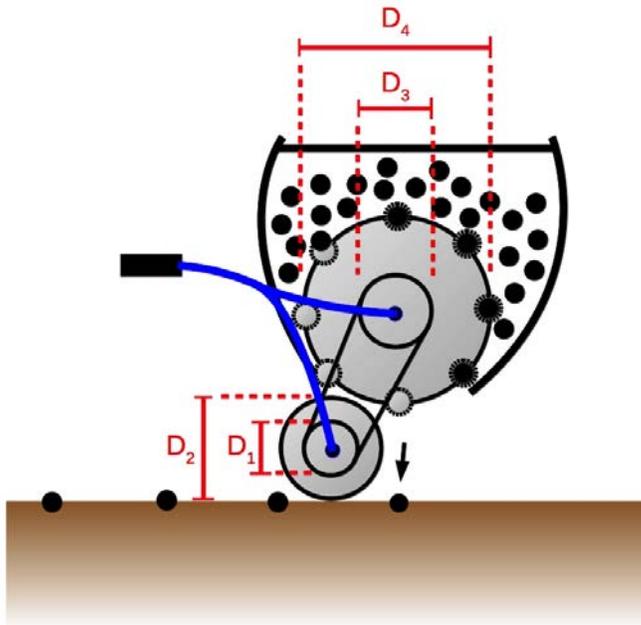
**(a)** A força que o operador aplica no ponto 1 faz a manivela girar em torno do ponto 2, que possui o mesmo eixo de rotação da roda dentada em 3; a roda dentada em 3 está engrenada à roda em 4, que tem mesmo eixo de rotação da roda em 5, que gira junto com as rodas em 6 e 7



**(b)** Há certa arbitrariedade na definição do diâmetros de algumas rodas dentadas; para melhorar a precisão, seria necessário conhecer os pontos exatos nos quais os dentes de uma roda toca os dentes da outra

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro. Fotografia na propriedade de Arnô Rodrigues dos Santos e Eunice da Silva Santos, em Caldas Novas.

**Figura 3.7:** Representação esquemática de uma semeadora que lança sementes no solo ao ser empurrada



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

### Exercício 3.13 SEMEADORA MANUAL

Considere a semeadora de operação manual ilustrada na figura 3.7. À roda de diâmetro  $D_1$ , cuja rotação permite o deslocamento de todo o equipamento, está acoplada uma roda dentada suspensa de diâmetro  $D_2$ , que esta está ligada por uma correia à roda dentada de diâmetro  $D_3$ , cujo eixo também gira uma roda maior que possui oito reentrâncias igualmente espaçadas ao longo de sua circunferência mais externa. Considerando que cada uma dessas reentrâncias coleta exatamente uma semente na parte de cima e a deixa no solo após ser trazida para a parte de baixo, calcule a distância entre duas sementes consecutivas como função de  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ . Em posse da função, calcule essa distância para os seguintes casos:

- $D_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $D_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $D_3 = 30 \text{ cm}$ ;
- $D_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $D_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $D_3 = 30 \text{ cm}$ ;

c)  $D_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $D_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $D_3 = 1,0 \text{ m}$ ;

d)  $D_1 = 1,0 \text{ m}$ ,  $D_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $D_3 = 30 \text{ cm}$ .

Qual seria a mudança mais fácil na máquina para aumentar a distância entre as sementes depositadas?

### Exercício 3.14 ESPAÇAMENTO DE SEMENTES

O espaçamento no cultivo da mandioca depende da fertilidade do solo, da disponibilidade de água, do porte da variedade, do objetivo da produção (raízes ou ramas), dos tratos culturais e do tipo de colheita (manual ou mecanizada).

De maneira geral, recomendam-se os espaçamentos de  $1,00 \text{ m} \times 0,50 \text{ m}$  e  $1,00 \text{ m} \times 0,60 \text{ m}$  se forem utilizadas fileiras simples. Em solos mais férteis, deve-se aumentar a distância entre fileiras simples para  $1,20 \text{ m}$ . Quando a colheita for mecanizada, a distância entre as linhas deve ser de  $1,20 \text{ m}$ , para facilitar o movimento da máquina colhedeira. Nos pequenos cultivos, capinados à enxada, deve-se usar espaçamento mais estreito, para que a cultura cubra mais rapidamente o solo e dificulte o desenvolvimento das ervas daninhas.

Considere que uma semeadora de operação manual, como a apresentada anteriormente, possui  $D_2 = 1,4D_1$ , enquanto que  $D_3 = 2,0D_2$  ( $D_3$  é o diâmetro da roda dentada em contato com as sementes, sendo que a distância angular entre dois dentes consecutivos - que comportam apenas uma semente entre si - é igual a  $\pi/6$  graus). Considere ainda que um homem empurre a semeadora à velocidade de  $10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ . Qual deve ser uma boa estimativa para  $D_2$  para um plantio de mandioca em fileira simples e solo medianamente fértil?

## 3.8 Uso de cálculo diferencial e integral

### Centro de massa

A equação 3.1,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

é válida apenas para um corpo formado por  $N$  partículas, ou seja, para um *sistema discreto*. Essa expressão pode ser generalizada para um *corpo extenso* por meio da substituição das somatórias por integrais:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm},$$

onde  $\int_V$  é a integral sobre o volume do corpo,  $\vec{r}$  é a posição de cada elemento infinitesimal de massa  $dm$  contido no volume  $V$ . A maneira como a integral é realizada de fato depende da forma do objeto. Para uma integral sobre o volume de uma esfera, por exemplo, é conveniente usar *coordenadas esféricas*, compostas pela distância radial e dois ângulos (o ângulo azimutal e o ângulo polar).

## Movimento linear uniformemente variado

Para o movimento linear uniformemente variado, pode-se deduzir a função horária da velocidade (equação 3.6) como uma derivada temporal da função horária da posição (equação 3.7), pois sabe-se que

$$v = \frac{ds}{dt},$$

o que, aplicado à equação 3.7, fornece

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2)}{dt}.$$

Levando em conta que  $s_0$ ,  $v_0$  e  $a$  são constantes na derivação, chegamos a

$$v = v_0 + at.$$

## 3.9 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 3.1

Existem várias respostas possíveis para essa questão:

- exemplos de situações em que corpos são descritos como uma partícula incluem projéteis lançados (mísseis, bombas, pedras etc.), planetas em rotação ao redor do Sol, elétrons em movimento, fótons (partículas de luz) etc.
- exemplos de situações em que corpos não podem ser considerados como partículas (caso contrário a descrição da situação perderia complexidade necessária e não seria útil) incluem engrenagens (rodas dentadas conectadas entre si), sólidos puxados por cordas em diversos pontos, líquidos em escoamento, gases aquecidos subindo para o alto da atmosfera etc.

Algumas situações podem ser polêmicas. Imagine um atleta realizando um salto ornamental com rotação. É evidente que o juiz não pode considerar o atleta como uma partícula, pois ignoraria o movimento do atleta e provavelmente daria nota zero a todos os saltadores. No entanto, se o interesse for apenas calcular o tempo de queda, talvez o movimento de rotação possa ser ignorado e apenas a posição do umbigo do atleta, onde se localiza aproximadamente o seu centro de massa, ser descrito como uma partícula.

### Solução 3.2

De modo geral, não! Uma semeadeira, para funcionar adequadamente, tem de considerar o tamanho concreto das sementes para que o processo de seleção e inserção das sementes no solo possa ser bem-sucedido. Sementes muito grandes podem fazer com que o processo fracasse. Sementes muito pequenas podem implicar uma distribuição ineficaz (muitas sementes aplicadas em cada ponto do solo).

### Solução 3.3

Temos, para o centro de massa ( $y_1$  e  $y_2$  são as alturas das massas  $m_1$  e  $m_2$  acima da superfície da Terra)

$$y_{cm} = ((m_1 y_1 + m_2 y_2) / (m_1 + m_2)) = ((1.0 + 2.120) / 3) = 80m,$$

enquanto que, para o centro de gravidade (usamos o raio da Terra como valendo, aproximadamente,  $R = 6.378.000m$ )

$$\begin{aligned}
 y_{cg} &= \frac{\frac{GMm_1}{R^2} \cdot 0 + \frac{GMm_2}{(R+y_2)^2} \cdot y_2}{\frac{GMm_1}{R^2} + \frac{GMm_2}{(R+y_2)^2}} \\
 &= \frac{m_2 y_2}{m_1 \left(1 + \frac{y_2}{R}\right)^2 + m_2} \\
 &= \frac{2.120}{1 \left(1 + \frac{120}{6.378.000}\right)^2 + 2} \\
 &= \frac{2.120}{1 (1 + 0.00001881467545)^2 + 2} \\
 &= 79.99899655
 \end{aligned}$$

Fica evidente, do exemplo anterior, que a diferença é desprezível, mesmo para alturas consideráveis para os padrões humanos.

### Solução 3.4

- (a) Por simetria, o centro de massa localiza-se no centro da haste, a 30 cm do centro de uma das esferas. O mesmo resultado pode ser obtido por cálculo direto.
- (b) Defina o eixo- $x$  como paralelo ao comprimento da haste, de modo que  $x = 0$  corresponda à posição da esfera que ficou atada à haste. Se o eixo- $x$  coincidir exatamente com o eixo de simetria da haste cilíndrica, fica óbvio que  $y_{cm} = z_{cm} = 0$ . A coordenada  $x$  da posição do centro de massa é dada por

$$\begin{aligned}
 \vec{x}_{cm} &= \frac{5,0 \text{ kg} \cdot 0 \text{ cm} + 0,2 \text{ kg} \cdot 60 \text{ cm}}{5,0 \text{ kg} + 0,2 \text{ kg}} \\
 &= \frac{12 \text{ kg cm}}{5,2 \text{ kg}} \\
 &= 62 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

**Solução 3.5**

$$\begin{aligned}
 s &= v \cdot t \\
 &= (20,4 \pm 0,8) \frac{\text{km}}{\text{h}} 45 \text{ min} \\
 &= (20,4 \pm 0,8) \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{45 \text{ min h}}{60 \text{ min}} \\
 &= (20,4 \pm 0,8) \frac{\text{km}}{\text{h}} 0,75 \text{ h} \\
 &= (15,3 \pm 0,6) \text{ km}
 \end{aligned}$$

**Solução 3.6**

Neste caso, o tipo de irrigação mais apropriado seria o de uma irrigação linear, em que o braço do irrigador percorresse perpendicularmente a região em declive. Uma irrigação por pivotação implicaria uma complexa relação de potência fornecida ao braço irrigador para garantir a homogeneidade da irrigação. Para o caso em declive, mesmo que o declive não seja sempre o mesmo, o controle da velocidade do braço de irrigação é muito mais simples.

**Solução 3.7**

*Estima-se* que estarão a 240 quilômetros distantes da posição inicial. Como foi informada a velocidade *média*, somente grossas estimativas são possíveis.

**Solução 3.8**

Se a distância de  $(135 \pm 6)$  km deve ser percorrida em, no máximo, três horas, então, após uma hora de viagem, ele deverá ter percorrido um terço desse valor:  $(45 \pm 2)$  km. Como essa medida tem intersecção com  $(47 \pm 5)$  km, podemos afirmar que ele não está nem atrasado nem adiantado.

**Solução 3.9**

(a) A esfera deve ser suficientemente densa para afundar nas águas, sem ser excessivamente pesada, para que as águas possam conduzi-la sem grandes dificuldades. (b) O tubo não pode ser muito longo. Entretanto, como as velocidades das águas não variam muito, em geral, em termos de metros lineares, o tubo poderia ter aproximadamente um metro. Isso permitiria uma medida mais fácil da velocidade da bola e, portanto, das águas. (c) A medição deveria

ser feita, mantendo-se a profundidade constante, a diferentes distâncias da margem do rio; e, para cada distância da margem escolhida, deveriam ser feitas várias medições a diferentes profundidades. Com isso se teria um *perfil* das velocidades naquele ponto e se poderia tirar uma média de todos esses valores.

### Solução 3.10

Por estarem ligados ao mesmo eixo de rotação, a roda 2 tem a mesma velocidade angular que a roda 3. Analogamente, a roda 4 tem a mesma velocidade angular que a roda 5.

Por estarem engrenadas (situação equivalente a estarem ligadas por uma correia), a roda 3 tem a mesma velocidade linear circular que a roda 4 em suas extremidades. Analogamente, as rodas 5, 6 e 7 também têm a mesma velocidade linear circular nas extremidades.

### Solução 3.11

$$(a) \omega_1 = v_1/R_1 = 20 \frac{\text{cm}}{\text{s}}/2,5 \times 10^{-1} \text{ m} = 20 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}/2,5 \times 10^{-1} \text{ m} = 0,8 \frac{1}{\text{s}} \equiv 0,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \equiv 0,8 \text{ Hz}$$

$$(b) \omega_2 = \omega_1 = 0,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ (pois estão no mesmo eixo)}$$

$$(c) v_2 = \omega_2 R_2 = 0,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5,0 \text{ m} = 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Solução 3.12

$$(a) v_1 = \omega_1 R_1 = 100 \text{ rpm} 2,5 \times 10^{-1} \text{ m} \\ = 100 \frac{\text{rad}}{\text{min}} 2,5 \times 10^{-1} \text{ m} = (100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}/60) 2,5 \times 10^{-1} \text{ m (continue)}$$

$$(b) v_1 = v_2 \text{ (pois estão atadas pela mesma correia)}$$

$$(c) \omega_2 = v_2/R_2$$

### Solução 3.13

Considere que o deslocamento angular é o mesmo em rodas fixas no mesmo eixo. Considere também que o deslocamento circular das bordas de duas rodas ligadas por uma correia também é a mesma nessas duas rodas.

Por exemplo, no caso  $D_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $D_2 = 20 \text{ cm}$ ,  $D_3 = 30 \text{ cm}$ , cada rotação completa do roda de diâmetro  $D_1$  deslocará a máquina semeadora em  $\pi \times 50 \text{ cm} = 1,6 \text{ m}$  e causará também uma rotação completa na roda de diâmetro  $D_2$ , correspondente a um deslocamento circular de  $\pi \times 20 \text{ cm} = 63 \text{ cm}$ . O deslocamento circular na roda de diâmetro  $D_3$  também será  $63 \text{ cm}$ , mas esse valor não corresponde à sua volta completa, que seria equivalente ao deslocamento

$\pi \times 30 \text{ cm} = 94 \text{ cm}$ . Esta última toda, então, faz 67 % de uma volta completa ( $\frac{63 \text{ cm}}{94 \text{ cm}} \times 100\%$ ), deixando cair 67 % das 8 sementes, ou seja, 5,4 sementes a cada 1,6 m. A distância entre duas sementes consecutivas, então, é 1,6 m/5,4, ou seja, aproximadamente 30 centímetros.

### Solução 3.14

O funcionário empurra a máquina à velocidade de 0,1 m/s. A velocidade angular do pneu ( $D_2$ ) é

$$\omega_2 = \frac{0,1 \text{ m/s}}{0,6D} = \frac{1}{6D} \text{ rad/s},$$

visto que a velocidade angular é a velocidade linear dividida pelo raio do pneu. Essa velocidade angular é a mesma da roda mais interna ( $D_1$ ), visto compartilharem o eixo. Também a roda dentada irá girar com a mesma velocidade angular, ou seja

$$\omega_3 = \frac{1}{6D} \text{ rad/s}.$$

Isso significa que, em cada segundo, a roda dentada gira  $1/6D$  radianos ( $D$  em metros). Assim, em cada segundo, a roda terá plantado

$$\frac{6}{\pi} \frac{1}{6D} = \frac{1}{D\pi}$$

sementes, uma vez que a abertura das sementes é igual a  $\pi/6 \text{ rad}$ . Mas cada semente deve ser plantada a uma distância igual a 0,5 m da outra. Assim, em cada 0,5 m deve ser plantada uma semente. Se a roda dentada planta  $1/D\pi$  sementes a cada segundo e a cada 0,5 m ela deve plantar uma semente, então a velocidade linear da roda dentada deverá ser igual a

$$v = 0,5 \frac{1}{D\pi} \text{ m/s}.$$

Mas a velocidade linear da roda dentada é  $v = \omega_3 (1,0D) = 1/6 \text{ m/s}$  de modo que

$$\frac{1}{6} \text{ m/s} = \frac{0,5}{D\pi} \text{ m/s} \Rightarrow D = 0,95 \text{ m},$$

e o raio do pneu deverá ser de aproximadamente 47 cm.

## Texto complementar 2

### AÇÃO HUMANA NA NATUREZA

Em Biologia, um “indivíduo” é um conjunto de órgãos que funcionam em conjunto, formando assim um “organismo”. Há vários conceitos e ideias ligados às semelhanças entre o planeta Terra e os organismos vivos. A **hipótese Gaia** considera a Terra como um sistema vivo, um “superorganismo”, formado pelos seres vivos e o ambiente, que se autorregula. Segundo essa hipótese, os seres vivos alterariam o ambiente de modo a torná-lo mais propício à perpetuação da vida. Pense em como as plantas geraram oxigênio que permitiu a existência dos animais...

Por influência dessa ideia, alguns dizem que, se o ser humano destruir o ambiente, poderá ser exterminado por Gaia (nome grego que se refere à Mãe-Terra, um ser mitológico). No entanto, o catastrofismo é mais característico da **hipótese Medeia**. Medeia é uma mulher da mitologia grega que sacrifica seus próprios filhos para realizar um plano de vingança contra o ex-marido. Do mesmo modo, o planeta seria inóspito aos seus próprios “filhos”, os seres vivos, e por isso desequilibrou-se muitas vezes na história geológica, causando extinções em massa.

Outra ideia, mais antiga que essas hipóteses, é o conceito de **noosfera**. Assim como a atmosfera é uma camada (esférica) de gases e a biosfera é uma camada de seres vivos, a noosfera seria a camada do planeta mais influenciada pelo pensamento humano. Mais que uma camada, a noosfera descreveria também uma nova etapa da evolução do planeta, guiado pelo pensamento humano. As etapas anteriores seriam a “geosfera”, em que a Terra era dominada por matéria inanimada, e a “biosfera”, em que havia a dominação dos seres vivos. Existem outros conceitos semelhantes, como “ideosfera” e “infosfera”. Deixemos que o leitor se aprofunde (ou não) por conta própria no estudo desses conceitos, segundo suas inclinações. Limitamos aqui a chamar atenção para a existência desses conceitos, que podem aparecer em discussões sobre o meio ambiente.

Embora a alteração do ambiente pelo homem pareça algo próprio dos tempos modernos, e de fato seja mais intensa atualmente, grande parte do que consideramos “natural” é resultado da interação entre o ser humano e o ambiente. O milho, por exemplo, não existia de forma selvagem na natureza, mas originou-se de uma gramínea com espigas minúsculas, chamada *teosinto*, que foi domesticada pelos povos nativos da *América Central* há mais de dois mil anos antes de Cristo.<sup>a</sup> Aqueles

cultivadores, naturalmente, preferiam os espécimes que geravam espigas e grãos maiores, o que foi levando ao surgimento do milho por meio de pequenas alterações nas gerações da planta. Esse tipo de processo é chamado “seleção artificial”.

Do mesmo modo, a soja foi domesticada a partir de um tipo de “soja selvagem”, mais de dez séculos antes de Cristo pelos chineses.<sup>b</sup> A domesticação de plantas e animais ocorreu praticamente em toda parte do mundo: o arroz na China; o trigo no Oriente Médio; o gado bovino na Europa e na Ásia; a cana de açúcar na Ásia; o cavalo na Ásia Central; o gato no Egito Antigo; o café na Etiópia (difundido pelos árabes); a galinha da Índia; a galinha-d’angola na África etc. O cão é talvez o caso mais surpreendente de domesticação, pois a seleção artificial gerou uma variedade fenotípica enorme. Compare um pequeno *chihuahua* com um grande *mastim napolitano*. No continente americano, destacam-se milho, tomate, batata, cacau, amendoim e mandioca, como plantas domesticadas pelos nativos e, depois da chegada dos europeus, levadas a várias partes do mundo.

Embora a alteração da natureza pelo ser humano seja algo antigo, isso não significa que ela seja sempre benéfica. É bem sabido que o uso inadequado do solo pode levar à sua degradação. Segundo algumas hipóteses, o declínio de várias civilizações antigas foi parcialmente causado pela desertificação do solo, causado pelo seu uso intenso para a agricultura. Os povos dessas civilizações não tinham as técnicas de cultivo que se tem hoje para prevenir esse e outros problemas. Por outro lado, povos tribais geralmente tinham baixa densidade populacional, de modo que podiam usar técnicas degradadoras do solo, como as “coivaras”, podendo migrar para outro terreno enquanto o solo usado anteriormente se recupera. Hoje, num mundo de sete bilhões de seres humanos, um desafio das ciências agrárias e ambientais é continuar tirando da natureza os recursos para nossa sobrevivência de forma sustentável, ou seja, de forma que a alteração que causamos na natureza não venha a nos impedir de continuar colhendo os seus frutos.

<sup>a</sup><http://www.aprosoja.com.br/soja-e-milho/a-historia-do-milho> (APROSOJA BRASIL, 2018). Acesso em 5 jul. 2018.

<sup>b</sup><http://aprosojabrasil.com.br/2014/sobre-a-soja/a-historia-da-soja/> (APROSOJA MATO GROSSO, 2018). Acesso em 5 jul. 2018.



# Capítulo 4

## Dinâmica

Se pelos conceitos da Cinemática somos capazes de descrever o movimento dos corpos sem descrever suas causas, por intermédio da Dinâmica e de seus conceitos, descrevemos o movimento como determinado por suas causas, como forças e torques. Assim, a Dinâmica é a parte mais completa da Mecânica.

### 4.1 Leis de Newton

Durante o desenvolvimento da Mecânica, vários sistemas de explicação das causas dos movimentos foram propostos e utilizados. Provavelmente o sistema mais conhecido e utilizado seja aquele desenvolvido por Isaac Newton, em que valem as *Leis de Newton* assim enunciadas:

- Lei I: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele;
- Lei II: A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é imprimida;
- Lei III: A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade: ou as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

Talvez o leitor se pergunte quais são os sistemas de descrição do mundo natural alternativos ao newtoniano. Um sistema bem conhecido é a descrição por *Trabalho e Energia*, que estudaremos também neste capítulo. Existem também sistemas mais avançados cuja formulação foi posterior às Leis de Newton, como a *Mecânica Lagrangiana* e a *Mecânica Hamiltoniana*, que não trataremos aqui,

mas que permitem uma descrição mais eficiente de alguns sistemas físicos com certas restrições ao movimento. E existem também mecânicas pertencentes a teorias mais abrangentes que a chamada *Física Clássica*, como a *Mecânica Relativística* e a *Mecânica Quântica*.

## 4.2 Corpo rígido

Quando a dimensão de um corpo não pode ser considerada pontual, ele é considerado um *corpo extenso*. Para todo corpo extenso, pode-se encontrar, em cada instante, a posição de seu *centro de massa*, que se desloca como se tivesse em si concentrada toda a massa do corpo e como se recebesse em si todas as forças aplicadas no corpo.

O conceito de centro de massa permite tratar um corpo extenso como pontual quanto ao aspecto translacional, ou seja, no que se refere ao seu deslocamento geral. No entanto, ao contrário do corpo pontual, o corpo extenso também pode girar. Cada força aplicada sobre um corpo extenso tende a fazê-lo girar de uma forma diferente, em torno de um eixo diferente. A grandeza que descreve a maneira como uma força gera ou altera a rotação de um corpo rígido é denominada *momento de uma força com relação a um ponto* ou **torque**.

De forma simplificada, quanto maior o torque relacionado a uma força, maior a capacidade de esta força fazer o corpo girar. O torque não depende apenas da intensidade da força, mas também do ponto no qual ela é aplicada. Na prática, nota-se facilmente que uma força aplicada nas extremidades de um corpo o faz girar mais facilmente que uma força aplicada próximo ao seu centro. No caso de uma porta, por exemplo, quanto mais perto da dobradiça uma força for aplicada, mais dificilmente ela girará a porta.

De fato, considere uma porta presa a um batente por suas dobradiças. Verifica-se que quanto maior a força realizada para abri-la (ou fechá-la), mais rapidamente ela girará. Assim, o torque, que desejamos constituir como o descritor que irá representar essa modificação do estado de movimento da porta, deve ser proporcional ao módulo da força. Entretanto, a força é uma quantidade vetorial e, assim, podemos nos perguntar se o torque dependerá, também, da direção em que a força está aplicada. Isso claramente é verdade, pois, se aplicamos a força na direção das dobradiças, mesmo o módulo dessa força sendo muito grande, a porta não se moverá.

Vemos ainda que, quanto mais próximo do ângulo de  $90^\circ$  estiver a direção da força com relação à superfície da porta, maior será a modificação do estado de movimento desta porta e, portanto, o torque. Uma função que codifica corretamente esse comportamento é a função  $\sin(\theta)$ , em que  $\theta$  mede o afastamento da direção da força *com relação ao plano da porta*. Assim, como sabemos, se  $\theta = 0$ , então a força se encontra na direção das dobradiças e nenhum torque é verificado. Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$  o torque será máximo.

De modo geral, define-se o momento de uma força com relação a um ponto pela expressão

$$\vec{\tau} = |\vec{F}||\vec{d}| \text{sen}(\theta)\hat{n},$$

em que  $\hat{n}$ , a direção do torque, é dada convencionalmente pela regra da mão direita: estenda sua mão direita de modo que o dedo indicador forneça a direção e o sentido do vetor  $\vec{d}$  que se estende desde o ponto com relação ao qual se deseja calcular o torque até o ponto de aplicação da força, fazendo o anelar apontar na direção e sentido da força  $\vec{F}$ . Assim, a direção do torque será aquela apontada pelo polegar.

Como vimos, às grandezas lineares correspondem análogos angulares, relacionados a movimentos de giro. A potência é uma dessas grandezas que possui enorme importância e aplicação em contextos em que são usadas máquinas (p.ex. agrícolas). Desse modo, da mesma maneira que a potência, em um movimento translacional, é definida pelo produto da força pela velocidade linear, em um movimento de giro, em que há torque envolvido, a potência  $W_{rot}$  deve ser definida pelo produto do torque pela velocidade *angular* desenvolvida, ou seja,

$$W_{rot} = |\vec{\tau}|\omega.$$

O estudo da translação e da rotação de um corpo extenso é simplificado se o considerarmos *rígido*. Um **corpo rígido** é um corpo extenso sólido não deformável, ou seja, um corpo no qual a distância entre dois pontos arbitrários permanece constante. Corpos reais podem ser considerados rígidos desde que as forças aplicadas sobre ele não tenham magnitude suficiente para deformá-lo.

#### Exercício 4.1 POTÊNCIA DE IRRIGADOR POR PIVÔ

Deseja-se construir um irrigador por pivô com 50 m de extensão, sendo que sua linha de aspersores assenta sobre duas bases móveis com pneus, uma à distância de 25 m do pivô, outra a 50 m dele, ou seja, na extremidade do irrigador. O irrigador afunda no solo e, com isso, aparece uma força de 200 N em cada base móvel que deve ser superada para que o irrigador possa mover-se com velocidade constante. Calcule:

- a potência que o pivô deve gerar para mover o irrigador com velocidade angular igual a 1 rad/min;
- a potência total que motores posicionados em cada uma das bases móveis devem gerar para mover o irrigador à mesma velocidade angular.

Ainda que não seja imediatamente perceptível, o torque é um conceito importantíssimo em diversos contextos de aplicação na agricultura. Um exemplo disso pode ser obtido do uso das *moendas*. Para aqueles que desconhecem o termo, um exemplo simples de moenda é fornecido pelo equipamento que mói a cana-de-açúcar para produzir o famoso caldo de cana. Aquelas engrenagens pelas quais passa a cana no processo de ser *moída* é um exemplo típico de moenda. Note, entretanto, que, para uma produção de álcool em escala industrial a partir da cana-de-açúcar, o dimensionamento da respectiva moenda é de importância fundamental para o resultado da produção.

### 4.3 Moenda

Uma moenda é um equipamento que, em regime de operação normal, se dá pela produção de um torque constante. O produto (e.g. cana-de-açúcar) que está sendo moído, inicialmente, em uma das engrenagens da moenda, passa por outra(s) engrenagem(ns) de modo a se maximizar o processo de moagem, ou seja, de extração do produto desta moagem. Como se trata de uma máquina, há um torque máximo que pode ser obtido. O valor desse torque máximo deve ser fornecido pelo fabricante da moenda, embora os técnicos do setor já conheçam esse valor aproximado para cada modelo ou bitola de moenda.

Já a capacidade de moagem é diretamente proporcional à rotação dos eixos da moenda. Assim, desde os anos 1980, quando da implantação do Programa Nacional do Álcool no Brasil, adotou-se a estratégia de se aumentar a rotação da moenda para ganhar capacidade. Entretanto, o aumento da rotação da moenda pode implicar perda no poder de extração, uma vez que a cana passa tão rapidamente pelas engrenagens que o processo de moagem perde em eficiência na extração do caldo.

Entretanto, já há trabalhos acadêmicos, e com resultados experimentais, mostrando que é possível aumentar a rotação da moenda sem se perder na extração, desde que sejam tomados os devidos cuidados operacionais. Já há moendas de grande porte operando no Brasil com 8,5 rpm e com extração acima de 97%.

A potência exigida pela moenda será proporcional ao produto do torque pela rotação. Como o torque é constante, mais rotação vai exigir mais potência. O motor elétrico será selecionado basicamente pela potência que deverá entregar para a moenda em cada faixa de rotação, o que impacta diretamente no preço final do produto.

**Exercício 4.2** ROTAÇÃO DE MOENDA

(Exige cálculo diferencial e integral) Queremos que uma moenda de certo material seja capaz de moer à rotação de 8,5 rpm. O torque, em módulo, produzido pelos motores elétricos (para a moagem de uma mesma quantidade de cana) varia em função do ajuste da distância entre os cilindros da moenda segundo a função

$$\tau = \frac{3\omega^2 + \omega}{\Delta} \text{ N.m,}$$

em que  $\omega$  é a velocidade de rotação e  $\Delta$  é a distância entre os cilindros (em metros). Já a produtividade da extração (em porcentagem) varia segundo a função

$$P_{ext} = 10^6 \frac{\Delta - 2\Delta^2}{\omega^2 + 2} \%$$

Qual deve ser a distância entre os cilindros para que se consiga um máximo da produtividade da extração, mantendo-se o torque constante? Qual a produtividade máxima atingida?

**Exercício 4.3** POTÊNCIA DOS MOTORES DA MOENDA

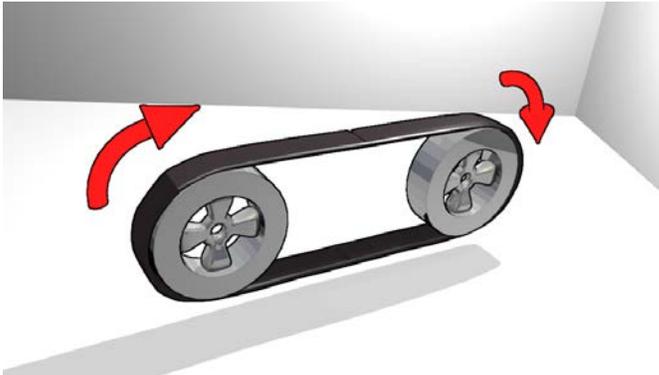
No exercício anterior, qual será o torque e a potência que os motores terão que ter para que a moenda funcione em sua máxima produtividade?

## 4.4 Descritores físicos e descritores específicos

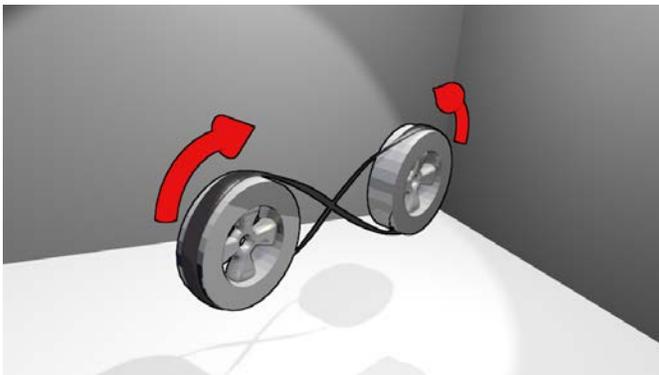
Na aplicação da Física a qualquer campo do conhecimento, é de se esperar que surjam variáveis (ou descritores) que tenham por função especificar a situação física, essencialmente genérica, de modo a tornar aquele conhecimento relevante para o campo em questão. Essa é uma situação usual nas engenharias, por exemplo.

Nesses casos, o que se nota, usualmente, é um diálogo entre os descritores de caráter físico, mais genéricos, no sentido de serem aplicáveis a quaisquer situações de análise natural, e os descritores mais específicos da área.

Sistemas que envolvem transferência de torque têm ampla aplicação em agronomia, em particular na análise do comportamento de máquinas agrícolas. Essa é uma área em que há o tipo de especificação dos descritores como mencionado anteriormente.

**Figura 4.1:** Esquema de um arranjo de correia direta

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Blender 3D*.

**Figura 4.2:** Esquema de um arranjo de correia cruzada

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Blender 3D*.

Em sistemas que envolvem transferência de torque, são usadas duas estratégias básicas: o uso de engrenagens, que ocorre quando os elementos de transmissão (as polias) estão em contato direto; e correias, quando as polias estão distantes umas das outras por distâncias maiores do que seus raios.

Correias podem se apresentar na forma direta (figura 4.1) ou cruzada (figura 4.2). O uso de correias na forma cruzada é geralmente usado para inverter o sentido da velocidade angular de uma polia em relação à outra. No caso do uso de engrenagens, uma vez que as polias devem trabalhar em sincronia, o uso de polias dentadas implica que devemos ter

$$N_1\omega_1 = N_2\omega_2,$$

em que  $\omega_1, \omega_2$  são as velocidades angulares das polias 1 e 2, e  $N_1$  e  $N_2$  são os números de dentes que as polias 1 e 2 devem ter, respectivamente. Se a engrenagem se dá apenas por atrito, então devemos ter, para não haver deslizamento entre as polias, a relação

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2,$$

representando uma mesma velocidade linear para ambas as polias, evidentemente.

#### Exercício 4.4 DESLIZAMENTO EM POLIAS

A possibilidade de duas polias produzirem deslizamento está associada à justeza com que ambas estão em contato. Suponha que duas polias estão fixadas aos seus eixos de tal modo que produzem uma força, uma sobre a outra, igual a  $F_p$ . O coeficiente de atrito estático entre as polias é dado por  $\mu_{din} = 0,45$ . Escreva a expressão da potência dissipada pelo atrito em função de  $F_p, \mu_{din}$  as velocidades angulares e os raios. Justifique o uso de  $\mu_{din}$  nos cálculos, ao invés de  $\mu_{est}$ .

No caso do uso de correias, é importante salientar uma regra para o cálculo delas, dado por (seja para correias diretas ou cruzadas)

$$L = 2\delta + \left(\frac{D+d}{2}\right) 3,25,$$

em que  $\delta$  é a distância entre os eixos,  $D$  é o diâmetro da polia maior,  $d$  é o diâmetro da polia menor, ou ainda

$$L_{dir} = \pi(r+r') + 2\sqrt{\delta^2 + (r-r')^2},$$

para correias diretas ou

$$L_{cruz} = \pi(r+r') + 2\sqrt{\delta^2 + (r+r')^2},$$

para correias cruzadas.

É importante salientar que, para grandes distâncias, devem-se usar cabos e não correias. Note ainda que o raio de uma polia não deve exceder 5 vezes o raio da outra quando são usadas correias, pois nesse caso haverá deslizamento da correia.

#### Exercício 4.5 ESCOLHA DE DIMENSÃO DE POLIA

Considere uma situação em que duas polias devem ser conectadas entre si por uma correia. A primeira polia está ligada a um motor que tem uma potência igual a  $7 cv$  e apresenta rotações com velocidade angular  $\omega_1$  igual a  $1450 rpm$ , dando à correia uma velocidade linear igual a  $v_{corr} = 12 m/s$ . A segunda polia deve girar a uma velocidade  $\omega_2$  igual a  $500 rpm$ . Sabendo-se que os eixos das duas polias devem estar a uma distância igual a  $0,5 m$ , qual deve ser a dimensão da polia?

Atualmente, verifica-se uma enorme mecanização da agricultura. Nesse contexto, uma das variáveis mais importantes a se levar em consideração é a *Capacidade de Trabalho* definida como a unidade de rendimento, ou seja, a quantidade de produção  $Pd$  (em hectares) que um conjunto mecanizado (trator, animal + implemento) é capaz de executar por uma unidade de tempo  $\Delta t$  (em horas). Matematicamente, ela é dada por

$$CT = \frac{Pd}{\Delta t} \left( \frac{ha}{h} \right).$$

A capacidade de produção é determinada em função de 3 fatores: velocidade de trabalho, largura de corte e eficiência de campo. A velocidade de trabalho varia de acordo com o tipo de tarefa, espaçamento e tipo de cultura, topografia e condições do terreno. Velocidades médias de trabalho são:

- Aração =  $5,0 \frac{km}{h}$ ;
- Gradagem =  $7,0 \frac{km}{h}$ ;
- Subsolagem =  $5,0 \frac{km}{h}$ ;
- Plantio =  $5,0 - 6,0 \frac{km}{h}$ .

A Largura de trabalho (Largura de corte) é obtida pelos catálogos dos fabricantes ou medido diretamente no campo (mais preciso). Com isso pode-se definir a variável *Eficiência de Campo*  $f$  como sendo a percentagem do tempo total realmente utilizado em trabalho efetivo. Essa eficiência é influenciada pelos fatores: formato, tamanho e disposição da área, além da necessidade de parada durante o processo. Apresentamos na tabela 4.1 valores típicos para a eficiência de campo em função do tipo de operação realizada.

**Tabela 4.1:** Eficiência de campo em termos do tipo de operação realizada

Tipo de Operação	$f(\%)$
Aração	70 – 80
Gradagem	70 – 85
Plantio e adubação	60 – 80
Cultivo	75 – 90
Subsolagem <sup>a</sup>	75 – 90
Roçagem	70 – 90
Colheita	60 – 80

Fonte: elaboração dos autores, com valores típicos de Prof. Haroldo C. Fernandes (FERNANDES, ).

<sup>a</sup>*Subsolagem* é uma prática que consiste na mobilização sub-superficial do solo com o objetivo de quebrar as camadas compactadas ou adensadas do solo. *Subsolador* é um implemento agrícola provido de órgãos ativos (hastes) que são responsáveis pela quebra da camada compactada.

Assim, podemos definir uma *Capacidade de Trabalho Efetiva* ( $CT_e$ ) como sendo

$$CT_e = CT \cdot f.$$

Em unidades SI temos

$$CT_e = \frac{v \cdot L \cdot f}{10.000} \frac{m^2}{h},$$

em que  $v$  é a velocidade da máquina (em metros por segundo),  $L$  é a largura de trabalho (em metros) e  $f$  é a eficiência de trabalho.

#### **Exercício 4.6** CAPACIDADE DE TRABALHO DE UM ARADO

Um arado de grade com  $n$  grades tem uma largura de trabalho dada por  $L = (n - 1)d$ , em que  $n$  é o número de discos de ataque e  $d$  é a distância entre os discos de uma grade (geralmente igual a 20 cm). Considere um trator-arado com 12 discos de ataque separados por uma distância de 20 cm. O trator movimenta-se à velocidade de  $2 \frac{m}{s}$ . Qual sua capacidade de trabalho efetiva ( $CT_e$ )? Quanto tempo ele irá gastar para arar 1 ha se a eficiência de campo é 0,7?

**Exercício 4.7** CAPACIDADE DE TRABALHO DE UM SUBSOLADOR

Para subsoladores com hastes normais, temos que  $e = p$ , em que  $p$  é a profundidade em que os discos penetrarão o solo ( $p$  deve ser menor do que  $70\text{ cm}$  para o uso de hastes normais) e  $e$  é o espaçamento entre as hastes, ambos dados em centímetros. O número de hastes  $n$  que deve ter o subsolador é dado pela expressão  $n = [P/(0,8p)]$ , em que  $P$  é a potência do trator (em  $cv$ ) e  $[x]$  representa o menor inteiro maior do que  $x$ . Assim, a largura efetiva de trabalho (em centímetros) é dada simplesmente por  $L = ne$ . A tração requerida (em  $kgf.cm$ ) é dada por  $T_r = Rpn$ , em que  $R$  é a resistência do solo (em  $kgf$ ). Com essas definições, a capacidade de trabalho (em  $ha/h$ ) de um subsolador fica dada pela expressão

$$CT_e = \frac{L.v.f}{10},$$

em que, como antes,  $f$  é a eficiência de trabalho,  $v$  é a velocidade em  $km/h$  e  $L$  é a largura de trabalho em  $m$ . Assim, deseja-se efetuar uma subsolagem utilizando um trator de esteiras, marca Caterpillar modelo CAT D6C, com  $140cv$ . Após levantamentos na área a ser subsolada, verificou-se que a camada compactada estava situada a  $50\text{ cm}$  de profundidade. Utilizou-se nessa operação um subsolador de hastes normais. Determine a capacidade efetiva de trabalho da operação sabendo que a resistência do solo à penetração é de  $33,0\text{ kgf/cm}$ . Considere uma camada arável acima da camada compactada de  $10\text{ cm}$  e que  $f = 80\%$  e que  $v = 4\text{ km/h}$ .

Os exercícios anteriores mostram a característica que estivemos apresentando, qual seja, a da interconexão entre variáveis tipicamente físicas (a potência, no último exercício) com variáveis necessárias para estabelecer a conexão da Física com o problema particular em questão (estabelecer uma medida para a capacidade de trabalho de determinada máquina em função das características do solo, etc) Como resta claro do texto desta seção e dos exercícios, boa parte das expressões matemáticas mais específicas relativas a equipamentos ou atividades, é de caráter eminentemente empírico.

## 4.5 Tipos de força num corpo rígido

É útil diferenciar alguns tipos de força comumente envolvidas em cálculos de equilíbrio de corpos rígidos:

- **Tensão** ( $\vec{T}$ ) é uma força aplicada a um corpo rígido por uma corda esticada amarrada a ele. Em cada um dos dois corpos ligados a cada uma das extremidades da corda, está aplicada uma tensão em direção ao meio dessa corda.

- **Força normal** ( $\vec{N}$ ) é a força que uma superfície sobre a qual um corpo está apoiado aplica **perpendicularmente** a esta própria superfície, como reação à compressão causada por este corpo ao se apoiar nesta superfície. Essa força é aplicada sobre a superfície do corpo que está em contato com a superfície de apoio.
- **Força de atrito** ( $\vec{F}_{at}$ ) é a força que uma superfície sobre a qual um corpo está apoiado aplica **paralelamente** a esta própria superfície, opondo-se a uma força que tende a movê-lo. Essa força se deve ao atrito entre as rugosidades da superfície do corpo e da superfície de apoio.
- **Força de atrito estático** ( $F_{at.est}$ ) é a força de atrito que impede um corpo, inicialmente parado, de começar a se mover quando ele é puxado por uma força menor que um certo valor. Ou seja,

$$F_{at.est} \leq \mu_{est}N, \quad 4.1$$

onde  $\mu_{est}$  é o coeficiente de atrito estático, que depende das características das superfícies, e  $N$  é o módulo da força normal que a superfície aplica ao corpo apoiado sobre ela. O módulo da força de atrito é proporcional ao módulo da força normal, embora sejam forças perpendiculares uma à outra, porque a força normal indica o quanto as superfícies estão comprimidas uma sobre a outra.

- **Força de atrito dinâmico** ( $F_{at.din}$ ) é a força de atrito que se opõe ao movimento de um corpo quando ele já está, de fato, se movendo. Ou seja, quando a equação 4.1 não mais se aplica porque a força aplicada é maior que  $\mu_{est}N$ , deve-se usar a equação

$$F_{at.din} = \mu_{din}N,$$

parecida com a equação 4.1 mas com a força de atrito dinâmico e o **coeficiente de atrito dinâmico** ( $\mu_{din}$ ). Esta equação é uma igualdade ao invés de uma desigualdade do tipo “menor ou igual”. Para um corpo e uma superfície dados, o coeficiente de atrito dinâmico é menor que o estático. Em muitos exercícios, usa-se 0,4 para  $\mu_{est}$  e 0,3 para  $\mu_{din}$ .

Definimos a força de atrito, em termos puramente físicos, como sendo dada por  $F_{at} = \mu N$ , em que  $\mu$  é um coeficiente de atrito estático ou dinâmico e  $N$  é a normal ao apoio do corpo. Essa é a forma puramente física de se definir atrito de uma maneira absolutamente genérica. Note, entretanto, que a expressão é o que se chama de *hipótese de resposta linear*, uma vez que pressupõe que o atrito varia linearmente com a força normal (por meio de uma constante). Note também que o modelo envolvido se refere a um atrito do tipo deslizamento de uma superfície sobre a outra.

Em diversas situações importantes, como por exemplo, no caso de um trator que deve arar um campo, não podemos mais usar um modelo tão simples ou ideal. Isso se deve ao fato de que, para o trator, haverá também o afundamento de seus pneus, dentre outros fatores importantes. Assim, devemos passar de uma expressão altamente idealizada da Física a uma expressão com elementos que levam em consideração questões mais concretas que devem ser modeladas.

De fato, se estamos lidando com o cálculo do atrito em tratores, por exemplo, então devemos definir a força de atrito como sendo

$$F_{at} = A \cdot c + w \cdot \tan(\phi),$$

em que  $A$  é a área (em  $m^2$ ),  $c$  e  $\phi$  são coeficientes inerentes ao tipo de solo e são determinados empiricamente,  $w$  é o peso do trator. A reação do solo a um elemento de tração (um pneu ou esteira) é, na maioria dos casos, afetada pela área cisalhada e pelo peso, como mostra a figura 4.3.

**Tabela 4.2:** Valores das constantes  $c$  e  $\phi$  em termos do tipo de solo

Tipo de solo	$c$ ( $\frac{lb^2}{in}$ )	$\phi$ ( $^\circ$ )
Terreno arenoso arado e sulcado	0,7	20
Terreno arenoso fino arado há pouco tempo	1,02	20,5
Terreno arenoso fino não arado	1,63	42,5

Fonte: elaboração dos autores.

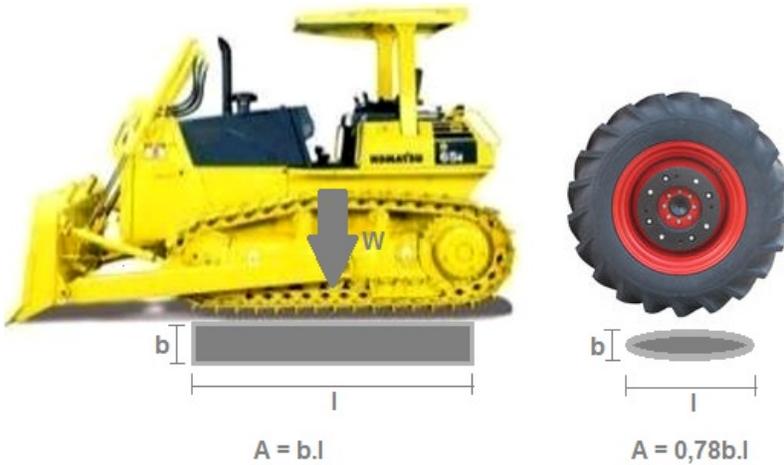
Nesses casos, a área  $A$  é calculada como  $A = bl$  (para esteiras) e  $A \approx 0,78 bl$  (para tratores com pneu). A tabela 4.2 traz valores de  $c$  e  $\phi$  para alguns tipos de solo e do trabalho já realizado neles.

**Tabela 4.3:** Valores da coesão, do atrito e do coeficiente de penetração do pneu no solo em função do tipo de solo

Tipo de solo	$k_c$ ( $lb/in^{n+1}$ )	$k_\phi$ ( $lb/in^{n+2}$ )	$n$
Terreno arenoso arado e sulcado	11,2	19,2	0,95
Terreno arenoso fino arado há pouco tempo	1,65	1,32	1,10
Terreno arenoso fino não arado	10,5	37,2	0,61

Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho, com informação retirada de *Apostila de Máquinas Agrícolas*, Abílio Garcia dos Santos Filho e João Eduardo Guarnetti Garcia dos Santos (2001).

**Figura 4.3:** Ilustração do cálculo das áreas para tratores de esteira e tratores com pneus



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

Um descritor importante que se relaciona com a força de atrito é a tração  $T_r$ , que um trator pode realizar para puxar arados etc. Essa tração é o resultado da força de atrito, que se opõe ao movimento, menos a resistência ao rolamento, que permite às rodas ou esteiras impulsionarem o trator sem deslizar, ou seja,

$$T_r = F_{at} - R,$$

em que  $R$  é a resistência ao rolamento. Para *tratores* de esteira, essa resistência ao rolamento é dada por

$$R = \left( \frac{2}{n+1} \right) \left( \frac{w}{2l} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left( \frac{1}{k_c + bk_\phi} \right)^{\frac{1}{n}},$$

enquanto que, para *trator de pneus*, temos

$$R = \left( \frac{3w}{(3-n)\sqrt{d}} \right)^{\frac{2n+2}{2n+1}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{2n+1}{2n+1}} \sqrt{k_c + bk_\phi}},$$

em que  $w$  é o peso do pneu (em  $kgf$ ),  $b$  é a menor dimensão da área de tração  $A$  (em polegadas),  $l$  é a maior dimensão da área de tração  $A$  (em polegadas) e  $d$  é o diâmetro do pneu (em polegadas). Já  $k_c$ ,  $k_\phi$  e  $n$  são tabelados e significam o módulo de deformação do solo (coesão, em  $lb/pol^{n+1}$ ), módulo de deformação do solo (atrito, em  $lb/pol^{n+2}$ ) e coeficiente de penetração da roda no solo, respectivamente. Tem-se os valores mostrados na tabela 4.3 para essas constantes em função do tipo de solo.

#### Exercício 4.8 TRACÇÃO MÁXIMA DE UM TRATOR DE ESTEIRA

Determine a tração máxima na barra de tração de um trator de esteira com sapata de  $14 \times 66 \text{ cm}$ , tendo este trator um peso total de  $7136 \text{ lbf}$ . Considere que  $\phi = 30^\circ$ ,  $k_\phi = 9$ ,  $n = 2$ ,  $k_c = 20$ .

## 4.6 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 4.1

- No primeiro caso, o torque total que o motor sobre o pivô deve vencer é igual a

$$\tau_{tot} = 200 \cdot 25 + 200 \cdot 50 = 15.000 \text{ N.m};$$

assim, para mover o conjunto a uma velocidade angular igual a  $1 \text{ rad/min}$ , a potência deve ser  $W_{tot} = 15.000 \div 60 = 250 \text{ W}$ .

- No segundo caso, ambos os motores devem realizar a força *linear* igual a  $200 \text{ N}$ , mas a velocidade linear que o mais próximo do pivô deve impor ao sistema é dada por  $\omega \cdot r = 1 \cdot 25 \text{ m/s}$ , enquanto que a velocidade linear que o motor mais externo deve impor é dada por  $1 \cdot 50 \text{ m/s}$ . Assim, a potência total deve ser igual a  $W_{tot} = (200 \cdot 25 + 200 \cdot 50) \div 60 = 250 \text{ W}$ .

Esse resultado mostra que, em questão de gasto de energia, não se consegue “almoço grátis”. Entretanto, há outros elementos que devem ser levados em conta para o caso em que se deseje, de fato, implementar uma das soluções acima. Pense sobre esses elementos e confronte sua análise com um problema similar (mas apenas qualitativo) proposto no capítulo anterior.

### Solução 4.2

Como o torque tem que ser constante (e a rotação em  $8,5 \text{ rpm}$ ), temos que

$$\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{6\omega + 1}{\Delta} - \frac{3\omega^2 + \omega}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{d\omega} = 0,$$

de modo que

$$\frac{d\Delta}{d\omega} = \frac{\Delta}{\omega} \frac{6\omega + 1}{3\omega + 1} = 0,231\Delta.$$

Para maximizar a extração, derivamos  $P_{ext}$  com relação a  $\omega$  e igualamos a zero, ou seja,

$$\frac{dP_{ext}}{d\omega} = \frac{1 - 4\Delta}{\omega^2 + 2} \frac{d\Delta}{d\omega} - \frac{\Delta - 2\Delta^2}{(\omega^2 + 2)^2} 2\omega = 0$$

dando, após a substituição de  $d\Delta/d\omega$  já obtido

$$\frac{1 - 4\Delta}{8,5^2 + 2} 0,231\Delta = \frac{\Delta - 2\Delta^2}{(8,5^2 + 2)^2} 2(8,5)$$

restando a seguinte equação para  $\Delta$

$$-6,28 \times 10^{-3} \Delta^2 + 2,75 \times 10^{-5} = 0,$$

de modo que temos as soluções

$$\Delta = 0; \Delta = 4,38 \times 10^{-3} m.$$

Evidentemente,  $\Delta = 0$  gera um máximo, mas não é atingível em termos práticos. Assim, resta apenas a outra solução e chegamos à conclusão de que o espaçamento deve ser  $\Delta = 4,38 \times 10^{-3} m$ . A produtividade obtida será dada por

$$P_{ext} = 10^6 \left( \frac{\Delta - 2\Delta^2}{\omega^2 + 2} \right)_{\omega=8,5; \Delta=0,00438} = 58,47 \%$$

### Solução 4.3

Temos que o torque será dado por  $\tau = 51426.94 \text{ N.m}$  e a potência será igual a  $W = 4.37 \times 10^5 \text{ Watts}$ .

### Solução 4.4

A potência dissipada pelo deslizamento  $W_{at}$  deve ser igual à potência dissipada pela força de atrito, ou seja,

$$W_{at} = F_p \mu_{est} (\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2).$$

### Solução 4.5

A relação entre a velocidade linear da correia e a velocidade angular da primeira polia permite calcular o seu raio como sendo

$$r_1 = \frac{12}{1450 \cdot \frac{2\pi}{60}} = 0,079 \text{ m},$$

enquanto o raio da segunda polia fica

$$r_2 = \frac{12}{500 \cdot \frac{2\pi}{60}} = 0,23 \text{ m}$$

de modo que

$$L = 1 + (0,079 + 0,23) 3,25 = 2,00 \text{ m}$$

### Solução 4.6

$$L = 2,20 \text{ m}, CT_e = 1,1 \text{ ha/h e } \Delta t = 1,82 \text{ h}.$$

### Solução 4.7

O comprimento da camada arável se soma à camada compactada de modo que temos  $p = 60 \text{ cm}$ . Por outro lado,  $n = [140/(0,8 \times 60)] = [2,91] = 3$  dando  $L = 3 \times 60 \text{ cm} = 180 \text{ cm} = 1,8 \text{ m}$ . A capacidade efetiva de trabalho fica, portanto,

$$CT_e = \frac{1,8 \times 4 \times 0,8}{10} = 0,576 \text{ ha/h}.$$

### Solução 4.8

A força de atrito pode ser imediatamente calculada como  $(A = bl) F_{at} = nblc + w \cdot \tan(\varphi) = 7816 \text{ lbf}$ . A resistência ao rolamento fica dada por

$$R = \frac{2}{(n+1)(k_c + bk_\phi)^{1/n}} \left(\frac{w}{2l}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{2}{(2+1)(20+14,9)^{1/2}} \left(\frac{7136}{2,66}\right)^{3/2} \quad 4.2$$

$$= 21,93 \text{ lbf} \simeq 22 \text{ lbf}. \quad 4.3$$

A tração máxima fica, portanto, dada por  $T_r = 7794 \text{ lbf}$ .

# Capítulo 5

## Estática

Estudar as condições de equilíbrio de um corpo é tarefa da *Estática*, uma das divisões da ciência da *Mecânica*, que por sua vez é a divisão da Física relacionada ao movimento e suas causas. A Estática trata de corpos em equilíbrio, ou seja, em situações em que o seu estado de movimento é mantido invariável porque os efeitos das forças atuantes se anulam mutuamente. A aplicação da Estática às Ciências Agrárias e Ambientais se dá principalmente no estudo de máquinas agrícolas, como os tratores. Embora o funcionamento dessas máquinas inclua muitas vezes o movimento de suas partes fora do equilíbrio, o equilíbrio é quase sempre a base para entender este funcionamento.

### 5.1 Equilíbrio de um ponto material

Equilíbrio, intuitivamente, é uma condição na qual todas as influências cancelam umas às outras, resultando num sistema estável. Na Física, o caso mais simples é o equilíbrio de um **ponto material**, também chamado de *corpo pontual*, que é um corpo físico cujas dimensões são tão pequenas em relação às dimensões envolvidas num problema que ele pode ser considerado como tendo seu volume concentrado num único ponto. O equilíbrio de um corpo pontual é simplesmente o cancelamento mútuo das forças vetoriais nele aplicadas, o que causa a anulação da força resultante sobre ele. Nesse caso, o corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. No caso de um corpo cujas dimensões não podem ser desprezadas, ou seja, de um corpo extenso, o estudo do equilíbrio requer maior elaboração.

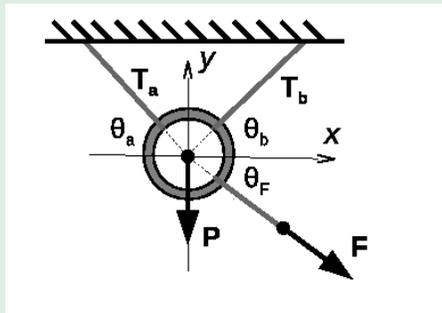
## 5.2 Equilíbrio translacional

### Primeira condição de equilíbrio do corpo rígido

**Equilíbrio translacional** é a condição na qual a soma vetorial das forças exercidas sobre o corpo (ou seja, a força resultante) é nula. Todas as forças devem ser somadas vetorialmente, mesmo que estejam aplicadas em diversos pontos diferentes do corpo.<sup>1</sup>

Quando um corpo está em **equilíbrio translacional estático**, o seu centro de massa não sofre translação; quando ele está em **equilíbrio translacional dinâmico**, o seu centro de massa permanece em movimento retilíneo uniforme (MRU). Costuma-se chamar a condição de equilíbrio translacional de **primeira condição de equilíbrio**. Um corpo em equilíbrio translacional conserva sua velocidade e seu momento linear. Um corpo pode ser tirado do equilíbrio translacional somente por aplicação de força (incluindo força de atrito, resistência do ar, gravidade etc.).

#### Exercício 5.1 EQUILÍBRIO TRANSLACIONAL DE UMA ARGOLA



Na figura, mostra-se uma argola rígida presa por duas cordas ao teto e puxada por meio de uma terceira corda obliquamente para baixo por uma pessoa, conforme ângulos representados na figura. Considera-se o peso  $\vec{P}$  como aplicado no centro de massa da argola (embora esse ponto não esteja em seu volume). A primeira condição de equilíbrio dos corpos rígidos, aplicada à argola e somente para componentes dos vetores ao longo do eixo  $y$ , é corretamente expressa por qual equação abaixo?

- Ⓐ  $T_b \cos \theta_b - F \sin \theta_F + T_a \cos \theta_a - P = 0$
- Ⓑ  $T_a \sin \theta_a - F \sin \theta_F + T_b \sin \theta_b = 0$
- Ⓒ  $T_a \sin \theta_a - F \sin \theta_F + T_b \sin \theta_b - P = 0$

<sup>1</sup>De fato, na definição de um vetor não especificamos o seu *ponto de aplicação* de modo que vetores com mesmo módulo, direção e sentido são o *mesmo vetor*, independentemente de estarem aplicados a diferentes pontos de um corpo.

## 5.3 Equilíbrio rotacional

### Torque

Forças podem gerar rotação num corpo ou simplesmente movê-lo sem girá-lo. A grandeza que mede a capacidade que uma força tem de gerar rotação num corpo é chamada de **torque**, e também se usa a denominação **momento de uma força com relação a um ponto** para essa grandeza. O torque, diferentemente da força, é sempre calculado para uma força em relação a um ponto de um corpo. O torque indica a capacidade que essa força tem de causar uma rotação de um objeto ou de um ponto material em relação àquele ponto. Já introduzimos a noção de torque e agora podemos aprofundar um pouco mais nossa descrição.

O vetor torque é calculado como o produto vetorial entre o vetor “braço de momento” ( $\vec{r}$ ) que posiciona o ponto de aplicação da força ( $\vec{F}$ ) em relação ao ponto para o qual se calcula o torque (geralmente um ponto fixo do corpo rígido):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

O módulo do torque é calculado segundo a fórmula

$$\tau = rF \sin\theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o  $\vec{r}$  e o vetor  $\vec{F}$ . A direção e o sentido são dados pela regra da mão direita.

#### Exercício 5.2 TORQUE DE APERTO

Um determinado parafuso de uma máquina agrícola é apertado, de fábrica, por um torque de 200 N m. Usando uma chave cujo braço mede 2 m, qual deverá ser a força mínima para desparafusar esse parafuso?

### Segunda condição de equilíbrio do corpo rígido

**Equilíbrio rotacional** é a condição na qual a soma vetorial dos *torques* exercidos sobre o corpo é nula. Quando um corpo está em **equilíbrio rotacional estático**, o corpo não experimenta rotação; quando ele está em **equilíbrio rotacional dinâmico**, todos os pontos do corpo permanecem em movimento circular uniforme (MCU) em torno de seu centro de massa.

Costuma-se chamar a condição de equilíbrio rotacional de **segunda condição de equilíbrio**. Assim como um corpo em equilíbrio translacional conserva sua velocidade e seu momento linear, um corpo em equilíbrio rotacional conserva sua velocidade angular e o seu momento angular. Assim como um corpo pode ser tirado do equilíbrio translacional somente por aplicação de força, um corpo pode ser tirado do equilíbrio rotacional somente por aplicação de torque.

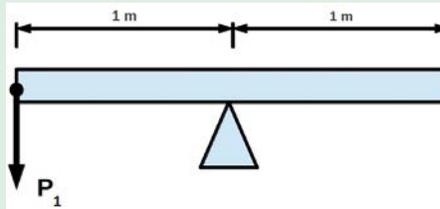
### Exercício 5.3 EQUILÍBRIO NUMA ALAVANCA

Uma certa alavanca consiste de uma barra de um metro de comprimento com o ponto de apoio a 30 cm da extremidade sobre a qual se coloca um objeto de 10 kg. Quantos quilos devem ser colocados sobre a outra extremidade, como contrapeso, de modo a equilibrar a alavanca, considerando que a barra esteja na posição horizontal?

### Exercício 5.4 EQUILÍBRIO NUMA PORTA

Se Maria está aplicando uma força de 5,0 N numa porta, pela parte de dentro, perpendicularmente à superfície da porta, num ponto a 20 cm da extremidade das dobradiças,

- (a) que força João deve fazer, pela parte de fora, para manter a porta em equilíbrio, se ele está aplicando a força no sentido contrário, também perpendicularmente à superfície da porta, num ponto a 30 cm da extremidade das dobradiças?
- (b) Se João mudar o ângulo de aplicação da força para  $45^\circ$  com superfície da porta e mudar o módulo de sua força para que a porta permaneça em equilíbrio, qual será o novo módulo de sua força?
- (c) Se, vendo João mudar a força exercida como descrito no item b, Maria achasse que deveria inclinar a sua força também, e passasse a exercê-la a  $30^\circ$  com a superfície da porta, a porta giraria ou permaneceria em repouso? Se giraria, em que sentido?

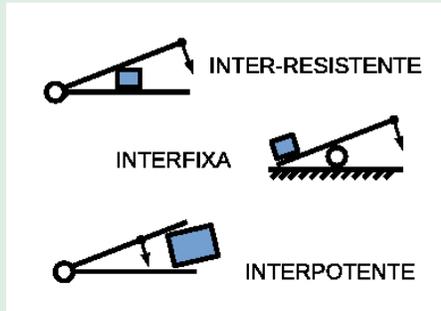
**Exercício 5.5** EQUILÍBRIO NUMA GANGORRA

Considere a gangorra da figura, de 2 m de comprimento e suportada pelo centro, onde  $P_1$  representa o módulo de uma força peso aplicada. Se uma outra força peso de módulo  $P_2 = 3P_1$  é aplicado do outro lado do suporte central, a que distância essa força deve estar desse suporte para que a gangorra fique em equilíbrio?

**Exercício 5.6** DUAS CRIANÇAS NUMA GANGORRA

A plataforma de uma gangorra infantil, que tem 2 m de comprimento, 5 kg de massa e é sustentada por um eixo localizado no ponto médio ao longo de seu comprimento, está inicialmente em posição horizontal. Num mesmo instante, um garoto de 30 kg senta-se numa ponta e uma garota de 20 kg senta-se na outra ponta. Considerando a aceleração da gravidade igual a  $10 \frac{m}{s^2}$ , responda às questões:

- Qual é o módulo da força normal exercida sobre a gangorra?
- Defina eixos cartesianos e expresse a força normal e todos os pesos envolvidos no problema com vetores.
- Qual é o torque causado pelo garoto sobre o ponto médio da gangorra?
- Qual é o torque causado pela garota sobre o ponto médio da gangorra?
- O sistema permanecerá em equilíbrio rotacional, considerando o período desde a gangorra vazia até a gangorra ocupada pelos garotos?
- A que distância do centro o garoto deveria ter se sentado para que a gangorra permanecesse em equilíbrio?

**Exercício 5.7** TIPOS DE ALAVANCA

Numa alavanca, identificam-se três pontos: um ponto de resistência **R** (no qual se deseja aplicar uma força num objeto que a ela resiste), um ponto fixo **F** (ou “ponto de apoio”), e um ponto de potência **P** (no qual o usuário da alavanca aplica a chamada “força potente”). Alavancas são classificadas de acordo com qual deles se encontra entre os outros: inter-resistente, interfixa e interpotente. Embora alavancas frequentemente tenham que sair do equilíbrio para funcionar, analisá-las no equilíbrio é útil porque assim descobrimos um valor acima do qual a força potente deve estar para fazer a alavanca mover o objeto ao qual é aplicada. É necessário notar que, para computar corretamente o equilíbrio numa alavanca, deve-se incluir a força que o objeto resistente faz na alavanca, e não a força que a alavanca faz nesse objeto (igual em módulo mas oposta em sentido). Diferenciemos a distância entre cada par desses pontos por índices que sejam combinações das letras que as representam  $R_{FR}$ ,  $R_{FP}$  e  $R_{RP}$ . Que alternativa abaixo mostra as fórmulas que expressam a força  $F_R$  no ponto de resistência em função da força  $F_P$  no ponto de potência, respectivamente para alavancas inter-resistente, interfixa e interpotente?

- (a)  $F_P = \frac{R_{FR}}{R_{RP}} F_R$ ,  $F_P = \frac{R_{FR}}{R_{FP}} F_R$ ,  $F_P = \frac{R_{FP}}{R_{RP}} F_R$   
 (b)  $F_P = \frac{R_{FR}}{R_{FP}} F_R$ ,  $F_P = \frac{R_{FR}}{R_{FP}} F_R$ ,  $F_P = \frac{R_{FR}}{R_{FP}} F_R$   
 (c)  $F_P = \frac{R_{FP}}{R_{FR}} F_R$ ,  $F_P = \frac{R_{FR}}{R_{FP}} F_R$ ,  $F_P = \frac{R_{FP}}{R_{FR}} F_R$

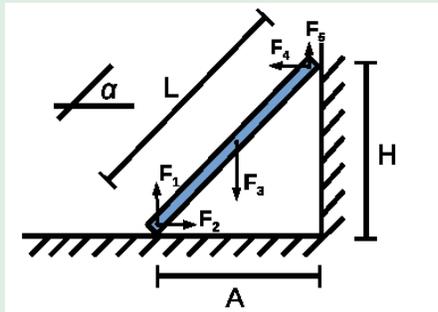
## 5.4 Equilíbrio total de um corpo rígido

Para que um corpo esteja totalmente em equilíbrio, as forças e os torques que nele atuam devem se anular mutuamente. Isso significa que ele deve estar em equilíbrio translacional e rotacional e satisfazer as duas condições de equilíbrio:

- **primeira condição de equilíbrio de um corpo rígido:** a soma vetorial das forças que atuam nele deve ser nula;
- **segunda condição de equilíbrio de um corpo rígido:** a soma vetorial dos torques de todas as forças que atuam nele deve ser nula em relação a todos os seus pontos.

O equilíbrio de um corpo também pode ser classificado como estável ou instável. Equilíbrio estável é a situação na qual uma pequena perturbação no sistema em equilíbrio causa forças que tendem a levar o sistema novamente ao equilíbrio original. Equilíbrio instável é a situação na qual uma pequena perturbação no sistema em equilíbrio causa forças que tendem a tirar o sistema do equilíbrio original.

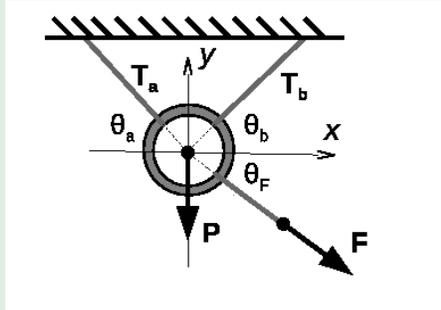
### Exercício 5.8 EQUILÍBRIO DE ESCADA APOIADA NA PAREDE



Na figura, representa-se uma escada apoiada no chão e numa parede, com representações de distâncias, peso da escada (aplicado em seu centro geométrico porque a escada tem densidade homogênea), forças normais e forças de atrito estático. Uma força de atrito estático tem módulo igual e sentido oposto à qualquer força resultante paralela à superfície que tenda a mover o objeto, mantendo assim o objeto em equilíbrio. Mas há um limite para o módulo que a força de atrito pode atingir, dado pelo coeficiente de atrito estático (que depende de características das superfícies em contato) multiplicado pelo módulo da força normal na superfície do objeto aplicada pela superfície de apoio. Note que o seno e o cosseno do ângulo alfa podem ser expressos usando os comprimentos A, H e L, que formam um triângulo retângulo. Saiba também que  $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{sen}(90^\circ + \alpha)$  e que  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$ . Assim, a segunda condição de equilíbrio, escrita tomando o ponto de contato entre a escada e o chão como o ponto de referência, fornece qual das seguintes equações?

- (a)  $F_4H + F_5A - F_3A/2 = 0$   
 (b)  $F_4A + F_5H - F_3A/2 = 0$   
 (c)  $F_4A + F_5A - F_3L/2 = 0$

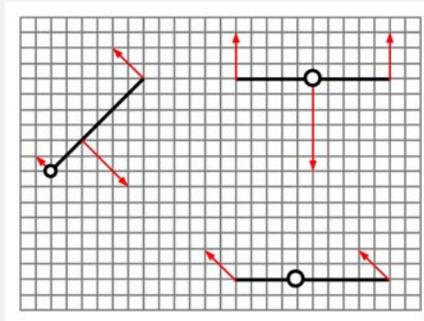
### Exercício 5.9 EQUILÍBRIO ROTACIONAL DE UMA ARGOLA



Na figura, mostra-se uma argola rígida presa por duas cordas ao teto e puxada por meio de uma terceira corda obliquamente para baixo por uma pessoa, conforme ângulos representados na figura. Considera-se o peso  $\vec{P}$  como aplicado no centro de massa da argola. As cordas estão todas esticadas na direção radial em relação ao centro de massa da argola. A segunda condição de equilíbrio dos corpos rígidos (torque resultante nulo), aplicada na argola, é corretamente expressa por qual equação abaixo? Considere que  $R$  seja o raio da argola.

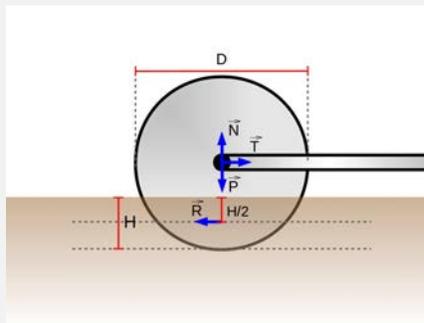
- (a)  $RT_b \text{sen}(0^\circ) + RF \text{sen}(0^\circ) + RT_a \text{sen}(0^\circ) = 0$  ( $0=0$ )  
 (b)  $RT_b \text{sen}\theta_b + RF \text{sen}\theta_F - RT_a \text{sen}\theta_a = 0$   
 (c)  $T_b \cos\theta_b + F \text{sen}\theta_F - T_a \cos\theta_a = 0$

**Problema 5.1.** FORÇAS E TORQUES EM BARRAS



Considere que as barras representadas na figura estejam sujeitas às forças representadas pelas setas nelas desenhadas. A grade de linhas horizontais e verticais está ali mostrada apenas para cálculo do comprimento e dos módulos das forças: cada lado de divisão no sentido horizontal ou vertical representa  $10\text{ cm}$  de comprimento. No caso das forças, cada uma dessas divisões representa  $1\text{ N}$ . Calcule a força resultante e o torque resultante para cada uma das barras. Estão em equilíbrio translacional? Estão em equilíbrio rotacional?

**Problema 5.2.** EQUILÍBRIO NUM ARADO



Considere o disco de arado representado na figura. Escreva as condições de equilíbrio para as forças nele representadas.

**Figura 5.1:** Fotografia de um trator com um arado



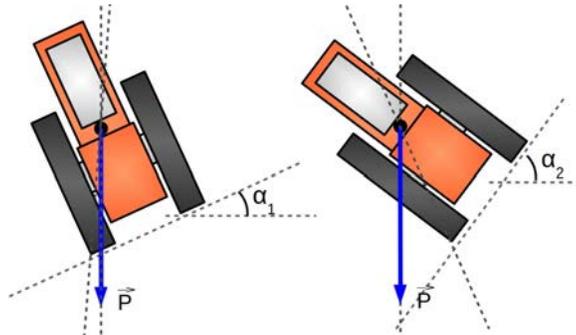
Fonte: Fotografia tirada por Leonardo Luiz e Castro na *Fazenda Realidade*, em Unaí, Minas Gerais, propriedade de Celso Peres Rodrigues, Ginamar M. Freitas e Rafael Peres F., que gentilmente cederam o uso da imagem.

## 5.5 Prevenção de tombamento de tratores

Talvez o fenômeno que mais tenha influenciado a vida no campo em tempos recentes a mecanização rural. Como parte desse processo, ocorreu um grande aumento do uso de tratores, e conseqüentemente dos acidentes com eles, a maioria fatal (VARELLA; JUNIOR, 2008). Em 1991, o governo espanhol estimou que 60% dos acidentes com tratores eram causados por tombamentos (DELGADO, 1991 apud VARELLA; JUNIOR, 2008).

Diversos fatores influenciam a estabilidade de um trator, incluindo a inclinação do solo, o coeficiente de atrito entre pneus e solo, a penetração dos pneus no solo durante o deslocamento etc. Equipamentos acoplados, como arados, reboques e lastros, também alteram completamente o equilíbrio. Para que um trator não tombe quando estacionado ou em movimento uniforme, ele deve estar em equilíbrio translacional e rotacional.

**Figura 5.2:** Fotografia de um trator visto por trás e representação esquemática de um trator, visto de frente ou de trás  
O trator é mostrado sobre duas superfícies de inclinações diferentes, com o vetor peso aplicado ao centro de massa.

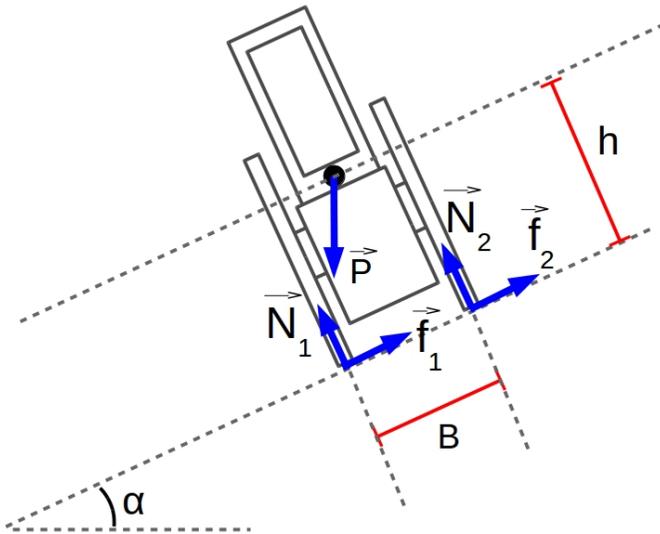


Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro. A fotografia foi tirada na *Fazenda Realidade*, em Unaí, Minas Gerais, propriedade de *Celso Peres Rodrigues, Ginamar M. Freitas e Rafael Peres F.*, que gentilmente concordaram com o uso da imagem. Os esquemas foram feitos em *LibreOffice*.

Considere o trator representado na figura 5.2. Para simplificar, considere apenas uma roda de cada lado do trator (e pense no que mudaria ao se considerar todas as quatro rodas). Se o trator tombasse, o ponto inferior da roda da esquerda, em contato com o solo, seria o ponto em torno do qual o trator rodaria. Na inclinação  $\alpha_1$ , a força peso força o trator contra o solo, pois tenderia a rodá-lo no sentido horário se o solo não estivesse ali. Já na inclinação  $\alpha_2$ , a força peso tende a rodá-lo no sentido anti-horário, e nesse caso contribuiria para o tombamento do trator, tirando a roda da direita do solo.

Para diminuir o risco desse tipo de situação, pode-se usar um lastro, que é alguma massa adicional destinada a abaixar o centro de massa do sistema. Além de evitar tombamentos, lastros melhoram a tração, reduzindo a patinação. Um método comum de *lastreamento* (ou “lastragem”) consiste em colocar pesos de metal nas rodas ou no chassi. Existem peças de metal construídas especificamente para serem usadas como lastro. Outra possibilidade é encher parcialmente os pneus com água (TITAN, 2018?). Em regiões frias, pode ser necessário usar aditivos anticongelantes para evitar o congelamento da água.

**Figura 5.3:** Representação das variáveis utilizadas no cálculo da inclinação de tombamento de um trator



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

### **Problema 5.3.** INCLINAÇÃO DE TOMBAMENTO DE UM TRATOR

Seja o trator representado na figura 5.3, de bitola  $B$  e altura  $h$  entre o solo e o centro de massa. Qual deve ser a relação entre  $B$ ,  $h$ ,  $\alpha$  e  $\mu_{est}$  (coeficiente de atrito estático) para que o trator não tombe se estacionado nessa posição. Advertência: este cálculo é simplificado; no mundo real há mais fatores a levar-se em conta.

## **Situações concretas de tombamento**

Quando passamos à aplicação dos princípios físicos estudados a um campo concreto de aplicação como aquele relativo a tratores reais, em situações reais de uso, algumas das fórmulas físicas obtidas podem dar lugar a outras, que carregam mais elementos dessas situações.

Com o estudo do trator que trabalha em um declive, o estudo das condições para que não haja tombamento não é diferente. Assim, considere o caso de um terreno que se apresenta inclinado por um ângulo  $\alpha$ , de modo que sua declividade pode ser calculada como

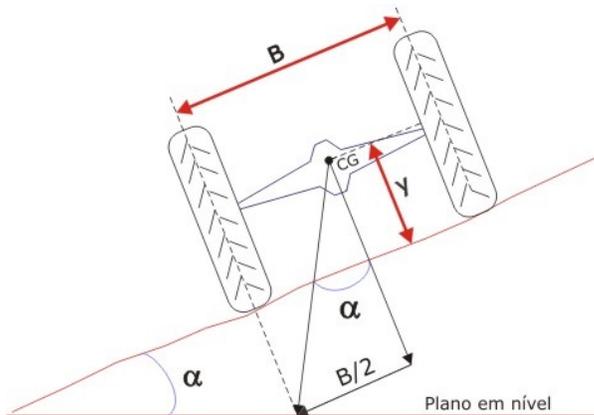
$$d_t = \tan(\alpha) = \frac{z}{x},$$

em que  $z$  e  $x$  são as distâncias vertical e horizontal do declive medidas diretamente no sistema. Para o caso em que se pode considerar que o centro de gravidade do trator está localizado no plano médio deste, a declividade máxima do plano de apoio para equilíbrio estático lateral de tratores é

$$d_e = \frac{B}{2y} 100,$$

em que  $B$  é a bitola do trator e  $y$  é a cota vertical do centro de gravidade do trator, como apresentado na figura 5.4.

**Figura 5.4:** Representação da vista de trás de um trator apoiado sobre um plano inclinado de ângulo  $\alpha$



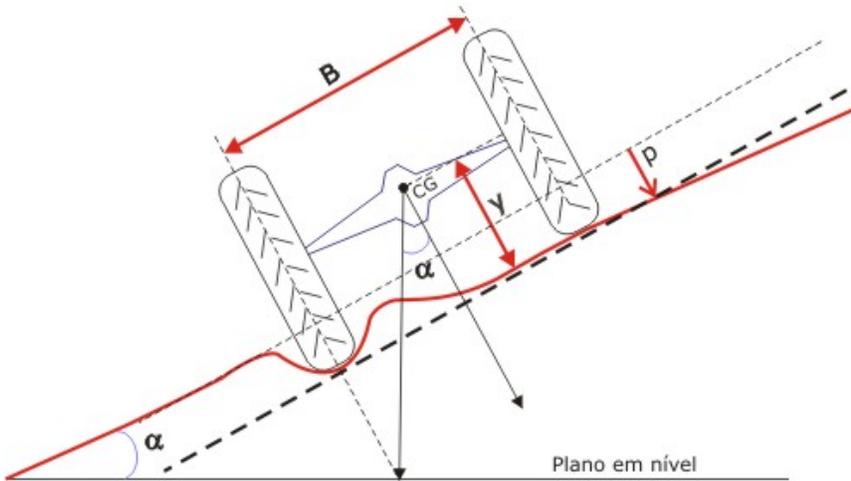
Fonte: produzida e gentilmente cedida por Carlos Alberto Alves Varella (VARELLA; JUNIOR, 2008), professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ).

Entretanto, tratores, devido ao seu peso e esforço em regime de trabalho, produzem sulcos na terra, uma vez que suas rodas afundam ali. Esse afundamento exige, portanto, uma redefinição da declividade máxima de operação do trator (aquela que já leva em consideração elementos de segurança), chamada *declividade operacional*  $d_o$ . Nesse caso, devemos calcular  $d_o$  como sendo

$$d_o = 0,5 \frac{\frac{B^2}{2y} - p}{\frac{Bp}{2y} + B},$$

em que  $p$  é a profundidade do sulco (ver figura 5.5) e 0,5 é um coeficiente de segurança.

**Figura 5.5:** Representação do mesmo trator da figura anterior com as rodas posicionadas dentro de um sulco de profundidade  $p$



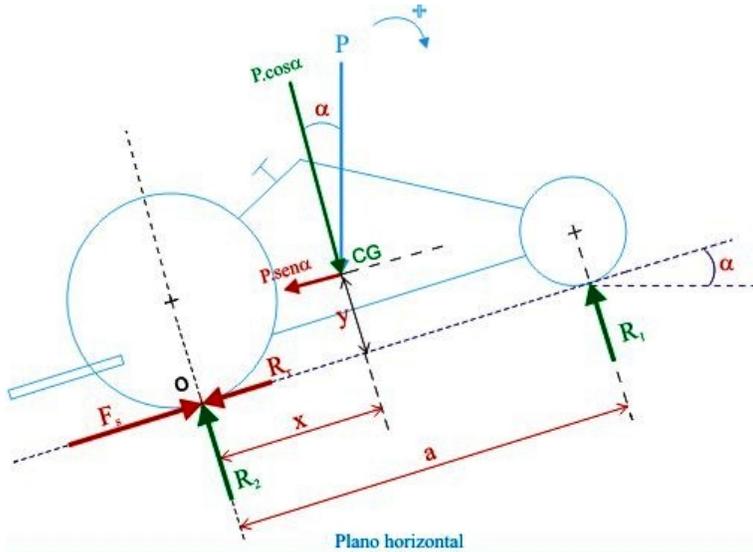
Fonte: produzida e gentilmente cedida por Carlos Alberto Alves Varella (VARELLA; JUNIOR, 2008), professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ).

Entretanto, não é apenas o tombamento lateral que importa calcular. Dados da ANFAVEA de 2008 (ANFAVEA, 2007 apud VARELLA; JUNIOR, 2008) mostram que 15% dos tombamentos são longitudinais para trás, quando o trator empina suas rodas dianteiras e, então, gira longitudinalmente, em geral fazendo de seus condutores vítimas fatais.

Em situação de tombamento longitudinal, temos que considerar, novamente, a variável que já tratamos quando estudamos tratores de pneus do ponto de vista do campo da dinâmica, qual seja, a resistência ao rolamento  $R$ , que se articula com a variável de atrito  $F_{at}$  (ou resistência do solo à tração). Na figura 5.6 apresentamos o diagrama de forças atuando sobre um trator em situação de trabalho longitudinal sem a realização de tração, ou seja, apenas parado. Assim,  $R_1$  e  $R_2$  são as reações nos eixos dianteiro e traseiro, respectivamente, e  $P$  é o peso do trator. A exigência de que o somatório das forças se anule tanto na direção vertical como na direção horizontal (primeira condição de equilíbrio) nos leva às seguintes equações

$$R_1 + R_2 = P \cos(\alpha), F_{at} - R = P \sin(\alpha).$$

**Figura 5.6:** Representação do mesmo trator da figura anterior agora visto longitudinalmente



Fonte: produzida e gentilmente cedida por Carlos Alberto Alves Varella (VARELLA; JUNIOR, 2008), professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ.

Essas equações, entretanto, não consideram o trator sob o efeito de uma tração, ou seja, produzindo esforço. Se introduzimos essa força de tração  $F_t$  como mostrado na figura 5.7, então devemos ter a primeira equação dada por

$$R_1 + R_2 = P \cos(\alpha) + F_t \sin(\beta), \quad 5.1$$

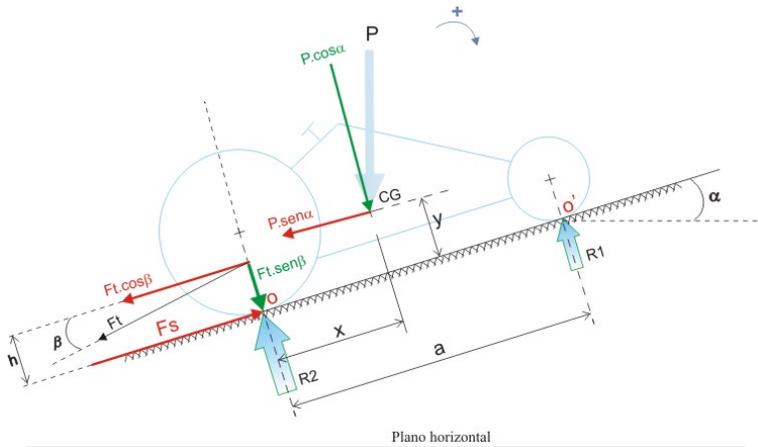
e a segunda equação agora dada por

$$F_{at} - R = P \sin(\alpha) + F_t \cos(\beta). \quad 5.2$$

Para calcular a segunda condição de equilíbrio, usamos a figura 5.7, em que fixamos o ponto O como o ponto segundo o qual os torques das diversas forças serão calculados. Assim, a partir dessa figura, temos que o anulamento do torque total sobre o sistema implica que

$$R_1 = \frac{-F_t \cos(\beta) h - P \sin(\alpha) y + P \cos(\alpha) x}{a}. \quad 5.3$$

**Figura 5.7:** Representação do mesmo trator da figura anterior agora visto longitudinalmente e exercendo tração



Fonte: produzida e gentilmente cedida por Carlos Alberto Alves Varela (VARELLA; JUNIOR, 2008), professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ.

Note que a escolha do ponto O como referência é conveniente, pois elimina a necessidade de se calcular os torques gerados pela força de atrito e pela reação  $R_2$ , uma vez que estão apontando para este ponto O. Temos, portanto, as variáveis  $F_{at}$ ,  $R$ ,  $P$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  e  $F_t$  ( $\alpha$  e  $\beta$  são considerados dados, assim como  $P$ ,  $a$  e  $h$ , que dependem apenas do tipo de trator, além das posições vertical e horizontal do centro de gravidade,  $y$  e  $x$ , respectivamente). Já vimos, quando estudamos a dinâmica, como calcular a resistência ao rolamento  $R$  em termos das propriedades do trator e a força de atrito é, geralmente, dada de forma tabelada em termos do tipo de terreno. Ficamos, portanto, com apenas as incógnitas  $R_1$ ,  $R_2$  e  $F_t$  e as equações 5.1, 5.2 e 5.3. Podemos, então, encontrar a força de tração máxima que se deve desenvolver com o trator para que não ocorra tombamento longitudinal.

### Exercício 5.10

Um trator agrícola hipotético, pesando  $W = 7980 \text{ lbf}$ , tem os seguintes valores característicos:  $h = 0,75 \text{ m}$ , medido a partir do chão, largura dos pneus  $b = 0,5 \text{ m}$  e projeção do comprimento dos pneus em apoio no solo  $\ell = 0,6 \text{ m}$ . O solo a ser trabalhado é arenoso fino e não arado. O ângulo  $\beta$  pode ser medido por

$$\tan(\beta) = \frac{y-h}{x} \rightarrow \beta = 14,3^\circ.$$

Em função dessas características, calcule a tração máxima que o trator pode exercer em uma área com inclinação  $\alpha = 15^\circ$  para ficar na iminência de apresentar rolamento longitudinal. Dados: diâmetro do pneu  $d = 0,894 \text{ m}$

## 5.6 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 5.1

Opção ©.

### Solução 5.2

Em relação à dependência do torque com o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ , o torque é máximo para um ângulo que satisfaça  $\sin\theta = 1$ , o que significa que a força necessária para desparafusar o torque é a mínima nessa situação. Assim  $F_{min} = \tau/r = 100 \text{ N}$ .

### Solução 5.3

4,28 kg

### Solução 5.4

(a)  $F_J r_J = F_M r_M \rightarrow F_J = F_M r_M / r_J = 5,0 \text{ N} \cdot 20 \text{ cm} / 30 \text{ cm} = 3,3 \text{ N}$

(b)  $F_J r_J \sin 45^\circ = F_M r_M \rightarrow F_J = \frac{F_M r_M}{r_J \sin 45^\circ} = \frac{5,0 \text{ N} \cdot 20 \text{ cm}}{30 \text{ cm} \sin 45^\circ} = 4,7 \text{ N}$

(c) Considerando o sentido de rotação que João tenta imprimir na porta como “positivo” e o de Maria como “negativo” (somente uma convenção), temos  $+F_J r_J \sin 45^\circ - F_M r_M \sin 30^\circ = 4,7 \text{ N} \cdot 30 \text{ cm} \cdot \sin 45^\circ - 5,0 \text{ N} \cdot 20 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ = +49 \text{ N cm}$ , portanto a porta gira no sentido de rotação em que João a empurra.

### Solução 5.5

$$\frac{2 \text{ m}}{3} = 0,67 \text{ m}$$

**Solução 5.6**

- (a) 550 N, para equilibrar os pesos das crianças e da plataforma (300 N + 200 N + 50 N)
- (b) Com eixo  $y$  para cima,  $\vec{P}_o = -300 N \hat{y}$  (garoto),  $\vec{P}_a = -200 N \hat{y}$  (garota),  $\vec{P}_p = -50 N \hat{y}$  (plataforma),  $\vec{N} = +550 N \hat{y}$ .
- (c) Com eixo  $x$  para o lado da menina,  $\vec{\tau}_o = (-1 \text{ m} \hat{x}) \times (-300 N \hat{y}) = 300 \text{ N m} \hat{z}$
- (d) Analogamente,  $\vec{\tau}_a = -200 \text{ N m} \hat{z}$
- (e) Não, porque os torques não se cancelam.
- (f) 0,6666 m

**Solução 5.7**

Opção Ⓓ, obtida da situação de equilíbrio entre os torques causados pelas forças potente e resistente em relação ao ponto fixo.

**Solução 5.8**

Opção Ⓐ, obtida pelo equilíbrio de torques em relação ao ponto de contato da escada com o chão.

**Solução 5.9**

Opção Ⓐ. Todas as forças têm direção radial em relação ao centro de massa do objeto, por isso não exercem torque.

**Solução 5.10**

Podemos calcular, imediatamente, a força de atrito relacionada ao solo como sendo  $F_{at} = b \cdot l \cdot c + W \cdot \tan(\phi)$ , em que, como o solo é arenoso fino e não arado, temos  $c = 1,63 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 1,63 \cdot 0,4536 / 0,0254^2 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$  e  $\phi = 42,5^\circ$ , fica

$$F_{at} = 0,5 \text{ m} \cdot 0,6 \text{ m} \cdot 0,78 \cdot \frac{1,63 \text{ kgf}}{0,0254^2 \text{ m}^2} + 7980 \text{ lbf} \cdot 0,4536 \frac{\text{kgf}}{\text{lb}} \tan 42^\circ$$

$$= 3908,1 \text{ kgf.}$$

A resistência ao rolamento pode ser também calculada como

$$R = 154,5 \text{ kgf}$$

### Texto complementar 3

#### AS PESSOAS E AS PLANTAS DO BRASIL: DA AGRICULTURA NATIVA À MECANIZAÇÃO AGRÍCOLA

É quase certo que a maioria dos brasileiros conhece pouco das origens da agricultura deste País e de sua evolução histórica até chegar ao atual cenário de *grandes lavouras* e *máquinas agrícolas*. A mecanização do campo ajudou a causar o *êxodo rural*, que levou a maior parte da população brasileira às cidades, frequentemente fazendo-a perder parte de sua “memória cultural”. Talvez espantem-se ao notar que a agricultura brasileira apresenta visível continuidade desde antes da chegada dos portugueses, quando os nativos já cultivavam pequenas lavouras, notavelmente de mandioca e amendoim, até o moderno *agronegócio*.

O Brasil conta com muitas outras plantas nativas consumidas desde antes da chegada dos portugueses, alguns delas provavelmente melhorados por índios por seleção artificial assim como o milho: maracujá, feijão,<sup>a</sup> açaí, cará, castanha-do-Pará, caju, jenipapo, goiaba, guariroba, gabirola, erva-mate etc. A descoberta da América pelos europeus não só revolucionou a culinária europeia e do resto do mundo, mas também modificou muito o modo de vida americano, incorporando, aos costumes nativos, importantes elementos originários de várias partes do mundo: o arroz da China, o trigo do Oriente Médio, o café da Etiópia (difundido pelos árabes), o gado bovino da Europa e da Ásia, a cana-de-açúcar da Ásia, os engenhos da Europa, o cavalo originalmente domesticado na Ásia Central etc. Vários tipos humanos regionais surgiram, associados ao modo de vida possibilitado por esses elementos e adaptados aos *ecossistemas* nacionais: o **caipira**, cultivador e extrativista que se distribui mais ou menos na mesma região do *Cerrado*; o **caiçara**, que é como uma versão litorânea do caipira e vive no litoral no qual se estende a *Mata Atlântica*; o **sertanejo**, habitante do *sertão* (regiões *agrestes*); o **crioulo**, cujo modo de vida foi determinado pela produção de açúcar em engenhos; o **quilombola**, que surgiu da fuga de escravos que trabalhavam nos engenhos de açúcar e em outras atividades para formar suas próprias comunidades conhecidas como “quilombos”; o **caboclo**, que vive na Floresta Amazônica de seus frutos, também chamado **caboclo-ribeirinho**, por viver sobretudo à beira dos rios amazônicos; o **gaúcho**, presente no sul do Brasil, assim como em regiões de países vizinhos (Argentina, Uruguai, Paraguai, Bolívia e

Chile), associado principalmente à pecuária, especialmente ao pastoreio de gado utilizando cavalos; e o **pantaneiro**, habitante do *Pantanal*, ligado à criação de gado bovino, levado de pastagem a pastagem por entre áreas alagadas por *vaqueiros* sobre cavalos.

O antropólogo *Darcy Ribeiro* usa a expressão “culturas rústicas” para descrever, de forma geral, as culturas desses tipos humanos. Talvez a grande maioria dessas pessoas praticassem a *agricultura de subsistência*, realizada apenas para o nível de consumo local. No entanto, as interações entre pequenos produtores também faz parte dessas tradições, o que pode ser notado na tradição dos *mutirões*, realizados até o tempo presente para o trabalho no campo e construção de casas, mas também eventualmente se vincularam a comerciantes de maior escala em suas regiões. O cultivo da mamona, por exemplo, destina-se principalmente à fabricação de óleo para a *indústria química*.<sup>b</sup> A mamona não serve como alimento por ser tóxica, tendo reduzido uso doméstico, como *cosmético* ou *medicamento*, de modo que pequenos produtores não conseguem escoar sua produção a não ser fazendo-a chegar à indústria. Do mesmo modo, muitos dos tradicionais *caipiras* foram incorporados à “indústria” do café desde o século XVIII.<sup>c</sup> Por outro lado, *Rinaldo Arruda* (ARRUDA, 1999) argumenta que foi justamente a exclusão de certas populações dos “grandes núcleos dinâmicos da economia nacional” que fez com que essas populações se deslocassem a regiões menos urbanizadas e adotassem as “culturas rústicas”:

Darcy Ribeiro (1995) classifica as variantes desse modelo de povoamento rural de cultura crioula - desenvolvida na faixa de massapé do Nordeste, sob a égide do engenho açucareiro; cultura caipira - constituída pelo cruzamento do português com o indígena e que produziu o meluco paulista, caçador de índios e depois “sitante tradicional” das áreas de mineração e de expansão do café. Apresenta-se no litoral sob o nome de cultura caiçara; cultura sertaneja - difundida pelo sertão nordestino até o cerrado do Brasil central pela criação de gado; cultura cabocla - das populações amazônicas, afeitas à indústria extrativa e cultura gaúcha - de pastoreio nas campinas do Sul. Essa cultura rústica brasileira coexistiu tanto com as fazendas monocultoras quanto com as de criação de gado, constituindo a base da produção do abastecimento para estas empresas e os povoados,

expandindo-se por todo o Brasil à medida que encontrava terras devolutas para reproduzir seu modo de vida. Entretanto, principalmente a partir do século XIX,

« ... a reativação ... da lavoura para exportação do algodão, tabaco, mais tarde, do café e, mais recentemente, do gado e da soja - reincorpora a terra e seus ocupantes ao sistema de fazendas. Deixa ao "caipira", ... nas últimas décadas, quando muito a alternativa de "boia-fria" ou marginal urbano »(RIBEIRO, 1987: 108).

Em outras palavras, as populações alijadas dos núcleos dinâmicos da economia nacional, ao longo de toda a história do Brasil, adotaram o modelo da cultura rústica, refugiando-se nos espaços menos povoados, onde a terra e os recursos naturais ainda eram abundantes, possibilitando sua sobrevivência e a reprodução desse modelo sociocultural de ocupação do espaço e exploração dos recursos naturais, com inúmeros variantes locais determinados pela especificidade ambiental e histórica das comunidades que neles persistem.

(ARRUDA, 1999, p, 82)

No que diz respeito ao meio ambiente, esses camponeses tradicionais são menos danosos quando dependem dos recursos das florestas para sobreviver. No entanto, a maioria provavelmente não tinha, tradicionalmente, conceitos equivalentes ao de *conservação ambiental* que temos hoje, até mesmo porque estavam muito dispersos pela vegetação e era difícil imaginar que a natureza pudesse estar em risco. É difícil acreditar que, em tempos remotos, algum hesitaria em matar uma onça ou uma raposa que ameaçasse os seus animais domésticos. Além disso, a *coivara*, que consiste na derrubada de florestas e queima da vegetação para plantar em seguida, faz parte de várias dessas culturas. É um costume vindo dos indígenas, muitos dos quais eram seminômades; derrubavam e queimavam uma certa parte da vegetação, usavam a biomassa restante como adubo para suas lavouras, e, caso a terra "cansasse" depois de um tempo, partiam em busca de outras terras. As queimadas também ajudavam a espantar animais rumo aos caçadores indígenas (NARLOCH,

2011). Sendo pouco numerosos, a natureza podia se recompor de tal procedimento. Com o crescimento populacional, a repetição de tais práticas em maior escala é que as torna preocupantes, remetendo à necessidade de *educação ambiental* no meio rural.

Entretanto, com a mecanização agrícola e o êxodo rural, a atenção dos ambientalistas transfere-se para o desmatamento realizado para dar lugar às grandes lavouras. A mecanização agrícola no Brasil começa de forma sistemática com as reformas pombalinas de 1772 e a vinda da família real ao Brasil em 1808 (MOLINA, 2014), a partir de quando se investiu na formação dos jovens de famílias de classes mais altas, destinados a liderar os negócios agrícolas mas não tanto a se dedicarem a trabalhos braçais.

É comum que se atribua aos sulistas, especialmente os gaúchos (aqui o termo se refere somente aos naturais do *Rio Grande do Sul*, não ao tipo humano), grande parte da mecanização agrícola no país. Todavia, um dos fatores que intensificou a saída de gaúchos em direção a outras regiões foi justamente a mecanização agrícola em sua própria região (SIMON, 2009), na década de 1950, o que demandava menor número de trabalhadores nas lavouras. De fato, ao sair de sua região, os gaúchos e outros sulistas acabaram por levar a mecanização com que tiveram contato. Também são conhecidos como grandes cultivadores de soja, levando essa cultura a outras regiões do país. Esses “gaúchos” já não são somente os portadores da “cultura gaúcha” apresentada na discussão das “culturas rústicas”, pois muita mudança ocorreu, ainda mais devido à chegada de várias levas de imigrantes europeus, sobretudo alemães e italianos. Alemães são conhecidos líderes em mecanização agrícola: a Alemanha já foi colocada como o país de agricultura mais mecanizada da Europa (FELTRAN-BARBIERI, 2009). Italianos, por sua vez, trouxeram novas culturas e técnicas agrícolas, destacando-se a uva e o vinho.

Por outro lado, é verdade que *um* gaúcho foi muito importante para a mecanização agrícola no Brasil: o presidente *Getúlio Vargas* (MONTEIRO, 2015). *Getúlio Vargas* chegou à presidência pela *Revolução de 1930*, que se opôs à *política do café-com-leite* que alternava, como presidente do Brasil, *paulistas* (o “café” refere-se a São Paulo) e *mineiros* (o “leite” refere-se a Minas Gerais), indicando produtos proeminentes na economia nesses estados. Em 1952, *Getúlio Vargas* lançou o projeto *Plantar Trigo* (MONTEIRO, 2015), cujo objetivo era fazer com que o Brasil passasse a produzir todo o trigo que consome, alavancando a importação de tratores e máquinas agrícolas. Algum tempo depois, o governo decidiria investir também

na produção de tratores no próprio Brasil. “Uma reunião em Piracicaba, no interior de São Paulo, com professores do Brasil inteiro e membros do governo Juscelino Kubitschek, decidiu pela implantação da indústria de tratores agrícolas no Brasil.” (MONTEIRO, 2015) (on-line).

Atualmente, a indústria de máquinas agrícolas brasileira é forte, com destaque para a empresa *Agrale*, fabricante de tratores e outros veículos, fundada em 1962 e sediada no estado do Rio Grande do Sul, na cidade de *Caxias do Sul*. A empresa *Gurgel*, fundada em 1969, também produziu veículos agrícolas até o encerramento da empresa em 1996. A marca *Gurgel* expirou em 2003, tendo sido registrada novamente em 2004 por um empresário não relacionado ao grupo original (GRECO, 2006). A empresa *Troller*, fundada em 1995 no estado do Ceará e hoje propriedade da *Ford*, produz *picapes* destinadas ao transporte no meio rural e terrenos não pavimentados de forma geral. Empresas multinacionais também produzem caminhões no Brasil, como é o caso da americana *Ford* e a alemã *Volkswagen*. Além dos tratores, máquinas agrícolas incluem colhedoras, colheitadeiras, semeadoras, pulverizadoras, enfardadoras etc., além das peças para esses veículos. Marcas fortes na produção dessas máquinas, atuantes no Brasil, incluem *Massey Ferguson*, *New Holland*, *Case*, *Stara*, *John Deere* etc. Ao pesquisar as cidades brasileiras onde há sedes ou fábricas instaladas dessas empresas, percebe-se forte tendência à concentração no *Centro-Sul*,<sup>d</sup> especialmente no estado do Rio Grande do Sul.

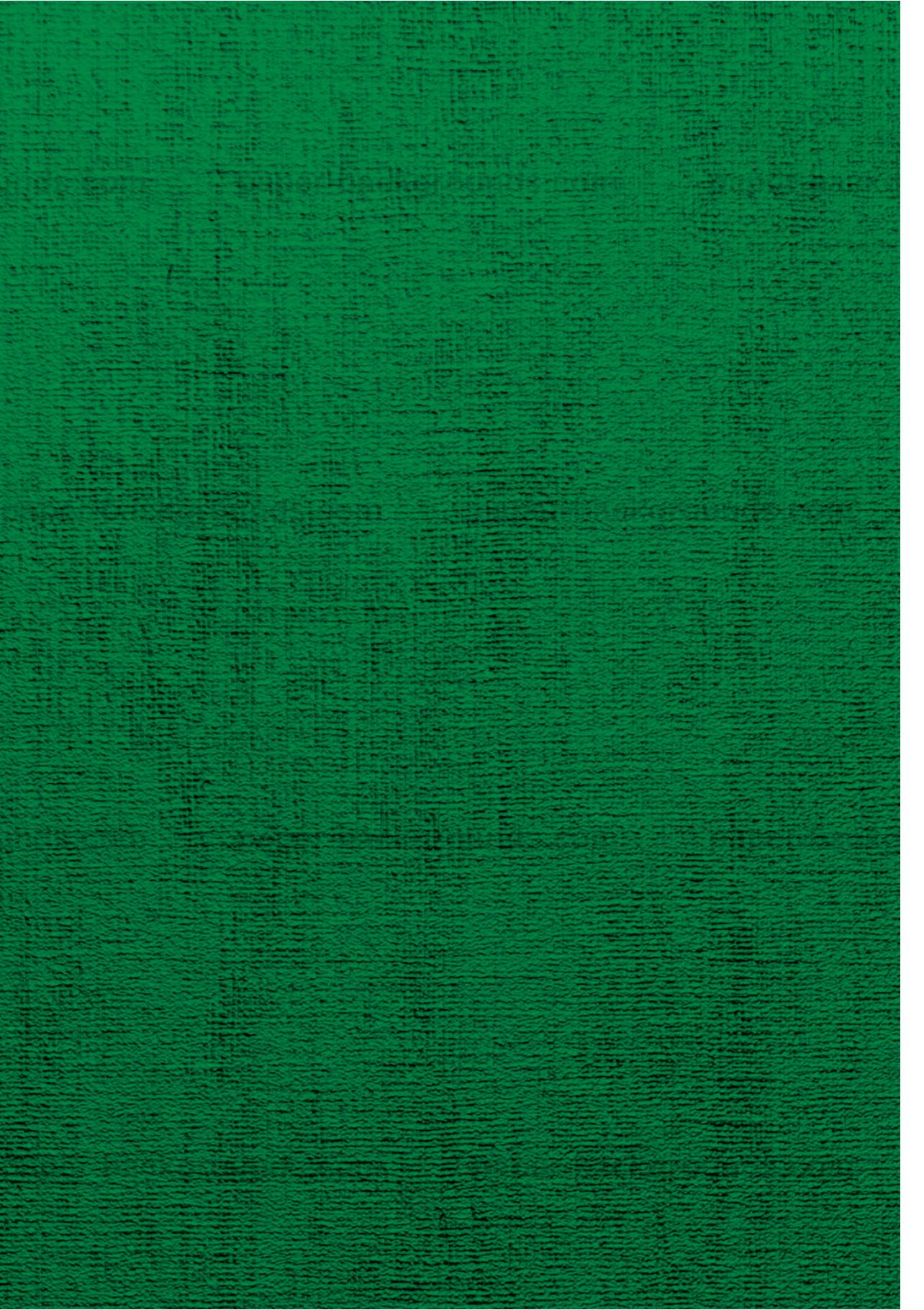
---

<sup>a</sup>Há espécies nativas de feijão em praticamente todos os continentes. Na América, foi provavelmente domesticado pelos nativos do Peru e espalhado pelo continente.

<sup>b</sup>[http://www.cnpa.embrapa.br/produtos/mamona/cadeia\\_produtiva\\_biodiesel.html](http://www.cnpa.embrapa.br/produtos/mamona/cadeia_produtiva_biodiesel.html). Acesso em 5 jul. 2018.

<sup>c</sup><http://www.cidadedesao paulo.com/sp/br/o-que-visitar/roteiros/roteiros-tematicos/roteiro-cafe>. Acesso em 2017.

<sup>d</sup>Geógrafos dividem o Brasil em três *regiões geoeconômicas*: *Amazônia*, *Centro-Sul* e *Nordeste*



## Capítulo 6

# Trabalho e energia

### O EQUIVALENTE MECÂNICO DO CALOR

Em 1849, o físico britânico *James Prescott Joule* publicou um artigo no qual apresentava um conceito fundamental para o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia a partir de então: o *equivalente mecânico do calor*. Por meio de experimentos, Joule quis relacionar o calor, cuja natureza ainda era pouco conhecida, ao poder de movimentar corpos. Descobriu a relação entre calor e *trabalho mecânico* e defendeu que o calor era apenas um tipo de energia, possibilitando as ideias de *transformação* e *conservação* da energia. A unidade de energia do SI é o *joule*, em sua homenagem. Também trabalhou com *Lord Kelvin* para desenvolver a escala absoluta de temperatura (escala *kelvin*).

## 6.1 Trabalho

Nem sempre se consegue mover um objeto na direção e no sentido da força aplicada. Se um caminhoneiro se esquece de puxar o freio de mão do caminhão e ele desce uma ladeira, uma pessoa no meio da rua não conseguirá pará-lo aplicando uma força com os seus braços no sentido contrário a menos que tenha superpoderes. Quando uma força aplicada sobre um objeto não pode movê-lo, diz-se que o trabalho realizado é nulo.

Quando o objeto se move num sentido que faz um ângulo de até  $90^\circ$  com o sentido da força aplicada, diz-se que a força contribui para o movimento do objeto e o trabalho é positivo. Se esse ângulo é maior que  $90^\circ$ , além da força aplicada não estar contribuindo para o movimento do objeto, ela o está “atrapalhando”, e tal movimento está ocorrendo por inércia ou por outras forças.

Todas essas situações são descritas pela grandeza “**trabalho**” ( $\mathcal{W}$ ):

$$\mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \alpha$$

onde  $\vec{F}$  é a força aplicada,  $\vec{d}$  é o deslocamento e  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{F}$  e  $\vec{d}$ .

A unidade de trabalho no SI é o *joule* (J), que é definida por  $1\text{J} = 1\text{N m} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$ .

### Exercício 6.1 TRABALHO SOBRE UMA CANOA

Qual é o trabalho realizado sobre uma canoa pelas seguintes forças:

- estando a canoa inicialmente em repouso,  $1,2 \times 10^2 \text{ N}$  aplicados numa corda amarrada à canoa fazendo-a deslocar-se 1,5 m na orientação puxada;
- estando a canoa inicialmente em movimento,  $2,5 \times 10^2 \text{ N}$  empurrando-a contra a orientação de seu movimento com a intenção de fazê-lo parar, enquanto ele ainda se desloca 0,50 m;
- estando a canoa inicialmente em repouso acostada num cais,  $3,1 \times 10^2 \text{ N}$  a um ângulo de  $30^\circ$  com a borda do cais, fazendo-a deslocar-se 1,0 m ao longo dessa borda.

### Exercício (conceitual) 6.2 FORÇA E TRABALHO

- Quando se muda a direção de uma força  $\vec{F}$ , aplicada para abrir uma porta, de uma direção perpendicular à superfície da porta, para uma direção de  $30^\circ$  relativa à superfície da porta, o trabalho usado para fechar a porta diminui para quanto?
- Naturalmente, é mais fácil fechar a porta puxando-a perpendicularmente à superfície. O que significa, então, que o trabalho diminui ao puxar com a força em outra direção com o mesmo módulo de força?
- Considere que duas forças de mesmo módulo, uma aplicada perpendicularmente e outra aplicada ao longo de outra direção, sejam capazes de fechar a porta. Haverá diferença no tempo gasto para fechá-la? Que força será capaz de fechá-la mais rapidamente?

## 6.2 Energia

Como muitos conceitos físicos, “energia” é difícil de ser definida em palavras. Historicamente, vem do conceito de “força vital” (*vis viva*), e, cientificamente, unifica várias grandezas calculadas de forma distinta em diversas áreas da Física.

De forma simples, mas suficiente para este curso, definamos que **energia é um tipo de grandeza conservada em um sistema isolado**. Em 1918, a física alemã Emmy Nöther publicou um teorema que justifica a conservação da energia pela sua relação com a *simetria temporal*, ou seja, o fato de que as leis da Física não se modificam com o passar do tempo. O teorema de Nöther também relaciona a conservação de outras grandezas, como momento linear e momento angular, com outras simetrias, como a simetria translacional e a simetria rotacional, respetivamente. No entanto, esse teorema é assunto de física avançada e não será estudado neste curso.

### Tipos de energia

Existem vários tipos de energia, e a classificação depende do contexto. Por exemplo, o que se chama *energia eólica* (do vento) num contexto pode ser considerado a *energia cinética* das moléculas do ar em outro; o que se chama *energia química* num contexto pode ser considerado *energia potencial de ligação* em outro; e a *energia térmica* também tem relação com a energia cinética de moléculas em nível microscópico. A classificação depende da área de estudo, do grau de observação (microscópico ou macroscópico), da ordem de grandeza considerada etc. Quando se estuda Mecânica (uma parte da Física), consideram-se principalmente as energias apresentadas nas próximas seções.

### Transformação e conservação da energia

Se há tantos tipos tão diferentes de energia, por que são todas consideradas energia? Por que não se dão nomes distintos a essas grandezas? A resposta é que um tipo de energia pode ser transformada em outra, de modo que a quantidade total se conserva, pelo que podemos concluir que elas são, na verdade, manifestações diferentes de um mesmo princípio.

Quando se leva em conta todos os tipos de energia, tem-se que energia não pode ser gerada ou perdida, apenas transformada.

Quando se fala em geração de energia, fala-se de transformação de um tipo de energia em outro, na verdade. A energia total de um sistema isolado permanece constante. Num sistema não isolado, a variação da energia é igual à energia transferida do sistema para um outro sistema, que não está sendo considerado explicitamente, ou desse outro sistema para o sistema em apreço.

Todos os tipos de energia, em nível mais básico, se apresentam como energia cinética ou como energia potencial. Por exemplo, “energia eólica” é a energia cinética de moléculas de ar movendo-se coerentemente.

É um princípio fundamental da Física que a energia mecânica de um sistema isolado sempre se conserva. Ou seja,

$$E_i = E_f,$$

onde  $E_i$  e  $E_f$  são as energias mecânicas inicial e final. Podemos escrever isso também dessa forma:

$$U_i + K_i = U_f + K_f,$$

onde  $U$  é energia potencial e  $K$  é energia cinética.

Também é importante notar que a variação da energia cinética de uma partícula deve estar relacionada à realização de trabalho sobre a partícula ou pela partícula, sendo este o conteúdo do chamado teorema do trabalho-energia cinética. Em termos matemáticos, esse teorema pode ser escrito na forma

$$\mathcal{W} = \Delta K,$$

em que  $\mathcal{W}$  é o trabalho realizado sobre a partícula ou por ela e  $\Delta K$  é a variação da energia cinética, ou seja,  $\Delta K = K_f - K_i$ .

## Unidades de energia e trabalho

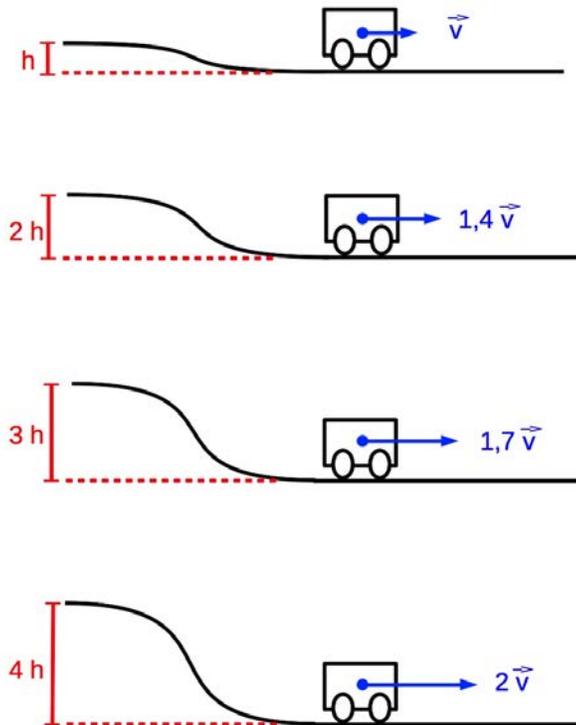
Trabalho e energia possuem as mesmas unidades. No SI, usa-se o joule (J) como unidade de medida da energia.

A *caloria* (cal) é uma unidade originariamente utilizada para medir *calor*, que hoje sabe-se ser *energia térmica transferida*, e foi definida como a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 g de água em 1 °C. Atualmente, usa-se muito a caloria quando se fala de *energia alimentar*, embora frequentemente o que se chama “caloria” nesse contexto é de fato a quilocaloria (*kcal*), mil vezes a caloria. O *quilowatt-hora* (kWh) é uma outra unidade de energia (ou de trabalho), muito conhecida por ser utilizada na medição do consumo de energia de residências.

### Exercício 6.3 DE CALORIA A QUILOWATT-HORA

Expresse a energia de 2000 kcal (duas mil quilocalorias) em joules e em quilowatts-hora.

**Figura 6.1:** Representação da velocidade um carro após descer por rampas de diferentes alturas, sob ação exclusiva da gravidade. A velocidade adquirida pelo carro não cresce na mesma proporção quanto a altura da qual ele desce (mesmo que não haja perda de energia por atrito ou resistência do ar). Isso ocorre porque a energia potencial é proporcional à altura, mas a energia cinética é proporcional ao quadrado da velocidade.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

**Tabela 6.1:** Unidades comuns de energia

Unidade	Símbolo	Equivalência
joule	J	$N \cdot m = kg \cdot m^2 / s^2$
caloria	<i>cal</i>	4,18 J
quilowatt-hora	<i>kWh</i>	$10^3 W \cdot h$

Fonte: elaboração dos autores.

## 6.3 Energia cinética e potencial

### Energia cinética translacional

Energia cinética é a energia associada ao movimento de um corpo e é definida como

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad 6.1$$

onde  $m$  é a massa e  $v$  é a velocidade do objeto (em módulo), considerado uma partícula pontual neste contexto.

#### Exercício 6.4 ENERGIA CINÉTICA VERSUS VELOCIDADE

Calcule a energia cinética de um carro de massa igual a 1000 kg movendo-se a  $20 \frac{km}{h}$ ,  $40 \frac{km}{h}$ ,  $60 \frac{km}{h}$ ,  $80 \frac{km}{h}$ ,  $100 \frac{km}{h}$  e  $120 \frac{km}{h}$ . Esboce um gráfico.

### Energia cinética rotacional

Da mesma maneira que podemos definir a energia cinética translacional de uma partícula (ou corpo extenso, se consideramos toda sua massa como relativa ao seu centro de massa), podemos também definir uma energia cinética para o caso em que o corpo extenso move-se em movimento circular.

Ainda que a definição mais geral seja um tanto complexa para os interesses desta obra, é possível introduzir o tema a partir da noção de rotação de um corpo extenso *ao redor de um eixo*.

Para tanto, podemos, inicialmente, pensar em como deveríamos calcular a energia cinética de uma *partícula* que se move sobre um plano (e.g. plano  $xy$ ), ao redor de um eixo (e.g. eixo  $z$ ). Assim, sua energia cinética continua a ser dada pela equação 6.1, mas o uso de descritores especificamente relacionados ao movimento circular é muito mais instrutivo.

Assim, vamos usar que a velocidade linear  $v$ , nesse caso, pode ser escrita como  $v = \omega r$ , em que  $r$  é o raio do movimento circular. Substituindo-se essa relação na equação 6.1 temos que a energia cinética rotacional da partícula fica dada por

$$K_{rot} = \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \quad 6.2$$

A expressão  $I = mr^2$  é definida como a inércia rotacional da partícula, ou seja, a resistência da partícula à modificação de seu estado de movimento rotacional e a ela é dado o nome de **momento de inércia**. Tal definição se justifica pelo seguinte argumento: na inércia translacional podemos divisar duas fontes qualitativamente diversas – uma *intrínseca* à partícula, derivada de sua massa, e outra *extrínseca* à partícula, derivada de sua velocidade.<sup>1</sup>

Entretanto, ainda que seja interessante a equação 6.2, é no contexto em que temos corpos extensos que a noção de energia rotacional é mais relevante. Nesse caso, podemos sempre pensar em um corpo rígido como sendo constituído de elementos infinitesimais de massa  $dm(r)$ , cada um a certa distância  $r$  do eixo relativamente ao qual se deseja calcular a energia cinética rotacional do corpo. Assim, considerando-se volumes infinitesimais  $dV$  que, somados, constituem todo o volume do corpo extenso, podemos escrever

$$dm(r) = \rho(r)dV,$$

em que  $\rho(r)$  é a *densidade de massa* do corpo.

Como um corpo extenso (e aqui considerado como *rígido*) é a soma de todos esses elementos infinitesimais de massa e, cada um deles, considerado como partícula, tem a mesma velocidade angular, uma vez que é corpo rígido, podemos definir a energia rotacional do corpo como sendo a soma

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \sum dm(r)r^2\omega^2 = \left[ \int \rho(r)r^2dV \right] \omega^2 \quad 6.3$$

em que o momento de inércia  $I$ , agora, é dado simplesmente por

$$I = \int \rho(r)r^2dV, \quad 6.4$$

em que a integral se estende apenas no interior das fronteiras materiais do corpo.

As equações 6.3 e 6.4 são importantes em contextos de aplicação nas ciências agrárias e ambientais pelo fato de se ter, em muitas situações, a conversão de energia cinética rotacional em algum tipo de trabalho.

<sup>1</sup>De fato, a massa é uma qualidade específica da partícula e que a define como objeto individual, enquanto que a velocidade de uma partícula pode ser qualquer uma, sem alterar-lhe a definição como objeto individual – daí podermos dizer que é a mesma partícula, apresentando diferentes velocidades.

De fato, da mesma maneira que podemos definir o trabalho em termos de descritores lineares, como a força e o deslocamento linear, podemos também fazê-lo a partir de descritores relativos ao movimento circular. Nesse caso, definimos o trabalho realizado pelo *torque* como sendo

$$\mathcal{W} = \tau \Delta\theta,$$

em que  $\tau$  é o torque realizado sobre o corpo rígido ou por ele, e  $\Delta\theta$  é a variação do deslocamento angular deste corpo em função do torque.

### Exercício 6.5 MOMENTO DE INÉRCIA

(Necessita cálculo integral.) Considere um corpo na forma de uma barra linear homogênea de comprimento  $L$  (“linear” quer dizer que a barra tem somente uma dimensão a ser considerada e “homogênea” quer dizer que sua densidade não varia com a posição). Calcule o momento de inércia dessa barra linear com relação a uma de suas extremidades. Repita o cálculo para o momento de inércia dessa barra linear com relação ao seu centro de gravidade.

De modo geral, para corpos mais complexos, o momento de inércia é dado por uma tabela ou obtido empiricamente.

## Energia potencial gravitacional

Qualquer energia associada ao poder latente de geração de movimento é denominada *energia potencial*. A energia potencial gravitacional está associada ao poder latente que a gravidade tem de gerar movimento de um corpo em direção ao outro. Um corpo seguro a uma certa altura do solo cairá quando for solto, adquirindo uma certa velocidade. A energia associada a esse potencial de movimento causado pela gravidade é a energia potencial gravitacional, definida como

$$U_g = mgh, \quad 6.5$$

onde  $m$  é a massa,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $h$  é a altura do objeto em relação ao solo ou a outro nível tomado como referência. A aceleração da gravidade na Terra é igual a  $9,8 \text{ m/s}^2$ , variando ligeiramente com a latitude, devido à rotação, e com a distância ao centro da Terra, que varia devido à sua forma irregular.

**Exercício 6.6** OBJETO LARGADO DO ALTO

Se um corpo de 60 kg for solto de uma altura de 5,0 m, com que velocidade chegará ao chão, se pudermos desprezar a resistência do ar?

**Lei de Hooke**

Quando uma mola é esticada e depois solta, ela deve voltar à sua configuração original. Se ela não voltar, diz-se popularmente que foi “relaxada”. Em linguagem científica, diz-se que ela está no *regime elástico* quando retorna ao estado original, e no *regime plástico* quando a deformação não é naturalmente revertida.

O mesmo pode ser dito de uma superfície qualquer. Considere a superfície metálica de um automóvel. Se uma força pouco intensa for aplicada a ela, a superfície voltará ao estado original, mas, se a força tiver intensidade acima de um certo valor, o automóvel ficará “amassado”. Esses também são os regimes elástico e plástico da superfície.

O comprimento pelo qual se deforma uma mola ou uma superfície na direção perpendicular a ela é uma grandeza à qual se dá o nome de **deformação linear**. No regime elástico, a deformação linear é proporcional à intensidade da força aplicada, ou seja,

$$\vec{F} = k\vec{x},$$

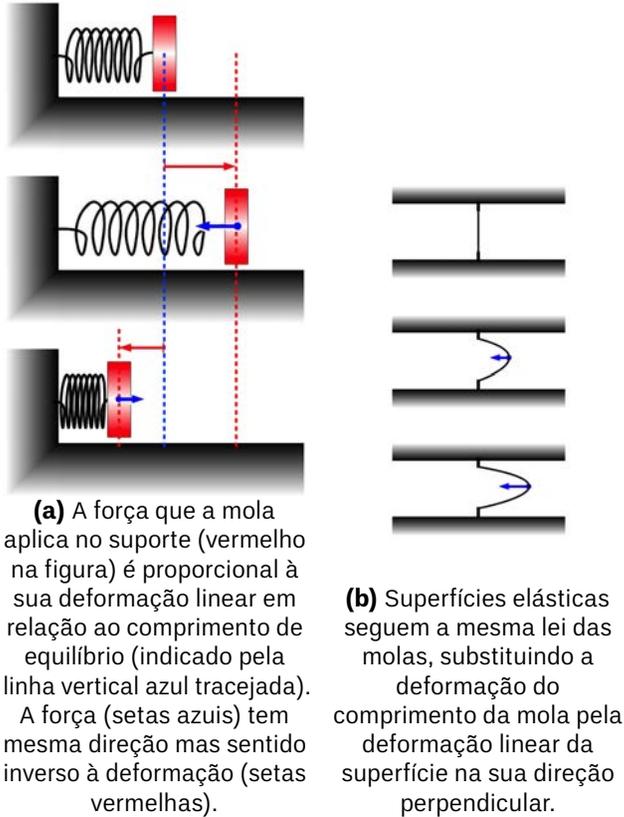
a chamada **Lei de Hooke**, onde  $\vec{F}$  é o vetor força,  $k$  é a constante elástica e  $\vec{x}$  é o vetor deformação linear,

$$\vec{x} = \vec{l} - \vec{l}_0,$$

onde  $\vec{l}$  é o comprimento da mola atual e  $\vec{l}_0$  é o comprimento da mola quando não deformado, ou seja, na posição de equilíbrio.

Quando se trata de uma mola, a constante elástica é também comumente chamada de “constante de mola”. Seu valor é próprio de cada mola (ou superfície) específica, e quanto maior o seu valor, maior é a resistência à deformação e a maior é a tendência a voltar ao estado anterior, assim que a deformação é retirada.

**Figura 6.2:** Ilustração de estruturas elásticas que podem ser descritas pela Lei de Hooke



**(a)** A força que a mola aplica no suporte (vermelho na figura) é proporcional à sua deformação linear em relação ao comprimento de equilíbrio (indicado pela linha vertical azul tracejada). A força (setas azuis) tem mesma direção mas sentido inverso à deformação (setas vermelhas).

**(b)** Superfícies elásticas seguem a mesma lei das molas, substituindo a deformação do comprimento da mola pela deformação linear da superfície na sua direção perpendicular.

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

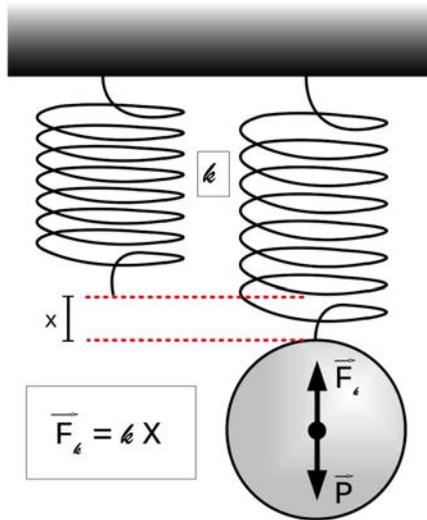
## Energia potencial elástica

No regime elástico, a energia associada à deformação de uma mola ou superfície é

$$U_k = \frac{1}{2} k x^2, \quad 6.6$$

onde  $k$  é a constante elástica e  $x$  é a deformação linear (em módulo).

**Figura 6.3:** Ilustração de uma mola sustentando um peso  
 Uma mola pode ser usada como uma balança. Suspende-se um objeto com a mola, de modo que o peso se equilibre com a força elástica dada pela *Lei de Hooke*.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

**Exercício 6.7** OBJETO LANÇADO SOBRE MOLA

Um objeto de  $4,0\text{ kg}$  é lançado com velocidade de  $10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  na direção de uma mola deitada horizontalmente, fazendo-a comprimir. Se essa mola tem uma constante elástica de  $37 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ , em quantos centímetros a mola se contrairá se toda a energia cinética do objeto for transformada em energia potencial elástica da mola?

## 6.4 Teorema trabalho-energia

Define-se como **energia mecânica** a soma das energias cinética e potencial, o que significa que ela se associa tanto a movimento efetivo quanto a potencial de movimento. Pode-se expressá-la da seguinte forma:

$$E = K + U,$$

onde  $K$  é a energia cinética e  $U$  é a energia potencial. O valor de  $U$  é a soma de todas as energias potenciais consideradas no problema, como, por exemplo, energia potencial gravitacional, energia potencial elástica e energia potencial elétrica.

O **teorema trabalho-energia** estabelece que o trabalho total realizado sobre um corpo num determinado período é igual à sua variação de energia mecânica. Isso é expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\mathcal{W} = \Delta E,$$

onde  $\mathcal{W}$  é o trabalho total e  $\Delta E$  é a variação da energia mecânica.

### Exercício 6.8 DISCO DE HÓQUEI

Se um jogador de hóquei imprimir uma força de 50 N a um disco de massa 100 g ao longo de um metro e, por alguma restrição ao movimento, o disco se mover de modo que o seu deslocamento forme um ângulo  $\alpha$  com essa força, qual será a velocidade que o disco adquirirá, se estava inicialmente em repouso? Desconsidere atrito e resistência do ar.

## Forças conservativas e dissipativas

São consideradas *conservativas* as forças que não alteram a energia mecânica de um sistema. Um exemplo de força conservativa é a *força da gravidade*, que apenas transforma energia potencial gravitacional em energia cinética. Para cada tipo de energia potencial, existe uma força conservativa correspondente.

Por outro lado, forças *dissipativas* são aquelas que transformam a energia mecânica de um sistema em outros tipos de energia. A resistência do ar, a força de atrito e a força de viscosidade são exemplos de forças dissipativas. Essas forças são assim chamadas porque dissipam energia mecânica, ou seja, faz com que ela seja perdida de maneira irreversível.

Se uma bola é solta de uma certa altura e colide elasticamente com o chão, ela volta à mesma altura. Nesse processo, sua energia potencial gravitacional foi transformada em energia cinética até o momento da colisão e, depois dela, a energia cinética foi transformada em energia potencial gravitacional novamente.

Durante a colisão elástica, as forças atuantes na bola também são conservativas: são forças elásticas, associadas à energia potencial elástica. Toda a energia cinética da bola é transformada em energia potencial elástica e depois em energia cinética novamente, quando a bola volta no sentido oposto. Essa energia potencial elástica é armazenada na superfície da bola que se deforma e depois volta à forma original.

Como o solo também pode ser deformável, energia potencial também pode ser armazenado nele. Por outro lado, energia também pode ser dissipada nela, através de vibrações ou movimentos aleatórios gerados em seus átomos, respectivamente relacionados a ondas sonoras se propagando em solo e ao aumento da temperatura. Além disso, energia pode ser dissipada também no ar que circunda a colisão pelos mesmos fenômenos. Se houver quaisquer forças dissipativas atuando numa colisão, ela não poderá ser perfeitamente elástica, sendo então considerada uma *colisão inelástica*.

## 6.5 Potência

É um fato conhecido pela maioria das pessoas que o consumo de energia de um aparelho elétrico está relacionada à quantidade de *watts* dele. Essa quantidade medida em watts é a *potência*, que mede a quantidade de energia consumida por unidade de tempo. De forma geral, **potência** é a quantidade de energia transformada de um tipo a outro dividida pelo tempo gasto nessa transformação:

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\mathcal{W}}{\Delta t}. \quad 6.7$$

Naturalmente, não se pode dizer o quanto uma lâmpada gastará de energia ao fabricá-la porque isso dependerá da intensidade com que ela será utilizada. Tudo o que se pode medir é a sua potência. O watt é uma unidade do SI cujo símbolo é W e que equivale a um joule por segundo, ou seja,  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ .<sup>2</sup>

Devido a essa primazia que a potência de um aparelho eletrodoméstico tem sobre sua energia gasta, a energia mensal consumida numa residência é geralmente medida em quilowatts-hora (*kWh*) em vez de joules. Um quilowatt-hora é a energia que um aparelho de potência igual a 1 W gasta em uma hora, ou seja,  $1 \text{ kWh} = (1 \text{ kW}) \times (1 \text{ h}) = (1000 \text{ W}) \times (1 \text{ h})$ .

<sup>2</sup>Geralmente o símbolo da unidade de medida “watt” é o mesmo da grandeza física “trabalho”. Neste livro, eles são diferenciados pelo estilo do carácter: W para watt e  $\mathcal{W}$  para trabalho.

## 6.6 Conversão de energia no campo: biodigestores e rodas d'água

A conversão de energia é, talvez, um dos tópicos mais importantes da agricultura. De modo geral, estamos sempre buscando usar energia de uma fonte (e, portanto, de um tipo específico), em alguma ação que necessita desta energia, mas de uma forma modificada para um outro tipo. Dois exemplos de situações usuais na agricultura são os *biodigestores* e as *rodas d'água*.

O **biodigestor anaeróbico** é usado para o processamento de matéria orgânica, como fezes e urina, para gerar energia. Funciona como um reator químico com reações químicas produzidas por bactérias e *archaeas* que digerem matéria orgânica em ausência de oxigênio (anaeróbicas) (Cf. figura 6.4).

O digestor anaeróbico produz tanto biogás, quanto fertilizantes superiores aos fertilizantes químicos.

Os biodigestores ajudam também no saneamento básico de uma comunidade; evitam a poluição do meio ambiente com os dejetos orgânicos; reduzem o espaço utilizado para o tratamento dos dejetos animais; eliminam os maus odores dos dejetos animais e, com isso, reduzem significativamente as moscas. Além disso é um equipamento para reciclagem de dejetos é fácil de construir.

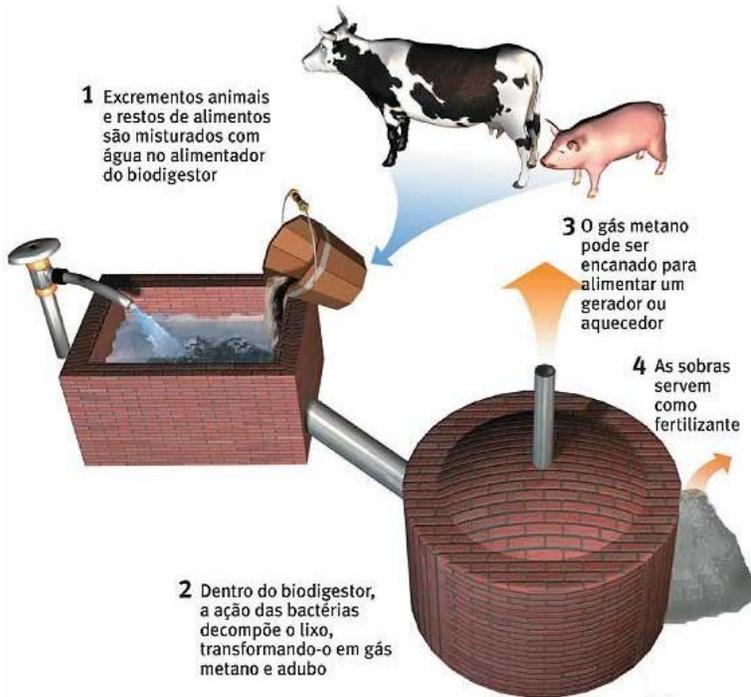
Um metro cúbico ( $1 m^3$ ) de biogás equivale energeticamente a:

- 1,5  $m^3$  de gás de cozinha;
- 0,52 a 0,6 litro de gasolina;
- 0,9 litro de álcool;
- 6,4  $KWh$  de eletricidade;
- 2,7  $kg$  de lenha (madeira queimada).

Para que ocorra um correto funcionamento do biodigestor, como ocorre com todos os sistemas que contêm vida, são necessárias diversos cuidados, como por exemplo a manutenção de uma faixa de temperatura compatível com as bactérias que promovem as reações químicas, humidade interna etc.

As **rodas d'água** são muito utilizadas para conversão da energia potencial gravitacional das águas de um rio em energia elétrica (Cf. figura 6.5). De modo geral, as águas de um rio, descendo de um lugar mais alto a um mais baixo, passam por uma roda d'água que é, assim, girada, de modo a acionar um gerador elétrico.

**Figura 6.4:** Ilustração de uma realização possível de um biodigestor



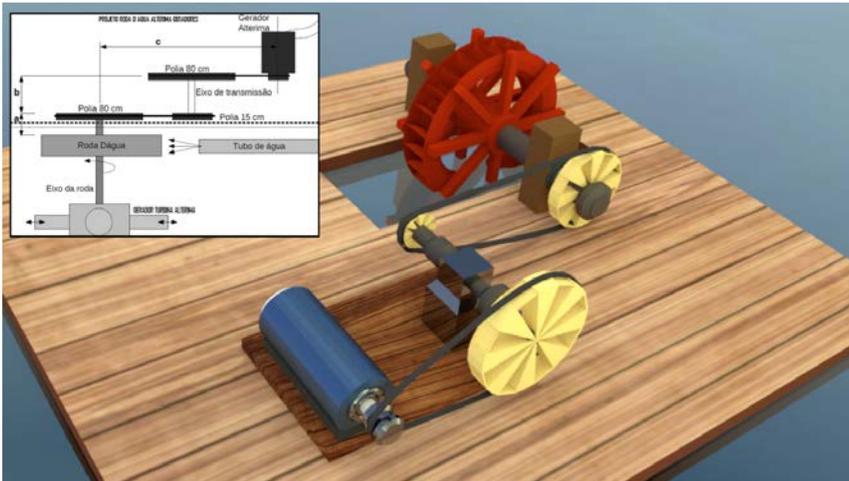
Fonte: Wikimedia Commons (2007a).

### Exercício 6.9 RODA D'ÁGUA

Considerando-se o projeto de roda d'água apresentado na figura 6.5, em que são especificadas as dimensões das polias, calcule a rotação do gerador para uma rotação da roda d'água igual a: 10, 15, 20, 25 e 30 rpm. Considere o raio da polia ligada ao gerador igual a 8 cm.

Com base nas análises feitas em capítulo anterior sobre polias e correias, você seria capaz de estabelecer uma velocidade máxima da roda d'água para que não houvesse deslizamento da correia? Essa também é uma variável importante no dimensionamento do sistema.

**Figura 6.5:** Ilustração de uma miniusina que gera energia elétrica a partir do movimento de uma roda d'água  
O projeto de montagem é mostrado na inserção.



Fonte: criação de Tiago de Sousa Araujo Cassiano e Henrique Alves de Lima (CASSIANO, 2018), com edições e supervisão de Leonardo Luiz e Castro, a partir de demanda de Olavo Leopoldino da Silva Filho, com base em conteúdo da empresa Alterima (ALTERIMA, 2018). No momento da criação, Tiago Cassiano e Henrique Lima eram alunos bolsistas da Fundação Universidade de Brasília no projeto Simulação de fluidos em programa Blender, coordenado por Leonardo Luiz e Castro, como parte do programa Aprendizagem para o 3º Milênio. O projeto da miniusina inserido na figura é da empresa Alterima (ALTERIMA, 2018).

Os exemplos anteriores apresentam duas possibilidades de conversão de energia: da energia advinda de transformações produzidas por reações bioquímicas gerando gás (que, então, será usado para tarefas), e da energia advinda do movimento das águas. Com relação a esse último exemplo, é interessante assinalar que diversas outras soluções, aparentemente diversas, são, de fato, baseadas nos mesmos princípios.

Assim, por exemplo, o uso da energia eólica utiliza as mesmas noções e estratégias da roda d'água, assim como as turbinas em uma hidrelétrica.

Esse é um ensinamento importante: a Física fornece um conjunto de princípios fundamentais que, então, podem ser adaptados para um sem número de concretizações relativas a situações particulares.

## 6.7 Exercícios adicionais sobre trabalho e energia

### Exercício 6.10 ENERGIA GASTA POR UMA LÂMPADA

Se uma lâmpada de 40 W ficar ligada durante 8 horas por dia durante 33 dias, qual será a energia total gasta, em quilowatt-horas?

### Exercício 6.11 DE QUILOWATT-HORA PARA JOULE

Escreva o resultado do exercício anterior no SI.

**Problema 6.1.** CONTA DE LUZ Por que, na conta de energia elétrica de uma residência, o total de energia consumida no mês é mostrado em quilowatts-hora em vez de joules?

### Problema 6.2. PULA-PULA

Quando uma criança está sobre uma cama elástica e, então, com um movimento gerado por reações em seus músculos, deforma a superfície elástica sob seus pés e sobe até uma altura de meio metro, qual das sequências abaixo expressa transformações de energia envolvidas nesse processo até o momento descrito, na sequência temporal correta?

- a) térmica → sonora → energia  $q_i$ .
- b) química → gravitacional → cinética → elástica.
- c) gravitacional → elástica → gravitacional → química.
- d) química → cinética → elástica → cinética → gravitacional.
- e) química → cinética → gravitacional → térmica → elétrica.

### Problema 6.3. ACIDENTE COM TRATOR NO GUINDASTE

Um trator Agrale M 93 tem 885 kg de massa. Considere que, durante o transporte de um trator desses por meio de guindaste, ele seja levantado a uma altura de 10 m em relação ao solo. Em relação a essa questão, e considerando a aceleração da gravidade como 10 m/s<sup>2</sup>, responda aos itens abaixo:

- (a) Qual é a energia potencial gravitacional desse trator em relação ao solo, depois de suspenso pelo guindaste?

- (b) Se o trator for acidentalmente solto dessa altura, com que energia cinética chegará ao solo? Desconsidere a resistência do ar.
- (c) Que velocidade ele terá imediatamente antes de se chocar com o solo?

**Problema 6.4.** A MOLA SAI DO REGIME ELÁSTICO?

Uma certa mola, de  $1\text{ m}$  de comprimento, é fabricada para que suporte uma deformação máxima de  $20\text{ cm}$ , sem que saia do regime elástico. Quando se suspende um objeto de  $10\text{ kg}$  por essa mola, a sua deformação é de apenas  $7\text{ cm}$ . A respeito dessa situação, e considerando a aceleração da gravidade como  $10\text{ m/s}^2$ , responda aos itens abaixo:

- (a) Qual é a constante de mola dessa mola?
- (b) Se um objeto de  $20\text{ kg}$  for suspenso por essa mola, ela sairá do regime elástico?
- (c) Se um objeto de  $30\text{ kg}$  for suspenso por essa mola, ela sairá do regime elástico?
- (d) Se essa mola estiver em posição horizontal e um objeto de  $10\text{ kg}$  for atirado com velocidade de  $13\text{ m/s}^2$  em direção a ela, ela sairá do regime elástico?
- (e) Se essa mola estiver em posição vertical e um objeto de  $10\text{ kg}$  for largado de uma altura de  $3\text{ m}$  acima dela, a mola sairá do regime elástico quando o objeto cair sobre ela?

## 6.8 Fontes renováveis de energia

Uma das principais fontes de energia é o *petróleo*, que atualmente serve de combustível para a maioria dos veículos motorizados. O petróleo é um *combustível fóssil* porque é encontrado no subsolo. A raiz da palavra “fóssil” está relacionada com coisas enterradas (compare com “fossa”). Crê-se que o petróleo foi formado por restos de animais e vegetais mortos depositados no fundo de lagos e mares durante milhares de anos, posteriormente enterrados por processos naturais.

O petróleo é extraído em um tempo muito menor do que o necessário para sua formação natural, por isso é considerado uma fonte *não renovável* de energia. Uma fonte renovável de energia é aquela que é facilmente produzida pela natureza para repor o que dela extraímos. Exemplos de fontes renováveis são os *ventos*, as *marés* e a *luz solar*. Não existe razão para pensarmos que essas

fontes se esgotarão de forma significativamente mais rápida ao extrairmos sua energia. A rigor, as pás de uma *usina eólica* retiram energia dos ventos e, de fato, diminui-se a intensidade deles, mas esse efeito é desprezível em relação à energia contida na massa total de ar que passa. A situação das marés, cujo movimento também vem sendo utilizado para geração de energia elétrica, é análoga. A luz solar é considerada ainda mais “renovável” porque ela incide todos os dias na superfície, independentemente de ser absorvida por um placa para geração de energia elétrica ou não. É verdade que se espera que o Sol “morra” em alguns bilhões de anos, mas, como a maior parte da energia da Terra provém do Sol, a maioria das outras fontes de energia da Terra acabarão também quando isso ocorrer.

Outra fonte de energia renovável é a *biomassa*. As folhas e galhos que caem das árvores de uma vegetação podem ser recolhidas e queimadas para gerar calor, que pode ser transformado em energia elétrica em seguida. A biomassa de praticamente todo o Brasil poderia ser utilizada para esse fim, mas a *Amazônia* destaca-se como a região de maior potencial energético em biomassa. O caso da biomassa é mais complexo que o das outras fontes renováveis porque os restos de vegetação podem ter papel nos ciclos biológicos e na formação do solo do ecossistema. Estudos de impacto ambiental são fundamentais nesse caso.

## 6.9 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 6.1

- (a)  $+1,8 \times 10^2 \text{ J}$
- (b)  $-1,3 \times 10^2 \text{ J}$
- (c)  $+1,6 \times 10^2 \text{ J}$

### Solução 6.2

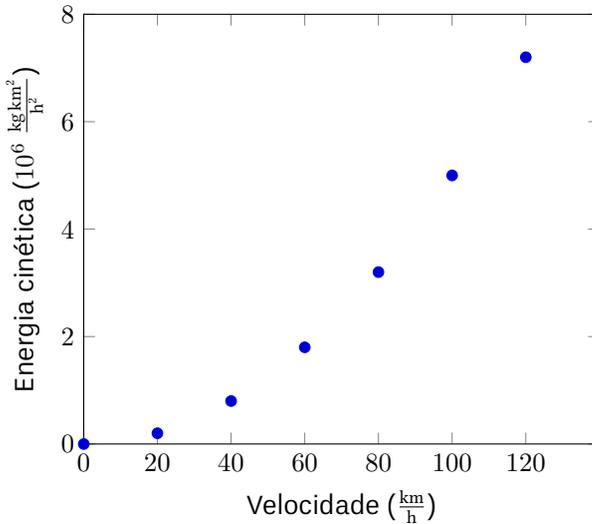
- (a) O trabalho cai para a metade.
- (b) Significa que a força contribuirá menos para o movimento. Se houver forças que atrapalhem o movimento, como forças de atrito nas dobradiças, talvez a força nem mesmo consiga mover a porta nessa situação.
- (c) O trabalho menor da força aplicada a um ângulo de  $30^\circ$  com a superfície da porta, em comparação a  $90^\circ$ , levará mais tempo para fechá-la e ela adquirirá menor velocidade ao final do trajeto. De modo geral, trabalho maior causa mais velocidade em menos tempo.

**Solução 6.3**

$$\begin{aligned}
 2000 \text{ kcal} &= 2000 \cdot 1 \times 10^3 \text{ cal} = 2000 \cdot 1 \times 10^3 \cdot 4,18 \text{ J} \\
 &= 8,36 \times 10^6 \text{ J} = 8,36 \times 10^6 \frac{\text{J s}}{\text{s}} = 8,36 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{s}} \\
 &= 8,36 \times 10^6 \text{ W s} = 8,36 \times 10^6 \text{ W} \frac{\text{h}}{3600} = 2,32 \text{ kW h}
 \end{aligned}$$

**Solução 6.4**

Abaixo, o gráfico sem conversão ao SI. Refaça-o com a energia em joules.

**Solução 6.5**

Para o momento de inércia da barra homogênea de comprimento  $L$  com relação a uma de suas extremidades, devemos calcular a integral

$$\int_0^L \rho r^2 dr = \frac{1}{3} \rho L^3.$$

Se desejamos calcular o momento de inércia com relação ao seu centro de gravidade, então devemos calcular a integral (note a mudança nos intervalos de integração)

$$\int_{-L/2}^{L/2} \rho r^2 dr = \frac{1}{12} \rho L^3.$$

**Solução 6.6**

Como toda a energia potencial será transformada em energia cinética, basta igualar a equação 6.1 à equação 6.5 e isolar a velocidade:

$$\begin{aligned} K &= U_g \\ \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 &= mgh \\ \rightarrow v &= \sqrt{2gh} \\ \rightarrow v &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,0 \times 10^1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**Solução 6.7**

Como toda a energia cinética será transformada em energia potencial elástica, basta igualar a equação 6.1 à equação 6.6 e isolar a deformação linear:

$$\begin{aligned} K &= U_k \\ \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\ \rightarrow kx^2 &= mv^2 \\ \rightarrow x &= \sqrt{\frac{m}{k}}v \\ &= \sqrt{\frac{4,0 \text{ kg}}{3,7 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\ &= \sqrt{1,1 \times 10^{-3} \text{ s}^2} 1,0 \times 10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 3,3 \times 10^{-2} \text{ s} 1,0 \times 10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 3,3 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,33 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Solução 6.8**

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \Delta E \\ \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 &= \mathcal{W} \\ \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 &= Fd \cos(\alpha) \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{2}{m}Fd \cos(\alpha)} \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{2}{1,00 \times 10^{-1} \text{ kg}} \cdot 50 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} \cdot \cos(\alpha)} \\ \rightarrow v &= \sqrt{\frac{2}{1,00 \times 10^{-1} \text{ kg}} \cdot 50 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} \cdot \cos(\alpha)} \\ \rightarrow v &= \sqrt{1 \times 10^3 \cos(\alpha)} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

**Solução 6.9**

A rotação de  $\omega$  rpm da roda d'água é totalmente transmitida à primeira polia, de raio igual a 80 cm. Assim, a primeira polia gira com velocidade angular igual a  $\omega$  rpm também, o que fornece, para a velocidade linear em seu perímetro, um valor de  $(2 \times \pi \times 80) \times \omega = 2\pi \times 80\omega$  cm/min. A segunda polia, que se encontra ligada à primeira por uma correia, apresentará a mesma *velocidade linear*, mas diferente velocidade angular; com uma velocidade linear igual a  $2\pi \times 80\omega$  cm/min, sua velocidade angular será  $2\pi 80\omega \div 15$  rad/min e esta velocidade angular será totalmente transmitida para a terceira polia, também de raio igual a 80 cm. A velocidade linear na extremidade da terceira polia será, portanto, igual a  $2\pi 80 \times 80 \times \omega \div 15$  cm/min. Essa velocidade linear será transmitida, via correia, ao gerador, que passará a girar com a mesma velocidade linear. Se o raio da polia do gerador for igual a 8cm, o eixo do gerador será girado com uma velocidade angular igual a

$$\frac{2\pi 6.400\omega}{2\pi \times 15 \times 8} = \frac{6400\omega}{120} \text{ rpm}$$

Assim, se a velocidade angular da roda d'água for 30 rpm, então teremos uma velocidade de giro do eixo do gerador igual a 1600 rpm. Calcule os outros valores e compare com os resultados apresentados no site <http://www.alterima.com.br/index.asp?InCdSecao=25> (acesso em 8 out. 2018).

**Solução 6.10**

Pela equação 6.7,  $\Delta E = \mathcal{P} \cdot \Delta t = 40 \text{ W} \cdot 33 \text{ d}$   
 $= 40 \text{ W} \cdot 33 \cdot 24 \text{ h} = 31.680 \text{ Wh} = 31,680 \text{ kWh}$ .

**Solução 6.11**

$31,680 \text{ kWh} = 31,680 \text{ kW} \cdot 3600 \text{ s} = 31,680 \times 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 31,680 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} =$   
 $1,140 \times 10^5 \text{ J}$

## Texto complementar 4

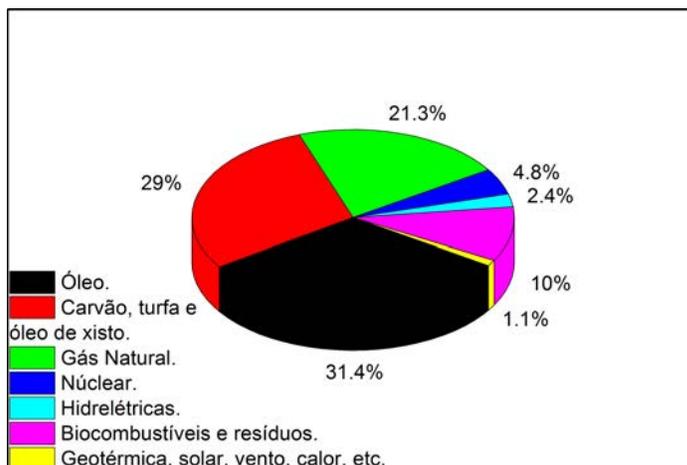
### A ENERGIA ELÉTRICA PROVENIENTE DE CÉLULAS SOLARES

**Jorlandio Francisco Felix**

*Núcleo de Física Aplicada  
Universidade de Brasília*

A maior parte da energia gerada atualmente é produzida utilizando combustíveis fósseis ocasionando, portanto, a emissão de toneladas de dióxido de carbono. Isso porque a infraestrutura de produção de energia no mundo depende fortemente de combustíveis fósseis como petróleo, carvão e gás, como mostra a Figura 6.6. Além disso, cerca de 70% da eletricidade no planeta é gerada usando essa classe de combustível, cuja principal fonte é o carvão. É importante ressaltar que, no ano de 2009, 1,3 bilhão de pessoas não tinham acesso à energia elétrica. Como se sabe, a energia elétrica está diretamente relacionada à qualidade de vida das pessoas. A energia solar, uma fonte de energia renovável, que pode ser convertida em energia elétrica utilizando dispositivos fotovoltaicos, é uma forte candidata para levar energia a essas pessoas.

**Figura 6.6:** Consumo de energia primária no mundo por fonte no ano de 2012.



Fonte: gentilmente cedida por Jorlandio Felix.

O sol é a fonte de energia mais abundante da terra, além disso, combustíveis como vento, fóssil, hidro e a biomassa têm a sua origem na luz solar. Estima-se que a taxa de energia solar incidente sobre a superfície da terra é de 120 petawatts (1 petawatt = 10<sup>15</sup> watts). Isso significa que, em um dia, a radiação solar pode satisfazer a demanda mundial durante mais de duas décadas.

A energia elétrica proveniente de células solares vai desempenhar um papel cada vez mais relevante na produção de energia elétrica nos próximos anos. A sua produção e disseminação, atualmente, cresce em ritmo acelerado, estimulada por melhores preços e por políticas de incentivo, tendo ultrapassado o marco de 1 GW anual de potência instalada. No entanto, a viabilidade de sua difusão em larga escala no mercado da energia depende da evolução das tecnologias, com o objetivo de reduzir o seu custo e aumentar a sua eficiência.

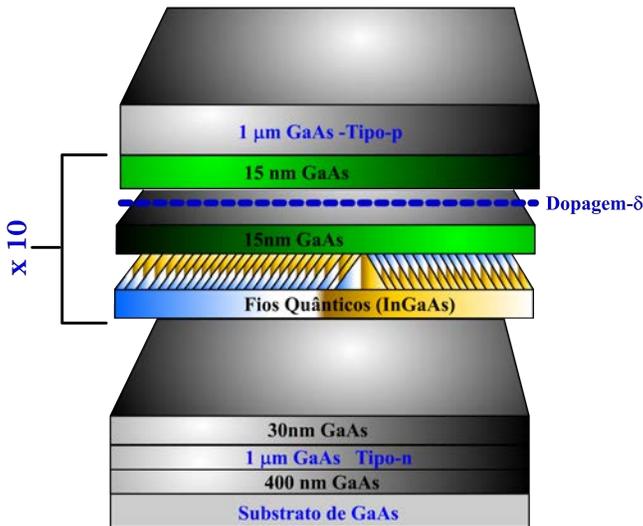
Embora o preço do kWh tenha diminuído consideravelmente nos últimos anos, a energia fotovoltaica ainda é dispendiosa quando comparada com as fontes de energias convencionais. Dessa forma, para a redução dos custos de produção, é importante o desenvolvimento de conceitos inovadores e novas geometrias das estruturas de células solares, bem como a combinação de diferentes materiais, com aplicação de diferentes técnicas de processamento. Nos últimos anos, materiais nanoestruturados têm sido investigados e apontados como uma solução para o aumento da eficiência das células solares, por permitirem o uso de fenômenos quânticos que atendem a conceitos diferentes em estruturas de células solares quando comparadas às junções  $p-n$  convencionais (ver esquemático da Figura 6.7(a)). Uma junção  $p-n$  é composta de duas camadas, uma com dopagem do tipo- $p$  e a outra com dopagem do tipo- $n$ . Na camada do tipo- $n$ , os portadores de carga majoritários são elétrons (cargas negativas); já na camada do tipo- $p$ , os portadores de carga majoritários são os lacunas (cargas positivas).

A máxima eficiência termodinâmica para conversão da irradiação solar não concentrada em energia elétrica foi estimada por Shockley e Queisser. Para isso, eles consideraram um caso de uma junção  $p-n$  ideal e a máxima eficiência encontrada foi de 30%. Atualmente, já existem sistemas que excedem este limite e estão sob intensa investigação. Nesses sistemas incluem-se células “tandem” ou células de multijunção, que são compostas de várias células empilhadas, células solares por transporte quente, células termofotovoltaicas, células solares de banda intermediária (IBSC) etc. Teoricamente, sistemas do tipo IBSC (ver Fig. 6.7(b)) podem aumentar a eficiência de células solares em até 63,1% sob luz solar máxima concentrada. Essa nova geometria é obtida pela técnica chamada

de Crescimento Epitaxial por Feixe Molecular (MBE, do inglês *molecular beam epitaxy*). Portanto, altos valores de eficiências são alcançadas com aplicação de materiais nanoestruturados, projetos de dispositivos e otimização das técnicas de crescimentos.

Devido ao surgimento desses vários sistemas, tem sido comum dividir as estruturas de células solares em três gerações. A primeira refere-se às células solares fabricadas como, por exemplo, silício cristalino. A segunda geração refere-se a células solares fabricadas com uso de filmes finos. A terceira geração refere-se a todas as novas abordagens para a produção de dispositivos com diferentes fenômenos quânticos, visando obter o efeito fotovoltaico com melhor eficiência, de preferência a baixo custo. Nesse sentido, vários grupos de pesquisa espalhados pelo mundo vêm empenhando esforços na busca células solares mais eficientes usando essas tecnologias. Esses dispositivos podem ser uma das alternativas para diminuição da dependência de energia proveniente de combustíveis fósseis e, portanto, minimizando os fenômenos nocivos à natureza causados pelo efeito estufa.

**Figura 6.7:** (a) Esquemático de uma célula solar de silício convencional; (b) células Solares de banda intermediária



Fonte: gentilmente cedida por Jorlandio Felix.

# Capítulo 7

## Mecânica dos fluidos

Um fluido é uma substância que tem a propriedade de fluir, de correr como um líquido. De forma mais comum, esse conceito se aplica a líquidos e gases (HALLIDAY, 1996a), que notavelmente adaptam sua forma espontaneamente a recipientes, ao contrário de sólidos. Uma diferença notável é que, dentro de um recipiente, como um tubo, os gases tendem a ocupar todo o espaço disponível enquanto os líquidos estão mais sujeitos à ação da gravidade, preenchendo preferencialmente a parte inferior.

A figura 7.1 mostra um esquema comum para definir sólidos, líquidos e gases. Note que gases e líquidos são fluidos e têm forma ajustável, mas apresentam diferença quanto à compressibilidade: líquidos possuem compressibilidade pequena, de modo que geralmente podem ser considerados incompressíveis, enquanto gases têm alta compressibilidade. Por completude, apresentamos o conceito de *matéria condensada*, cujos elementos (átomos e moléculas) estão fortemente ligados entre si, incluindo líquidos e sólidos, entre outros tipos de matéria mais incomuns.

**Quadro 7.1:** Caracterização dos estados da matéria

Estado	Volume	Forma	É fluido?	É matéria condensada?	É compressível?
Gasoso	ajustável	ajustável	sim	não	muito
Líquido	fixo	ajustável	sim	sim	pouco
Sólido	fixo	fixa	não	sim	não

Fonte: elaboração dos autores.

**Exercício 7.1** ÁGUA É FLUIDO OU MATÉRIA CONDENSADA?

Que conceitos completam as lacunas do texto seguinte?

\_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_ são considerados fluidos por terem \_\_\_\_\_ variável e, portanto, a capacidade de fluir. \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_ são tipos da chamada “matéria \_\_\_\_\_” e têm volume constante na maioria das situações devido a maior ligação entre as moléculas.

- (a) líquidos - gases - forma - líquidos - sólidos - condensada
- (b) líquidos - gases - forma - gases - sólidos - escura
- (c) líquidos - gases - volume - líquidos - sólidos - condensada
- (d) sólidos - gases - forma - gases - sólidos - condensada

## 7.1 Hidrostática

Assim como há, no campo da Mecânica, uma subdivisão voltada exclusivamente para o estudo dos corpos em equilíbrio, há, no âmbito da Teoria dos Fluidos, um campo exclusivamente voltado para o estudo dos fluidos em equilíbrio.

Note que, em Mecânica, um corpo em equilíbrio pode estar parado ou se movendo em linha reta com velocidade constante, uma vez que basta termos, para que haja equilíbrio, uma soma total das forças igual a zero, assim como torque total nulo.

Na Hidrostática, de modo análogo, interessa estudar fluidos em situações chamadas *estática* e *estacionária*. Na primeira, os fluidos estão parados (provavelmente pela existência de barreiras, paredes etc., que lhes servem de obstáculos). Na segunda, os fluidos estão efetivamente se movendo, mas em qualquer instante que se olhe, o fluido apresentará exatamente a mesma configuração espacotemporal.

O campo da Hidrostática é construído tendo por fundamento quatro conceitos cruciais: o conceito de *densidade*, o conceito de *volume*, o conceito de *pressão* e o conceito de *aceleração da gravidade*. De todos estes, aquele que ainda não vimos e que, portanto, exige esclarecimentos é o conceito de *pressão*.

Intuitivamente, a *pressão* é definida como o efeito de uma força aplicada sobre uma superfície. Mais precisamente, se uma pequena superfície plana de área  $A$  sofre uma força  $\vec{f}$ , toma-se a projeção  $\vec{f}_\perp$  dessa força no eixo perpendicular a essa superfície, para calcular a pressão  $p$  como

$$p = \frac{f_\perp}{A}.$$

Essa equação pode ser definida por grandezas vetoriais,

$$p = \frac{\vec{f} \cdot \hat{A}}{A},$$

onde  $\hat{A}$  é o vetor unitário de mesma direção e sentido do vetor área  $\vec{A}$ , que tem a própria área  $A$  como módulo, direção perpendicular à superfície e sentido para o exterior. Ou seja,  $\vec{A} = A\hat{n}$ , onde  $\hat{n}$  é o chamado **vetor unitário normal**.

Cabe à Hidrostática estabelecer relações entre o descritor *pressão* e os demais descritores relevantes do campo, como a densidade, o volume etc. Isso é feito a partir de alguns princípios e leis básicas.<sup>1</sup> Mais usualmente, a Hidrostática estuda a interação dos fluidos com os elementos que lhes servem de fronteira (como paredes).

## Princípio de Pascal

O princípio de Pascal estabelece que **uma alteração na pressão de um fluido contínuo em equilíbrio se distribui igualmente por todo o seu volume e pelas paredes do recipiente que o contém**. Pode-se compreender esse princípio intuitivamente ao se notar que, ao se encher um balão, sua superfície se expande de forma homogênea, tendendo a uma superfície esférica. A figura 7.1 ilustra esse princípio. A força que um fluido aplica sobre um êmbolo é a pressão multiplicada pela sua área transversal. A pressão é a mesma em dois pontos à mesma altura. A força aplicada, nesse caso, é proporcional apenas à área. O êmbolo maior, assim, consegue equilibrar um peso maior sobre ele.

Um êmbolo em contato com um fluido experimenta uma força dada por

$$\vec{F} = \int p d\vec{A}.$$

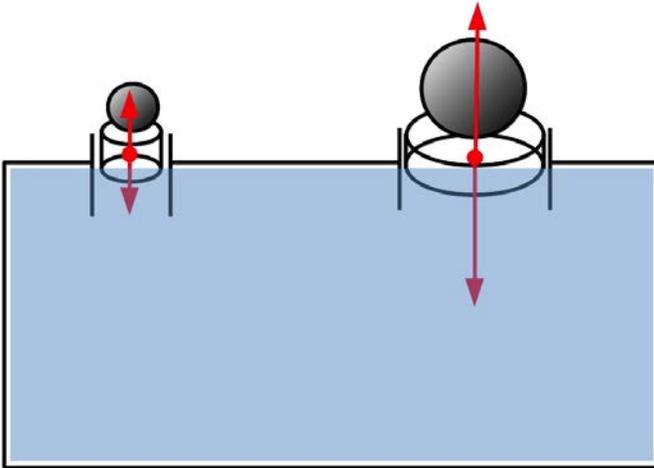
Assim, quando se tem êmbolos de áreas diferentes em contato com um fluido em equilíbrio, a força aplicada num dos êmbolos é transmitida ao outro multiplicada pela razão entre suas áreas transversais em contato com o fluido.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}, \tag{7.1}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \tag{7.2}$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são os módulos das forças nos êmbolos de áreas  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente.

<sup>1</sup>Notamos aqui que muitos desses princípios básicos não são realmente fundamentais, mas se alicerçam em princípios fundamentais da *Mecânica*, como a conservação da massa, quando aplicados a situações específicas de fluidos, como ao caso de fluidos incompressíveis. De fato, a Teoria dos Fluidos é geralmente considerada uma área da Mecânica, aplicada a meios que podem ser considerados como *contínuos*.

**Figura 7.1:** Ilustração do Princípio de Pascal

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

### Exercício 7.2 TRANSMISSÃO DE PRESSÃO NUM TANQUE

Um tanque completamente fechado e cheio de um fluido ideal só pode realizar ou sofrer trabalho por meio de dois êmbolos, chamados 1 e 2, que estão à mesma altura. O raio do êmbolo 1 é dez vezes maior que o raio do êmbolo 2. Se o êmbolo 1 for deslocado em 12 cm no sentido para dentro do tanque, em que distância e sentido o êmbolo 2 será deslocado? Dica: considerando o princípio de Pascal e a relação entre força e pressão, calcule a relação entre as forças exercidas nos dois êmbolos, iguale as intensidades dos trabalhos realizados e isole a distância pedida.

### Exercício 7.3 BRAÇO HIDRÁULICO

Considere o braço hidráulico da figura 7.2b. As seringas de controle (que podem ser pressionadas diretamente por uma pessoa) têm seção transversal interna circular com diâmetro de 2 cm, enquanto nas seringas de ação (que aplicam força diretamente no braço) esse diâmetro é 2,5 cm. Quando uma pessoa aplica uma força de 1 N numa seringa de controle, que força a seringa de ação a ela ligada aplica ao braço?

**Figura 7.2:** Fotografia de braços hidráulicos artesanais apresentados por estudantes  
A pressão é transferida das seringas de controle às seringas de ação, em acordo com o Princípio de Pascal.



**(a)** Fotografia de braço hidráulico feito por estudante.



**(b)** Fotografia de braço hidráulico feito por estudantes.

Fonte: o trabalho da esquerda foi criado e apresentado por Isac Jeferson Ferreira de Sousa e o da esquerda, por Lucas de Sousa Damásio, Matheus Fernandes de Lima e Airton Rener Pestana do Nascimento, quando todos eram estudantes da disciplina “Física Teórica para Ciências Agrárias” no primeiro semestre de 2015 da UnB. Trabalhos fotografados pelo professor Leonardo Luiz e Castro.

## Lei de Stevin

Mergulhadores de águas profundas sabem bem que a pressão é tanto maior quanto maior é a profundidade. O controle da pressão em câmaras e tubos e a adaptação a altas pressões são questões inerentes a técnicas de mergulho. Mas o que causa o aumento de pressão com a profundidade?

Hoje, sabe-se que a pressão aumenta ao se aprofundar num líquido devido ao peso do líquido que está acima. O mesmo pode ser afirmado em relação aos gases: de fato, toda pessoa na superfície terrestre suporta todo o peso do ar atmosférico que está acima de si. A diferença é que a densidade do ar é bem menor que a da água, de modo que a diferença de pressão com a profundidade do mar é muito mais notável que a diferença de pressão com a altura das montanhas, por exemplo.

A **Lei de Stevin** expressa esse fenômeno por meio da equação

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_2 - y_1), \quad 7.3$$

onde  $p_2$  é a pressão do fluido num ponto de profundidade  $y_2$ , maior que a profundidade  $y_1$  na qual o mesmo fluido tem pressão  $p_1$ ;  $\rho$  é a densidade do líquido e  $g$  é a aceleração da gravidade.

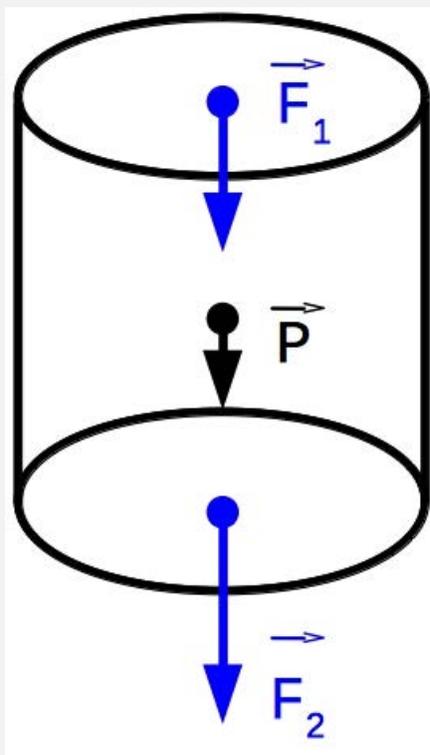
**Problema 7.1.** Calcule a diferença de pressão entre a superfície de um lago e um ponto a dez metros de profundidade, considerando que a densidade da água do lago é de  $10^3 \text{ kg/m}^3$  e que a aceleração da gravidade é  $10 \text{ m/s}^2$ . O que você acha que ocorreria com alguém que tentasse respirar dentro de um lago nessa profundidade, utilizando uma simples mangueira com uma das extremidades mantida fora do lago pela superfície?

### **Teorema 7.1.** LEI DE STEVIN

A pressão hidrostática de um fluido em repouso varia com a profundidade, segundo a Lei de Stevin (equação 7.3).

**Demonstração 7.1.** A figura 7.3 representa um cilindro imaginário dentro de um fluido. A força exercida na base de baixo ( $F_2$ ) é igual à força na base de cima ( $F_1$ ) mais o peso do líquido dentro do cilindro ( $P$ ).

**Figura 7.3:** Esquema para demonstração da Lei de Stevin



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

Expressando isso como uma equação, temos

$$F_2 = F_1 + P.$$

Substituindo *força* por *pressão vezes área da base* ( $p \times A$ ) e *peso* por *massa vezes aceleração da gravidade* ( $m \times g$ ), temos

$$p_2 \times A = p_1 \times A + m \times g.$$

Temos também que a massa do fluido dentro do cilindro é igual à densidade do fluido ( $\rho$ ) vezes o volume do cilindro,  $V = A \times h$ , onde  $h$  é a altura do cilindro. Assim, a equação 7.1 fica

$$p_2 \times A = p_1 \times A + \rho \times A \times h \times g.$$

Dividindo os dois lados por  $A$ , temos

$$p_2 = p_1 + \rho \times h \times g.$$

Considerando agora que a altura do cilindro ( $h$ ) é a diferença entre as profundidades, chegamos a

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_2 - y_1),$$

que é a equação 7.3, a *Lei de Stevin*.

## Princípio de Arquimedes

Todo corpo na Terra é puxado para o seu centro. A água do mar também, e por isso tende a ocupar lugares mais baixos da superfície. Para que um corpo afunde no mar, ele deve ser puxado para baixo com mais intensidade que a água do mar, pois, quando um objeto afunda no mar, deve ocupar o lugar onde antes havia água. A grandeza que indica o quão intensa é a tendência de um objeto de ir para o centro da Terra é a sua densidade. Por isso, um objeto somente afunda se for mais denso que a água.

Desse modo, pode-se concluir que, quando submerso, um corpo experimenta uma força que se opõe à sua tendência de afundar, ou seja, ao seu peso. Essa força é chamada de *empuxo*. O chamado princípio de Arquimedes permite calcular a intensidade do empuxo como

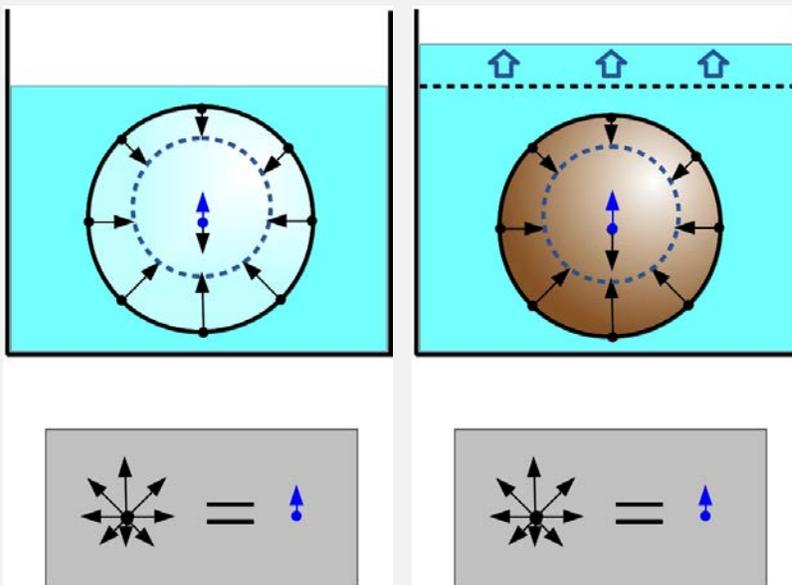
$$E = \rho g \Delta V_{LD},$$

onde  $E$  é a intensidade do empuxo,  $\rho$  é a densidade do líquido,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $V_{LD}$  é o volume do líquido deslocado pela submersão do objeto. Isso equivale a dizer que o módulo do empuxo que um objeto submerso experimenta é igual ao peso do líquido que ocupava o seu lugar anteriormente.

**Teorema 7.2.** PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES

Um objeto submerso em um fluido em repouso sofre uma força para cima cujo módulo é igual ao peso do líquido deslocado por sua submersão. (Equação 7.1.)

**Demonstração 7.2.** O princípio de Arquimedes pode ser demonstrado da seguinte forma: considere um fluido no qual se identifica uma fronteira esférica imaginária. Trate a esfera como se fosse um objeto submerso, embora de mesma composição e densidade que o fluido ao redor. A pressão do fluido externo à esfera sobre a própria esfera é maior nas partes mais baixas, então a força resultante na esfera é para cima. Esse força resultante é o empuxo  $\vec{E}$  que é a soma vetorial das forças aplicadas na superfície, ou seja,  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \dots$ . Como a esfera é de mesma composição que o exterior, ela não é impelida nem para cima nem para baixo, permanecendo em equilíbrio, o que significa que o empuxo sofrido pela esfera anula perfeitamente o seu peso, ou seja,  $\vec{E} = -\vec{P}_L$  (onde  $\vec{P}_L$  significa “peso do líquido”).



Considere agora a ilustração da direita, onde um objeto esférico de composição diferente foi submerso até ocupar exatamente o mesmo espaço de nossa esfera imaginária. Ora, conforme o raciocínio anterior, o empuxo depende apenas do fluido exterior à esfera, e não da composição da esfera que o sofre. Então o empuxo terá o mesmo valor independentemente dessa composição; o módulo desse empuxo, porém, como vimos, é igual ao peso da esfera imaginária (composta do mesmo líquido que está em sua volta). Mas esse peso é exatamente o peso do líquido deslocado pela submersão do objeto. Esse peso é  $P_{LD} = m_{LD}g = \rho g \Delta V_{LD}$ .

## Medidas de pressão

O barômetro e o manômetro são instrumentos utilizados para medir pressão. O barômetro é utilizado para medir a pressão atmosférica (do ambiente) enquanto o manômetro é utilizado para medir a pressão de um fluido contido num recipiente.

Um **barômetro** pode ser construído da seguinte maneira:

- um tubo, que contém uma extremidade aberta e a outra fechada (como um tubo de ensaio), é completamente preenchido por mercúrio;
- a abertura do tubo (a “boca”) é inserida numa bacia contendo mercúrio também, sem que o mercúrio escape nem que gás entre no tubo;
- o tubo é colocado na posição vertical com a abertura para baixo, de modo que a altura da coluna de mercúrio em seu interior desça até um certo ponto e a parte de cima contenha apenas vácuo;
- como a pressão do vácuo é nula, pode-se considerar  $p_1 = 0$  na equação 7.3;
- considerando  $p_2 \equiv p_{atm}$  (pressão atmosférica) e  $\Delta h \equiv h_2 - h_1$ , na equação 7.3, ela fica

$$p_{atm} = \rho g \Delta h,$$

onde  $h$  é a diferença entre os níveis do mercúrio dentro e fora do tubo.

### Exercício 7.4 MMHG

A unidade “milímetro de mercúrio” (mmHg) é definida como a pressão necessária para elevar uma coluna de mercúrio de um barômetro em 1 mm. Deduza a relação entre as unidades mmHg e Pa ( $= \frac{N}{m^2}$ ) através de seus próprios cálculos. Para isso, considere a densidade de mercúrio como  $13,5951 \frac{kg}{cm^3}$  e a aceleração da gravidade como  $9,80665 \frac{m}{s^2}$ .

Um **manômetro** mede a pressão de um fluido num recipiente fechado em relação à pressão do ambiente, ou seja, a diferença entre a pressão de um fluido e a pressão atmosférica, quantidade chamada de *pressão manométrica* ou *sobrepessão*.

O **manômetro de tubo aberto** é um manômetro que contém um tubo em forma de J, parcialmente preenchido por um líquido que fica em contato com a atmosfera pela extremidade mais alta e em contato com um fluido, cuja pressão se pretende medir, pela extremidade mais baixa, que é conectada ao recipiente contendo esse fluido. A equação para a a pressão manométrica é, analogamente à equação 7.1,

$$p_{man} = \rho g \Delta h,$$

mas  $h$  é agora a diferença entre os níveis do líquido nos dois tubos.

### Exercício 7.5 APROXIMANDO A PRESSÃO

Calcule a sobrepessão equivalente a uma diferença de 8 milímetros nos níveis do mercúrio em um manômetro de mercúrio,

- considerando a densidade do mercúrio como  $13,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  e a aceleração da gravidade como  $10 \text{ m/s}^2$ ;
- considerando a densidade de mercúrio como  $13,5951 \text{ g/cm}^3$  e a aceleração da gravidade como  $9,80665 \text{ m/s}^2$ .

## 7.2 O macaco hidráulico

Seja lá por que motivo, o tipo de instrumento mais utilizado para elevar veículos chama-se “macaco” ou “macaco mecânico”. No caso em que o macaco mecânico utiliza um líquido para o seu funcionamento, é chamado “macaco hidráulico”.

Num macaco hidráulico, o efeito da força aplicada pelo usuário sobre a área de um êmbolo é aumentado porque a pressão é transferido através de um fluido a outro êmbolo de área maior que sustenta o peso. Assim, aplicando o Princípio de Pascal, temos

$$\begin{aligned} \frac{F_u}{A_u} &= \frac{F_s}{A_s} \\ \Rightarrow F_u &= \frac{A_u}{A_s} F_s, \end{aligned}$$

onde  $F$  é a força,  $A$  é a área do êmbolo, o índice  $u$  indica o lado do usuário e  $s$  o lado que sustenta o peso. Quanto maior a relação entre as áreas dos êmbolos, maior o efeito aumentativo.

O problema é que, quando maior o efeito de aumentar a força, maior a distância pela qual o usuário terá que deslocar o seu êmbolo. Pelo Princípio de Pascal, também pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} F_u \times d_u &= F_s \times d_s \\ \implies \frac{d_u}{d_s} &= \frac{F_s}{F_u}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

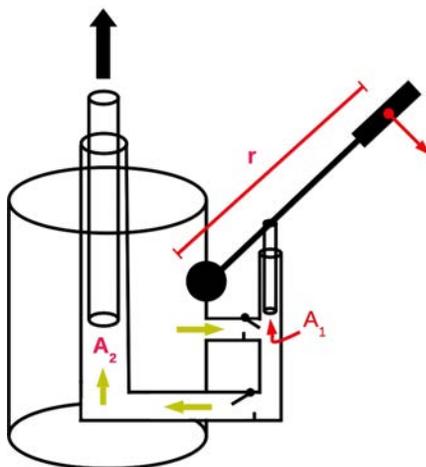
onde a quantidade  $\frac{d_u}{d_s}$  é maior que 1 porque o usuário sempre terá que deslocar mais o seu êmbolo que o comprimento pelo qual conseguirá elevar o veículo nesse mesmo movimento.<sup>2</sup>

Isso significa que o usuário sempre terá que escolher entre força e deslocamento. Assim como já atestamos no estudo do trabalho e da energia, não há em Física “almoço grátis” (*There is no free lunch*). Ou faz mais força, ou se move mais. Note que a equação 7.4 implica que devemos ter  $F_s d_s = F_u d_u$ , indicando, novamente, que o trabalho realizado no processo de se pressionar o pistão será o mesmo, afinal.

Assim, o usuário tem que deslocar o seu êmbolo por um comprimento muito grande. Entretanto, de forma geral, não há espaço para um pistão muito longo dentro do qual o êmbolo possa se mover. Na prática, isso é resolvido através de um sistema de *bombeamento*, pelo qual o êmbolo suga fluido de um reservatório quando o usuário o puxa e transfere-o ao pistão que sustenta o carro ao empurrá-lo. Os macacos hidráulicos menores, disponíveis em lojas para o consumidor não especializado, têm uma aparência rechonchuda devido ao seu reservatório localizado em torno do êmbolo de sustentação, como ilustra a figura 7.4.

<sup>2</sup>É, na verdade, uma junção do Princípio de Pascal com a conservação da massa. Como o fluido é assumido incompressível, as massas de fluido movido de cada lado do macaco hidráulico devem ser iguais. Mas massa é igual a densidade vezes volume e, como o fluido é incompressível, as densidades de cada lado devem ser iguais. Assim, os volumes movidos devem ser iguais. Mas de  $V_u = V_s$  tira-se  $A_u h_u = A_s h_s$  e, portanto,  $\frac{h_u}{h_s} = \frac{A_s}{A_u}$ . Usando-se do Princípio de Pascal chegamos ao resultado desejado.

**Figura 7.4:** Esquema de funcionamento de um macaco hidráulico



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

## 7.3 Hidrodinâmica

Se a Hidrostática é o estudo dos fluidos em repouso, a Hidrodinâmica é o estudo dos fluidos em movimento, ou seja, o *escoamento* dos fluidos.

### Vazão

A *vazão* ( $Q$ ), também chamada de *caudal* ou *fluxo*, é definida como o volume ( $V$ ) de fluido que passa numa determinada seção transversal dividido pelo tempo ( $t$ ) em que isso ocorre:

$$Q = \frac{V}{t}.$$

Note que, a partir da equação para a vazão, podemos obter a velocidade média de escoamento. Para tanto, basta dividir a vazão pela área da seção reta do caminho percorrido pelo fluido. Se for um tubo, por exemplo, de área de seção reta igual a  $A$ , ficamos com a velocidade média de escoamento dada por

$$v_{med} = \frac{Q}{A}. \quad 7.5$$

## 7.4 Hidrodinâmica do fluido ideal

O tipo mais simples de escoamento é aquele do fluido incompressível e não viscoso, chamado de **fluido ideal**. Assim, a aplicação de tal modelo a fluidos reais é condicionada a compressibilidade e viscosidade pequenas ou desprezíveis.<sup>3</sup> Sem o concurso da viscosidade, seu escoamento não forma vórtices nem turbulência.

### Equação de continuidade

É um fato conhecido que podemos fazer a água de uma mangueira sair com maior velocidade apertando a extremidade por onde a água sai. Isso ocorre porque a área da secção transversal pela qual a água passa é diminuída, mas a água é incompressível e continua sendo pressionada a sair pela água que vem atrás com mesma vazão. Considerando, então, que a vazão é constante num tubo cuja área transversal pode ser variável, concluímos que a velocidade do fluido deve aumentar quando essa área diminui e vice-versa. Essa relação é expressa pela equação de continuidade,

$$Q = Av = \text{constante},$$

onde  $A$  é a área da secção transversal e  $v$  é a velocidade de fluxo.

#### Exercício 7.6 AUMENTO DA VELOCIDADE DE UM FLUIDO IDEAL

Considere que um fluido ideal num tubo de secção transversal cilíndrica se desloque a uma velocidade de  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  num tubo de 30 cm de raio de secção transversal. Para que esse fluido saia a uma velocidade de  $24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , qual deve ser o raio da secção transversal do tubo na saída do fluido, considerando que a viscosidade e a compressibilidade do fluido sejam desprezíveis.

### Equação de Bernoulli

Podemos seguir generalizando a descrição do escoamento de um fluido ideal considerando que tanto a altura do tubo quanto a pressão do fluido podem ser variáveis. A equação de Bernoulli é aplicada a essa situação e é escrita como

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constante} \quad 7.6$$

onde  $p$  é a pressão,  $v$  é a velocidade e  $h$  é a elevação, ou seja, a “altura do tubo”. Essa equação pode ser deduzida a partir do *Teorema Trabalho-Energia*.

<sup>3</sup>Neste caso, o modelo pode fornecer resultados aproximados.

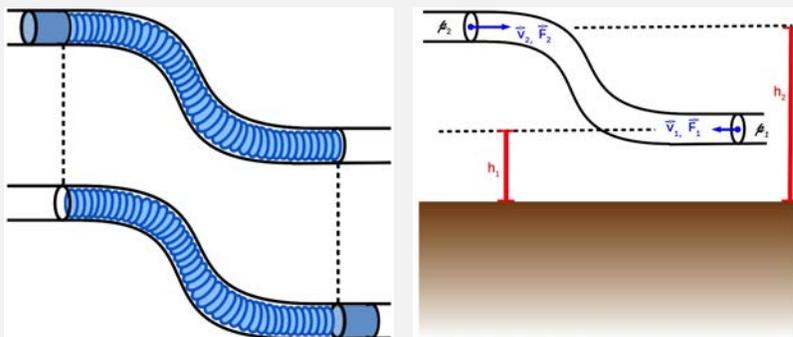
**Problema 7.2.** FURO NO BALDE

Considere um balde com um furo a uma profundidade  $h$  em relação ao nível da água no balde. Aplique a Equação de Bernoulli usando dois pontos: um ponto “1” na superfície da água e um ponto “2” no furo (observe que o balde pode ser considerado um tubo com dois diâmetros de seção transversal). Considere que o nível da água no balde desce tão vagarosamente que  $v_1$  pode ser desprezado e que a pressão é igual nos dois pontos. Encontre assim a fórmula que relaciona a velocidade com que o fluido sai à altura  $h$  (Teorema de Torricelli).

**Teorema 7.3.** EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Um fluido ideal (não viscoso e incompressível) escoando dentro de um tubo tem a relação entre sua velocidade de fluxo, sua elevação e sua pressão dada pela Equação de Bernoulli (equação 7.6).

**Demonstração 7.3.** Seja um tubo cheio de fluido ideal que muda de elevação. Consideremos apenas uma longa porção desse fluido, uma “corda de fluido”, representada como a parte azul na figura a seguir.



Num certo instante, essa corda de fluido localiza-se ao longo de um comprimento que muda da altura  $h_1$  para a altura  $h_2$ . Também existe fluido além das extremidades dessa região, exercendo pressões  $p_1$  e  $p_2$  em direções contrárias. Se  $p_1$  é maior que  $p_2$ , o fluido se desloca da região 1 para a região 2. Num certo intervalo de tempo  $\Delta t$ , um elemento de massa  $dm$  sai da região à altura  $h_1$  e um outro elemento de mesma massa e volume entra na região à altura  $h_2$ .

Sem perda de generalidade, consideremos  $h_1 > h_2$ . O trabalho realizado pela pressão efetiva  $p_1 - p_2$  quando o fluido se desloca por um comprimento  $ds$  é  $(p_1 - p_2) A ds$  (para simplificar, consideremos que a secção transversal do tubo seja constante e igual a  $A$  ao longo de toda sua extensão).

Pelo *Teorema Trabalho-Energia*, esse trabalho deve ser igual à variação da energia mecânica equivalente a um elemento de massa  $dm$  sumir da região à altura  $h_1$  à velocidade  $v_1$  e um outro elemento igual aparecer na região à altura  $h_2$  à velocidade  $v_2$ . Ou seja,

$$(p_1 - p_2) A ds = dm g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2).$$

Considerando que o volume ocupado por  $dm$  seja  $dV$ , temos  $\rho = \frac{dm}{dV}$ , onde  $\rho$  é a densidade do fluido. Usando essa expressão para substituir  $dm$  na equação anterior, chega-se a

$$(p_1 - p_2) A ds = \rho dV g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2).$$

Se  $dV$  é o volume de um pequeno cilindro (ou um pequeno prisma de base plana arbitrária) de base  $A$  e comprimento  $ds$ , temos que  $dV = A ds$ , de modo que

$$(p_1 - p_2) A ds = \rho A ds g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho A ds (v_2^2 - v_1^2).$$

Dividindo todos os termos por  $A$  e separando termos que têm índice 1 daqueles que têm índice 2, chegamos a

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

que é o mesmo que a equação 7.6.

A equação de Bernoulli possibilita uma série de aplicações interessantes que passamos agora a considerar.

## 7.5 Usinas hidrelétricas

### ITAIPU BINACIONAL

Metade no Brasil, metade no Paraguai. Aí está a maior usina hidrelétrica do continente americano e a segunda maior do mundo. A *Usina Hidrelétrica Itaipu Binacional*, localizada entre Foz do Iguaçu (Paraná, Brasil) e Hernandarias (ao norte de *Ciudad del Este*, no Paraguai). São 1202 usinas hidrelétricas em todo o país em 2016, representando 61,52% da *capacidade instalada* de geração de energia elétrica no Brasil (ANEEL, 2016). Embora essa porcentagem seja impressionante, houve uma pequena redução em relação a 2012, quando o valor era 65,2% (ANEEL, 2016 apud SILVA, 2014), o que indica adesão a outras formas de produção de energia.

Quando uma certa porção de um líquido diminui sua altura, sua velocidade geralmente aumenta. Isso acontece porque a soma mostrada na equação 7.6 deve ser constante, ou seja,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2, \quad 7.7$$

onde os índices 1 e 2 indicam valores das grandezas em dois pontos pelos quais a mesma porção de fluido passa. Se  $h_2$  é menor que  $h_1$ , então alguma outra grandeza deve mudar para compensar isso, mantendo os dois lados da equação 7.7 iguais entre si. Para isso, a pressão  $p_2$  poderia ser maior que a pressão  $p_1$ . Isso de fato ocorre em alguns casos.

No entanto, se o líquido estiver em contato com o ar na parte de cima e na parte de baixo, como no caso de um balde furado,  $p_1$  e  $p_2$  devem ser iguais à pressão atmosférica, porque sua pressão se equilibra com a pressão do ar. Como o ar é pouco denso (em comparação à água), sua pressão quase não muda com pequenas diferenças de altura (segundo a *Lei de Stevin*, a mudança de pressão com a profundidade é devido ao peso do próprio fluido acima). Assim,  $p_1 = p_2$  e a equação 7.7 fica

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2.$$

Como  $\rho$  e  $g$  são parâmetros constantes da equação, a única maneira de manter a soma constante tendo  $h_2 < h_1$ , é ter  $v_2 > v_1$ .

Esse efeito é utilizado nas usinas hidrelétricas. Corresponde a uma transformação da energia potencial gravitacional da água, represada numa parte alta, em energia cinética, quando ela chega mais rápida a uma parte mais baixa. A água rápida na parte baixa movimento hélices que são transformadas em energia elétrica na parte mais baixa através de *dinamos*.

Portanto, quanto mais alta estiver a água na represa, mais energia poderá gerar. Por isso, o enorme potencial hídrico brasileiro fez com que o Brasil se desenvolvesse muito nas técnicas de construção de altas barragens, levando a sua técnica até mesmo a outros países (SILVA, 2014).

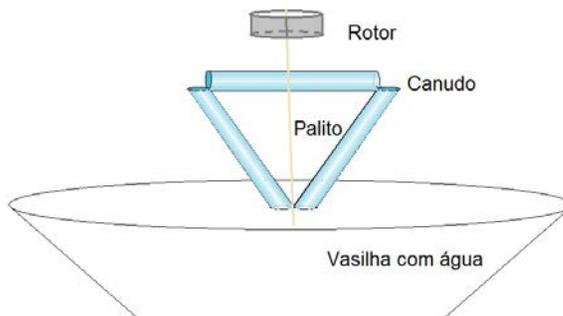
Entretanto, as hidrelétricas têm também alto impacto ambiental, por inundar regiões onde existia fauna e flora, e por impedir peixes de certas espécies a subir os rios corrente acima para se reproduzir, como é seu comportamento natural. Em Itaipu, isso foi contornado ao se criar um canal alternativo para esses peixes, pelo qual o nível da água muda muito mais suavemente.

## 7.6 Aspersores

É possível usar a equação de Bernoulli para se projetar um aspersor caseiro, muito simples de se confeccionar, mas cuja utilidade, evidentemente, é apenas a de demonstrar o princípio de funcionamento do sistema, já que há aspersores profissionais com preço muito baixo sendo vendidos no mercado.

Para tanto, considere a figura a seguir, em que apresentamos o aspersor.

**Figura 7.5:** Ilustração de um aspersor de água com funcionamento baseado na equação de Bernoulli



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

Sua construção é feita com um pequeno canudo montado em forma de triângulo preso a um rotor. O equipamento é colocado em uma pequena vasilha de água. O canudo é dividido em três partes da maneira indicada na figura, de modo a haver dois furos na parte superior, juntamente com os furos das extremidades, que formam a parte inferior. O canudo é preso (com fita) a um palito de madeira que, por sua vez, é preso a um rotor (que pode ser uma furadeira).

No momento que o rotor é posto para girar, aparece uma diferença de pressão entre a parte mais baixa e a parte mais alta do canudo, fazendo com que a água suba pelo canudo e seja expelida pelos furos superiores.

Matematicamente, temos que a diferença de pressão, entre o furo superior e o furo inferior do canudo, desprezando-se o efeito da diferença de altura (muito pequeno), é dada por  $\rho (v_2^2 - v_1^2) \div 2$ . As velocidades lineares podem ser calculadas a partir da velocidade angular do rotor ( $\omega$ ) e das distâncias dos furos superior e inferior ao palito, dadas por  $r_2$  e  $r_1$ , respectivamente, de modo que ficamos com

$$\Delta p = \frac{\rho \omega^2 r_2^2}{2},$$

uma vez que  $r_1 \approx 0$ . A velocidade com que a água sai do aspersor, por sua vez, é dada por  $v_2$ .

Note que esse cálculo poderia ser feito diretamente usando conservação de energia, o que é razoável, visto que é desse princípio fundamental que obtemos a equação de Bernoulli.

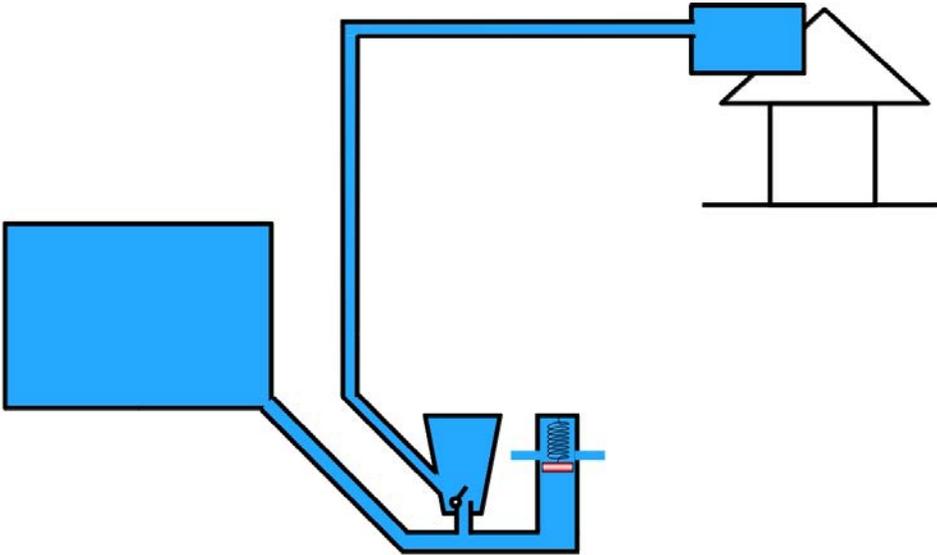
## 7.7 O carneiro hidráulico

O carneiro hidráulico é um dos aparelhos mais representativos do meio rural. Geralmente, uma caixa d'água deve estar mais alta que todos os lugares onde a água é utilizada, mas o carneiro hidráulico pode bombear a água até uma região mais alta que a caixa d'água, sem uso de energia elétrica ou motor. Isso, que parece violar a conservação da energia, é conseguido por um engenhoso sistema de transformação de energia que poderemos entender agora que chegamos ao final deste capítulo.

Em funcionamento, um carneiro hidráulico recebe a água vinda de um reservatório, chamado "reservatório de captação", posicionado numa região mais elevada que o carneiro hidráulico, e a bombeia até um outro reservatório, chamado "reservatório de entrega", posicionado numa região ainda mais elevada que aquela do reservatório de captação.

Para isso, o carneiro não faz uso de energia elétrica, usando apenas a energia mecânica da água que desce do reservatório até ele. Como o carneiro lança a água para uma região mais elevada do que aquela de onde veio, o sistema aparentemente transgreda a Equação de Bernoulli e, conseqüentemente, o Princípio da Conservação da Energia de onde esta equação é deduzida.

**Figura 7.6:** Representação esquemática da montagem de um carneiro hidráulico, com reservatório, bomba e residência receptora da água

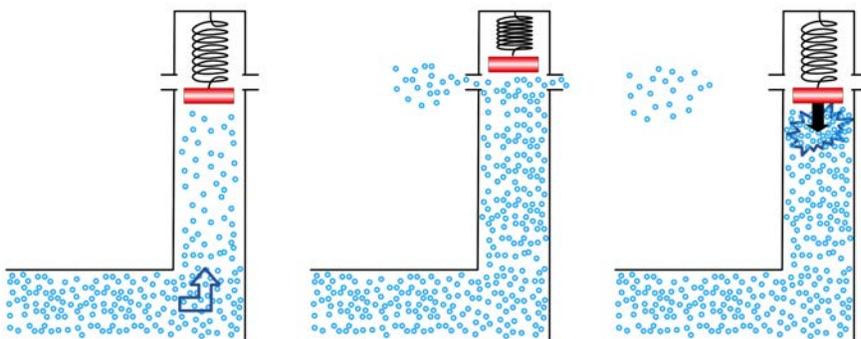


Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

O que ocorre é que, na verdade, a Equação de Bernoulli não pode ser deduzida da Conservação da Energia para o carneiro hidráulico, porque essa dedução pressupõe que o percurso pelo qual o fluido passa é direto, não ramificado, e que não há perda de fluido nesse percurso. No sistema do carneiro hidráulico, o tubo de água vindo do reservatório de captação ramifica-se em dois, um que leva a água ao reservatório de entrega e outro que a leva ao carneiro hidráulico. No carneiro hidráulico, há perda de água na chamada válvula de desperdício; a água, durante a sua saída por essa válvula, força uma tampa pesada, chamada de “martelo”, que está presa a uma mola e por isso volta para tapar novamente o fluido, aumentando assim a sua pressão. As transformações de energia que possibilitam o bombeamento da água são, assim, **energia cinética** da água que vai em direção à válvula de desperdício → **energia cinética** do martelo empurrado pela água → **energia potencial elástica** da mola da válvula de desperdício → **energia cinética** do martelo puxado pela mola → **energia de fluxo** relacionada à pressão da água que realiza trabalho para bombear água até o reservatório de entrega.

Esse processo pelo qual o martelo volta-se em direção à água, forçando-a e aumentando a sua pressão, é chamado “golpe de aríete” (COUTO, 2012), uma referência ao “aríete”, arma utilizada durante a Idade Média para derrubar muralhas e portões de fortificações. O nome “carneiro” também faz referência ao fato de que uma ponta metálica em forma de cabeça de carneiro era geralmente instalada na ponta do aríete que era destinado ao choque.

**Figura 7.7:** Ilustração do princípio de funcionamento do carneiro hidráulico. O “golpe de aríete” num carneiro hidráulico. A água é representada por inúmeros círculos. Sua pressão armazena, na mola, energia da água que sai do sistema, para devolvê-la à água de dentro.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

## 7.8 escoamento de fluidos reais

A principal correção que deve ser feita na descrição de fluidos reais, partindo-se da descrição de fluidos ideais, é a inclusão de efeitos da viscosidade, causada pelo atrito interno e pelas forças entre as moléculas do fluido. Assim, **força de viscosidade** sempre se opõe ao escoamento e pode ser estimada pela expressão

$$F_v = \eta A_c \frac{v}{x}, \quad 7.8$$

onde  $F_v$  é a força de viscosidade,  $\eta$  é o *coeficiente de viscosidade* que é próprio do fluido em questão,  $A_c$  é a área da camada de fluido sobre a qual se calcula  $F_v$ ,  $v$  é a velocidade de fluxo e  $x$  é a distância a uma superfície sólida em relação à qual  $v$  é calculada. A vazão de um fluido viscoso num tubo de comprimento  $l$  e

raio de seção transversal  $R$  é dada pela *Lei de Poiseuille*:

$$Q = \frac{P\pi R^4}{8l\eta}. \quad 7.9$$

De todo modo, a definição de vazão da equação 7.3 continua válida para o fluido viscoso.

### Exercício 7.7

Por meio de algumas medidas, conclui-se que uma força de viscosidade de  $50 \text{ N}$  atua em cada metro quadrado da superfície de um rio, no sentido contrário ao de seu fluxo, que tem uma velocidade de  $10 \text{ m/s}$ . Considerando que a água no fundo do rio permanece em repouso em relação ao leito, e que a profundidade do rio é de  $5 \text{ m}$ , calcule o coeficiente de viscosidade do rio. Considere que todo o rio esteja dentro da camada limite.

### Exercício 7.8

Calcule a vazão de um fluido com coeficiente de viscosidade igual a  $0,3 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  a  $2 \text{ atm}$  de pressão num tubo de  $20 \text{ cm}$  de raio,  $10 \text{ metros}$  de comprimento.

## 7.9 Escoamento laminar e turbulento

O escoamento de um fluido viscoso pode ser *laminar*, caso em que se desloca em lâminas que não se cruzam, ou *turbulento*, caso em que há formação de vórtices e movimento caótico. A existência de escoamento laminar ou turbulento depende da relação entre forças inerciais e forças viscosas, relação essa expressa pelo número de Reynolds ( $\mathfrak{R}$ ):

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho v D}{\eta},$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $v$  é a velocidade de fluxo,  $D$  é um comprimento típico do escoamento e  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade. Há alguma arbitrariedade na escolha de  $D$ , que pode ser o diâmetro de um tubo ou o comprimento de um navio, por exemplo, quando se estuda o escoamento da água em volta dele durante o seu movimento. Assim, o uso do número de Reynolds também depende do problema, mas, de forma geral, diz-se que o escoamento é provavelmente laminar se  $\Re < 2100$  e turbulento se  $\Re > 4000$ .

### Exercício 7.9

Um engenheiro pretende construir um novo tipo de submarino. O submarino terá comprimento  $L$  e será projetado para se mover em água de densidade  $\rho$  e coeficiente de viscosidade  $\eta$ . Para evitar possível perda de recursos investidos no projeto caso o submarino não funcione, ele decide construir e testar um protótipo antes de construir o submarino. Ele avalia que pode construir um protótipo de comprimento  $L/20$ , com formato idêntico ao do futuro submarino, apenas em tamanho reduzido. Sabendo que ele testará o protótipo na mesma velocidade na qual o submarino deverá ter em seu funcionamento normal, defina uma relação entre a densidade  $\rho_p$  e o coeficiente de viscosidade  $\eta_p$  do fluido adequado para um teste de turbulência, considerando o número de Reynolds.

## 7.10 Perda de carga

Ao introduzir a Equação de Bernoulli, que derivamos a partir da conservação estrita da energia, desconsideramos a possibilidade de haver perdas no processo de escoamento do fluido. Em casos concretos, evidentemente, esse tipo de perda deve, em geral, ser considerado.

Temos assim, novamente, um momento em que devemos estender os conceitos físicos para que alcancem a concretude das situações que queremos considerar — ou seja, devemos fazer a passagem entre uma descrição estritamente física, com todas as suas idealizações, para uma descrição relativa à engenharia, em que os modelos devem considerar elementos intervenientes que alteram tal idealidade, como, por exemplo, a perda de energia na forma de calor.

Assim, definimos a *perda de carga* como sendo a energia perdida por unidade de peso do fluido. Em um tubo ou canal, é a perda de energia dinâmica do fluido devido à fricção das partículas do fluido entre si e contra as paredes da tubulação que os contenha.

Como tubulações têm conexões (joelhos, tês, válvulas etc.) que alteram a maneira como o fluido escoar no interior delas, assim como têm rugosidades que ensejam a alteração do escoamento ideal, devemos estabelecer a noção de perda de carga nestes contextos usuais. Esses dois tipos de perda de carga (ao longo das tubulações por causa de rugosidades internas e por causa de elementos de conexão, como válvulas) são chamados, respectivamente, de perda de carga contínua ou distribuída e perda de carga localizada.

Assim, podemos imediatamente *estender* a Equação de Bernoulli para incluir a perda de carga escrevendo

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + h_{perda}, \quad 7.10$$

em que dividimos a expressão usual da Equação de Bernoulli por  $\rho g$  de maneira que a perda de carga pode ser expressa em *metros*.

Expressa na forma dada pela equação 7.10, podemos calcular a perda de carga contínua  $h_{perda;C}$  (em unidades de comprimento, como, por exemplo, o metro) como sendo

$$h_{perda;C} = f_{atD} \cdot \frac{L_{tubo}}{D} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

em que  $f_{atD}$  é o chamado *fator de atrito de Darcy*, obtido a partir de uma tabela ou gráfico, como veremos no que se segue,  $L_{tubo}$  é o comprimento do tubo,  $D$  é o diâmetro do tubo e  $v$  é a velocidade média de escoamento.

A perda de carga localizada deve ser calculada pela expressão

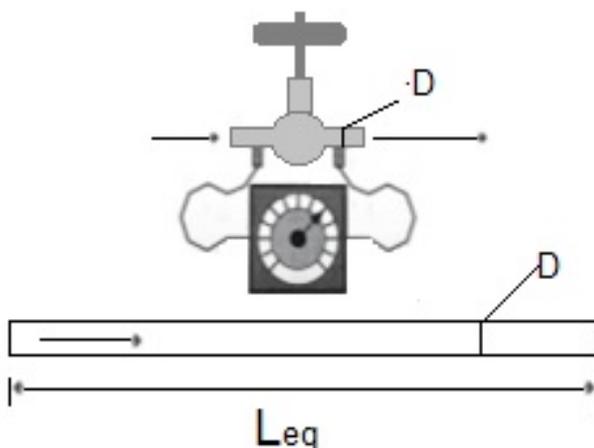
$$h_{perda;L} = \sum K \frac{v^2}{2g}, \quad 7.11$$

em que a soma se estende a cada elemento localizado que induz a uma perda de carga cujo valor está associado à constante  $K$ , chamada de coeficiente de perda de carga.

Uma maneira interessante de se reescrever essa última equação é escrevendo a constante  $K$  pensando em um hipotético tubo cujo comprimento seria tal que produziria exatamente a mesma perda de carga que a associada ao acessório utilizado, como mostrado na figura 7.8 para o caso de uma válvula. Esse comprimento é conhecido como *comprimento equivalente*  $L_{eq}$  e nos permite reescrever a equação 7.11 como

$$h_{perda;L} = \sum f_{atD} \frac{L_{eq}}{D} \frac{v^2}{2g}.$$

**Figura 7.8:** Representação gráfica do comprimento equivalente para o caso de uma válvula



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

Com isso, a perda de carga total pode ser calculada pela expressão

$$h_{perda} = f_{atD} \cdot \frac{L_{tubo} + \sum L_{eq}}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad 7.12$$

É importante ressaltar que os comprimentos equivalentes se encontram tabelados e não precisam ser calculados em uma aplicação usual, como mostrado na tabela 7.1, simplificada para apresentar apenas alguns acessórios e diâmetros.

**Tabela 7.1:** Comprimentos equivalentes para alguns acessórios e alguns diâmetros

Diâmetro (pol)	Tipo de Acessório			
	Curva 90°	Curva 45°	Joelho 90°	Registro de Globo (metal)
3/4	0,4	0,2	0,7	6,7
1	0,5	0,3	0,8	8,2
2	0,9	0,6	1,7	17,4
3	1,3	0,8	2,5	26
4	1,6	0,9	3,4	34
5	2,1	1,1	4,2	43

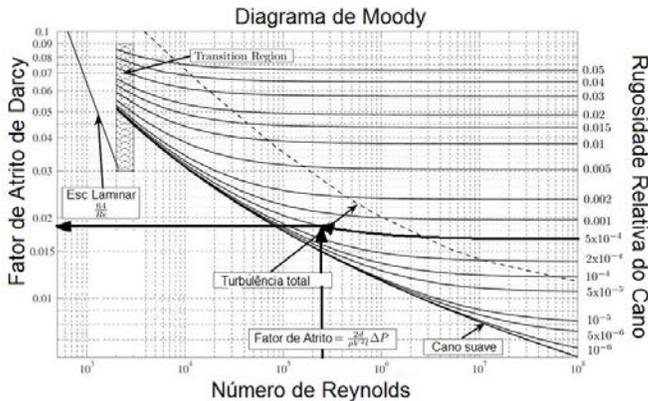
Fonte: elaboração dos autores.

Já o atrito de Darcy ( $f_{atD}$ ) pode ser obtido diretamente do número de Reynolds, se o escoamento é laminar, sendo dado, neste caso, por

$$f_{atD} = \frac{64}{Re}.$$

Entretanto, se o escoamento é turbulento, então  $f_{atD}$  deve ser obtido de um gráfico como o mostrado na figura 7.9.

**Figura 7.9:** Diagrama de Moody usado para o cálculo do atrito de Darcy



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho, por adaptação de Wikimedia Commons (2012-2016).

No diagrama de Moody, o número de Reynolds ocupa as abcissas, enquanto que a rugosidade relativa ocupa a ordenada *do lado direito do diagrama*. Assim, tomando-se a rugosidade do meio de escoamento (e.g. a rugosidade do interior de um cano), seleciona-se uma das curvas do diagrama de Moody e se verifica que ponto *das ordenadas do lado esquerdo* está relacionado com a curva determinada e o valor obtido para o número de Reynolds.

No diagrama apresentado mostramos uma situação hipotética (ver exemplo a seguir) em que temos uma rugosidade relativa igual a  $5 \times 10^{-5}$  e um número de Reynolds aproximadamente igual a  $1,6 \times 10^5$ . Assim, escolhendo a curva que parte de uma rugosidade  $5 \times 10^{-5}$  e subindo uma vertical a partir do número de Reynolds, selecionamos um ponto sobre a curva cuja ordenada *à esquerda*, que apresenta um valor aproximado de 0,019, que é o valor do coeficiente de atrito de Darcy desejado.

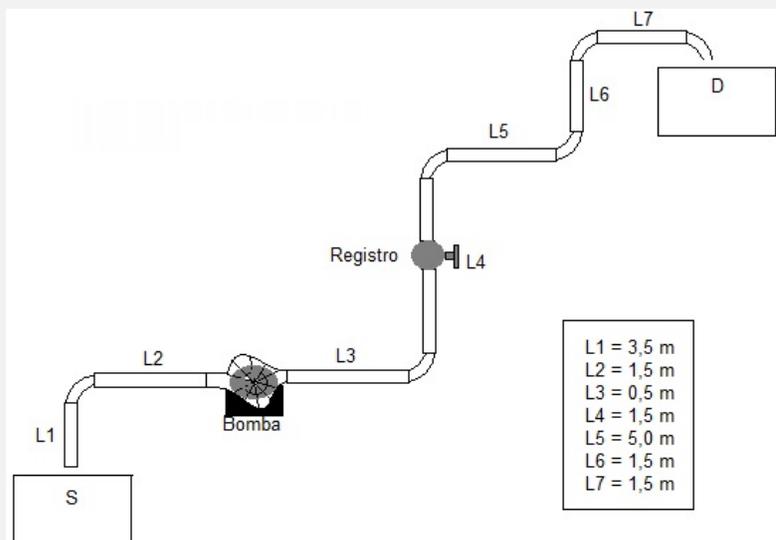
Finalmente, quando temos no percurso do escoamento uma bomba, capaz de impor ao sistema um aumento da pressão, a Equação de Bernoulli com perdas (7.10) passa a ser escrita na forma

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 + \frac{W}{g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + h_{perda},$$

em que W representa a potência da bomba.

**Exemplo 7.1.** Deseja-se transportar água a 20°C com vazão de 800L/ min do reservatório S para o reservatório D. A tubulação é de aço comercial com diâmetro nominal de 4'' ( $D_{interno} = 0,10226m$ ), rugosidade relativa igual a 0,0004, com seis joelhos padrão 90°, sendo um na linha de sucção e 5 na de descarga e uma válvula globo, aberta, que se encontra instalada na linha de descarga (ver figura 7.10). Considerando que o coeficiente de viscosidade é dado por  $\eta = 1,0214 \times 10^{-3} Pa.s$  e a densidade (20°C) é igual a  $\rho = 998,1568 kg/m^3$ , calcule a perda de carga total e a potência da bomba (assuma  $g = 9,86 m/s^2$ ).

**Figura 7.10:** Arranjo de tubulações de exemplo



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

Uma boa metodologia para resolver esse problema é ir obtendo cada um dos elementos da equação 7.12 para, finalmente, agrupá-los na equação e obter o resultado. Para tanto, considere a vazão, dada como sendo 800L/ min. É interessante passá-la para metros por segundo. Obtemos

o valor de  $1,33 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$  para a vazão. A velocidade média de escoamento pode ser obtida da equação 7.5 de forma que  $\bar{v} = 1,623 \text{ m/s}$  (a área da seção reta A é calculada usando-se o diâmetro interno e o fato de que a área é circular, de modo que,  $A = 8,213 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ).

O comprimento total dos canos é igual a  $L_{tot} = 15 \text{ m}$ . Como temos seis joelhos de  $90^\circ$  de metal, cada joelho (pela tabela 7.1) irá acrescentar um comprimento equivalente igual a  $3,4 \text{ m}$ , uma vez que o cano tem diâmetro de  $4 \text{ pol}$ . A válvula irá contribuir com um valor igual a  $34 \text{ m}$  de modo que o comprimento equivalente total fica  $L_{eq} = 6 \times 3,4 + 34 = 54,4 \text{ m}$ .

O número de Reynolds  $\Re$ , equação (7.9), pode ser imediatamente calculado pelos dados do problema (para o cano, D representa o diâmetro do tubo). Assim, obtemos  $\Re = 162191.18$ , indicando claramente que se trata de um escoamento turbulento. Usando a rugosidade relativa fornecida pelo problema e o número de Reynolds calculado, usamos o diagrama de Moody para obter um coeficiente de atrito de Darcy igual a  $f_{atD} = 0,019$ .

Com isso temos todos os dados necessários para calcular a perda de carga total. Substituindo os valores obtidos na equação (7.12) obtemos o valor  $h_{perda} = 1,73 \text{ m}$ .

Para calcular a potência da bomba, devemos usar a equação (7.10) considerando que  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 6,5 \text{ m}$ ,  $h_{perda} = 1,73$ , juntamente com os valores da densidade e da aceleração da gravidade. Note que temos que assumir que  $P_1 = P_2$ . Com isso (7.10) fornece

$$\frac{W}{g} = h_2 + h_{perda},$$

como seria de se esperar, ou seja, o papel da bomba sendo vencer a diferença de altura, já consideradas as perdas, de modo a equalizar as pressões. Assim, ficamos com  $W = 80,74 \text{ J/kg}$

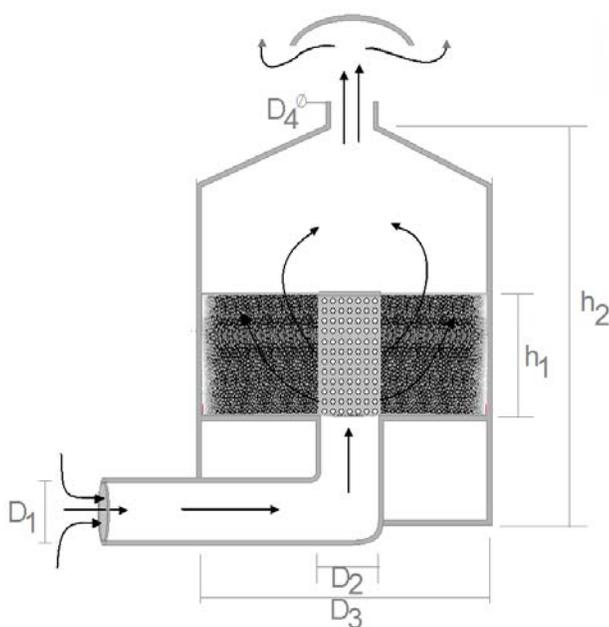
## 7.11 Ventilação na secagem de sementes

A secagem de sementes é geralmente realizada com o objetivo de evitar sua germinação e facilitar o seu armazenamento. Sementes são comumente secadas com o auxílio de ventilação de ar quente e seco, pois a umidade relativa do ar estacionário estabelece um limite mínimo para a quantidade de água que pode ser retirada de algumas sementes. Parte da energia do ar é perdida por atrito, obstáculos ou compressão. Essa perda é representada por um  $\Delta p$  na equação 7.6, que vimos ser a chamada “perda de carga” (CARVALHO, 1994). Assim, a equação de Bernoulli é adaptada como

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p,$$

onde  $p_1$  é a pressão na entrada do ar (para dentro da câmara de secagem), geralmente aumentada em relação à pressão atmosférica por meio de um ventilador,  $v_1$  é a velocidade de entrada do ar impulsionado por esse ventilador,  $h_1$  é a altura na entrada, e  $p_2$ ,  $v_2$  e  $h_2$  são as variáveis análogas àquelas na saída do ar (para fora da câmara de secagem).

**Figura 7.11:** Ilustração de uma câmara de ventilação para secagem de sementes



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

Na figura, representa-se uma câmara de ventilação de sementes. O ar ventilado para dentro da câmara por um ventilador no tubo de diâmetro  $D_1$ , sobe pelo tubo de diâmetro  $D_2$  e sai radialmente pelos furos localizados nesse tubo, numa extensão de comprimento  $h_1$ , passando depois pelas sementes localizadas entre o tubo externo de diâmetro  $D_3$  e tubo interno de diâmetro  $D_2$ , e subindo até sair pela abertura de diâmetro  $D_4$ , a uma altura  $h_2$  do solo. Como o ar pode ser facilmente comprimido e sofre muito atrito durante o caminho, a Equação de Bernoulli provavelmente ocasionará muito erro, de modo que a 7.10 deve ser usada em seu lugar.

## 7.12 Irrigação por gotejamento

O tema da perda de carga torna-se excepcionalmente importante quando se deseja fazer o dimensionamento de *sistemas de irrigação*. Um sistema de irrigação particularmente eficiente (ainda que relativamente caro) é aquele da irrigação por gotejamento. Na irrigação por gotejamento, a água é aplicada diretamente na região do sistema radicular em quantidade adequada. Essa aplicação se dá de forma frequente e lenta por meio de dispositivos chamados *emissores*, localizados em pontos selecionados ao longo das linhas de distribuição de água.

O espaçamento entre emissores na linha lateral e entre as laterais depende da descarga do emissor, do tipo de solo e da cultura. Já o tamanho e a forma do bulbo molhado dependem da descarga do gotejador, da duração da aplicação e do tipo de solo. Essa técnica de irrigação utiliza tubulações flexíveis de polietileno, nas quais são inseridos os emissores que operaram com pressões entre 5 m a 25 m, fornecendo vazões de 1 L/h a 20 L/h, gota a gota. Os emissores podem ser do tipo autocompensantes e não autocompensantes. Os primeiros se ajustam às variações de pressão fornecendo assim uma vazão constante ao longo da linha lateral, possibilitando o emprego de maiores comprimentos de linha, em contrapartida o seu emprego tem custo mais elevado. Por outro lado, nos emissores não autocompensantes, a vazão diminui à medida que há uma redução da pressão, fazendo com que as linhas sejam menores para manutenção da uniformidade de fluxo de água, outra variável importante. A escolha das características e da disposição desses componentes está incluída no dimensionamento de um sistema de irrigação por gotejamento.

Quando a água flui nas tubulações, há perda de carga. A perda de carga pode ser obtida pela Equação de Darcy-Weisbach

$$h_{perda} = \frac{f_{atD}L\bar{v}^2}{2Dg};$$

ou

$$h_{perda} = \frac{8f_{atD}LQ^2}{\pi^2D^5g},$$

obtida da anterior pela substituição da variável velocidade média pela vazão, onde

$$\bar{v} = \frac{4Q}{\pi D^2},$$

válido para tubulações.

Nas tubulações com várias saídas, a perda de carga total é igual à soma das perdas em todos os pontos. Assim, deve-se corrigir o valor da perda de carga pelo fator de ajuste de Christiansen dado por

$$F = \frac{1}{m + 1} + \frac{1}{2N} + \frac{\sqrt{m - 1}}{6N^2},$$

em que  $m$  é o expoente da vazão na equação de perda de carga,  $N$  é o número de emissores na linha lateral. Assim, a perda de carga total fica dada por

$$h_{perda;T} = F \times h_{perda}$$

Os gotejadores integrados internamente na mangueira reduzem a seção de escoamento, ocasionando uma obstrução ao fluxo de água, levando a uma perda de carga localizada. A determinação desta perda de carga é dada por

$$h_{perda;g} = \frac{1 - r^2}{r^2} \frac{\bar{v}_2^2}{2g},$$

em que  $\bar{v}_2$  é a velocidade do fluxo da água *antes do gotejador* e  $r$  é dado por

$$r = \frac{A_C}{A_S},$$

em que  $A_C$  é a área da mangueira gotejadora com o emissor e  $A_S$  é a área da mangueira gotejadora sem o emissor, ou seja,  $A_C = A_S - A_g$ , em que  $A_g$  é a seção reta do gotejador no interior do tubo.

A vazão de entrada na mangueira gotejadora ( $q$ ) é dada pela razão entre a vazão do emissor ( $Q_e$ ) e o número de emissores na linha, ou seja,

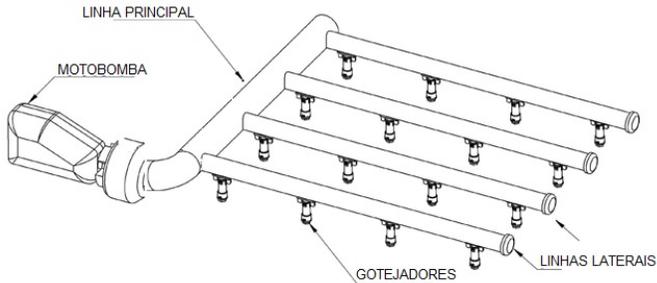
$$q = \frac{Q_e}{N},$$

em que  $N = L_\ell / \epsilon$  é o número de emissores na linha lateral,  $L_\ell$  é o comprimento da linha lateral, e  $\epsilon$  é o espaçamento entre emissores, de modo que

$$q = \frac{\epsilon \times Q_e}{L_\ell}.$$

**Problema 7.3.** Considere o projeto de irrigação por gotejamento apresentada na figura 7.12. Dimensione o projeto usando valores disponíveis no mercado para os elementos necessários em um tal projeto, voltado para a irrigação de uma pequena horta.

**Figura 7.12:** Ilustração de um projeto simplificado de irrigação por gotejamento



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

## 7.13 Anomalias da água

Se a pergunta “Qual é o líquido mais comum?” for feita a qualquer pessoa, provavelmente ela responderá “A água!”. De fato, a água pode ser considerada comum, porque recobre três quartos da superfície terrestre. Porém, a água é talvez o líquido *comum* mais difícil de descrever cientificamente, porque apresenta muitas *anomalias*, ou seja, comportamentos que os outros líquidos geralmente não apresentam.

Talvez o leitor já tenha tido a experiência de colocar uma garrafa cheia de água e tampada no congelador. Após a água congelar, ela aumenta de volume, podendo destampar a garrafa ou mesmo estourá-la se a tampa não sair facilmente. Isso é tão comum que muitos até podem pensar que seja natural que uma substância ocupe mais espaço no estado sólido que no estado líquido. Entretanto, não é isso o que ocorre na maioria dos líquidos. De forma geral, o volume diminui quando a temperatura diminui. O estado sólido de uma substância é mais fria que seu estado líquido, e as substâncias geralmente ocupam menos volume no estado sólido.

Na verdade, a própria água comporta-se dessa maneira, como os outros líquidos, *exceto* entre as temperaturas  $0^{\circ}\text{C}$  e  $4^{\circ}\text{C}$ . Nessa faixa, ao resfriar a água, o seu volume *aumenta*. Quando congela, em torno de  $0^{\circ}\text{C}$ , seu volume aumenta ainda mais, abruptamente. Se, depois de congelada, a água continuar sendo resfriada, voltará ao seu comportamento normal, diminuindo o volume.

Um fenômeno que tem ficado famoso é o chamado *Efeito Mpemba* (MPEMBA; OSBORNE, 1969), pelo qual a água morna congela mais rapidamente que a água fria quando ambas são colocadas num mesmo congelador. Esse efeito em particular talvez tenha fama mais pela forma como foi descoberto que pelo fenômeno em si. Em 1963, quando era estudante de escola secundária, *Erasto Mpemba* e seus colegas costumavam fazer sorvete usando o refrigerador da escola. Fer-

viam leite, misturavam-no com açúcar e congelavam-no. No entanto, antes de congelá-lo, sempre esperavam o leite resfriar até a temperatura ambiente, pois dizia-se que colocar algo quente no refrigerador poderia estragá-lo. Um dia, porém, devido a disputas entre os alunos para conseguir espaço no congelador, Mpemba decidiu colocar o leite ainda quente antes que ocupassem as melhores bandejas. Ao voltar uma hora e meia depois juntamente com um colega que colocara seu leite frio ao mesmo tempo que ele, notaram que somente a mistura de Mpemba estava já congelada.

Depois disso, Mpemba perguntou a colegas e professores por que o leite quente se congela mais rapidamente, mas eles faziam chacota e diziam que isso só ocorre na “Física de Mpemba”. Quando um cientista, *Dr. Osborne*, visitou a escola, Mpemba perguntou a ele também. Osborne disse que não sabia mas que faria a experiência depois que voltasse à sua universidade. Assim, notou que isso realmente ocorria entre 20 °C e 100 °C, aproximadamente. Desde então, o efeito foi estudado e comprovado por vários cientistas. Descobriu-se também que os pensadores *Aristóteles*, *Bacon* e *Descartes* também já haviam descrito o fenômeno (JENG, 1998), porém sem confirmação por experimentos bem descritos e controlados.

A *Royal Society of Chemistry* (“Real Sociedade de Química”, do *Reino Unido*) realizou uma competição para explicações do Efeito Mpemba. O prêmio foi ganho pelo croata *Nikola Bregovic*.<sup>4</sup>

Várias outras anomalias já foram observadas na água, e grande esforço é feito para criar teorias e modelos que as expliquem, inclusive no Brasil. Um artigo publicado em 2013 no *site da Fapesp* tem o seguinte título e intertítulo:<sup>5</sup> *O lado esquisito da água - Modelo teórico reproduz anomalias das moléculas de H<sub>2</sub>O, como seu superfluxo e estranha difusão em nanotubos* (PIVETTA, 2013). Esse artigo apresenta o esforço de uma física em explicar algumas anomalias da água:

Nos últimos dez anos, a física teórica Márcia Barbosa, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), vem refinando um modelo computacional que tenta explicar, de maneira mais simples, o mecanismo central que estaria por trás de algumas excentricidades da água, como as já citadas.  
(PIVETTA, 2013, on-line)

A pesquisa de Márcia Barbosa sugere que as moléculas de água formam *tetrâmeros*, grupos de quatro moléculas. Esses tetrâmeros podem se ligar uns aos outros em duas estruturas possíveis. Dessas duas, a estrutura que tem mais ligações é, ao contrário do que se espera, a que ocupa *mais* espaço. É como

<sup>4</sup><http://www.rsc.org/mpemba-competition/mpemba-winner.asp>

<sup>5</sup>FAPESP: Fundo de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

se as ligações se dessem deixando um “buraco” maior entre as moléculas. Isso pode explicar o porquê de a água aumentar de volume ao esfriar numa certa faixa de temperatura. As simulações computacionais de Márcia Barbosa, usando esse modelo, explicam um outro comportamento anômalo da água: ela flui muito mais rápido que o esperado dentro de um *nanotubo* de carbono (*superdifusão*).

Em vez de dizer que a água é *estranha*, poderíamos dizer que é *especial*. A água é essencial para a vida, como *solvente* e meio de transporte de substâncias vitais. Além disso, tem a importante função ambiental de tornar o clima mais ameno, devido ao seu atipicamente alto *calor específico*, o que significa que a água absorve grandes quantidades de calor do ambiente variando pouco a sua própria temperatura. Isso explica por que a criação de lagos artificiais pode ajudar a diminuir as variações de temperatura de uma cidade.

Para a profissão dos cientistas, pode ser muito vantajoso que um líquido tão comum seja ao mesmo tempo tão estranho: assim, há muito mais o que pesquisar.

## 7.14 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 7.1

Opção @.

### Solução 7.2

Princípio de Pascal:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} &= \frac{F_2}{A_2} \\ \Rightarrow F_1 &= \frac{A_1}{A_2} F_2 \\ \Rightarrow F_1 &= 100F_2 \end{aligned}$$

Como a força  $F_1$  é cem vezes maior que a força  $F_2$ , o deslocamento  $d_2$  será cem vezes maior que o deslocamento  $d_1$ :  $d_2 = 12 \text{ m}$ .

Pode-se chegar à mesma conclusão sem pensar em trabalho, usando apenas a incompressibilidade do fluido. O volume de fluido deslocado pelo êmbolo 1 deve ser o mesmo que desloca o êmbolo 2.

Pense um pouco sobre isso.

### Solução 7.3

$$\begin{aligned}
 P_1 &= P_2 \\
 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} &= \frac{F_2}{A_2} \\
 \Rightarrow \frac{F_1}{R_1^2} &= \frac{F_2}{R_2^2} \\
 \Rightarrow F_1 &= \frac{R_1^2}{R_2^2} F_2 \\
 &= \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 F_2 \\
 &= \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 1 \text{ N} \\
 \Rightarrow F_1 &= 1,3 \text{ N}
 \end{aligned}$$

### Solução 7.4

$$\begin{aligned}
 1 \text{ mmHg} &= 13,5951 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ mm} \\
 &= 13,5951 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \times 10^{-3} \text{ m} \\
 &= 133 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

### Solução 7.5

O resultado do segundo item é igual ao do exercício anterior multiplicado por 8:  $133 \text{ Pa} \cdot 8 = 1,06 \times 10^3 \text{ Pa}$ . O resultado do primeiro item é calculado da mesma forma com valores mais aproximados desde o início. O objetivo é verificar se há diferença significativa entre os resultados.

### Solução 7.6

Da equação 7.4, temos que  $A_1 v_1 = A_2 v_2$  e portanto  $R_1^2 v_1 = R_2^2 v_2$  e  $R_2 = \sqrt{v_1/v_2} R_1$ . Mera substituição resulta em  $R_2 = 19 \text{ cm}$ .

### Solução 7.7

Aplicação direta da equação 7.8.

**Solução 7.8**

Aplicação direta da equação 7.9.

**Solução 7.9**

Para manter os números de Reynolds do protótipo e do submarino iguais, pode-se mostrar que é preciso ter  $\rho_p = 20 \frac{\rho}{\eta} \eta_p$ . Substitua na fórmula para conferir.

## Capítulo 8

# Termodinâmica

O objeto de estudo da Termodinâmica é a transferência de calor e as transformações a ela relacionadas.

### O CAVALO-VAPOR E A EFICIÊNCIA DOS MOTORES

A Termodinâmica teve papel fundamental na *Revolução Industrial*, principalmente a partir dos melhoramentos feitos pelo escocês *James Watt* no motor a vapor, o que permitiu o rápido desenvolvimento de máquinas industriais e das ferrovias. Ao comparar a potência de sua máquina a vapor com a força de cavalos, deu origem à unidade *horsepower* - *hp* (“força/potência de cavalo”), que também originou a unidade “cavalo-vapor” - *cv*, levemente diferente do *hp* ( $1cv = 735,5W$ ,  $1hp = 745,7W$ ). O francês *Sadi Carnot* estudou a eficiência das máquinas a vapor, a fim de ajudar a França a rivalizar os britânicos nesse campo, mas seu trabalho acabou sendo sobretudo teórico, tendo idealizado o motor mais eficiente possível, que ficou conhecido como “Motor de Carnot”. Embora não seja possível construir o Motor de Carnot na prática, ele estabelece a *eficiência máxima* que um motor real pode apresentar.

## 8.1 Temperatura, equilíbrio térmico e a Lei zero da termodinâmica

A temperatura é uma grandeza física relacionada à sensação humana de frio e calor e que pode ser medida por um termômetro, aparelho com alguma propriedade que varia de maneira regular quando a substância fica mais fria ou mais quente. A definição da temperatura como a “agitação térmica das moléculas” foi estabelecida posteriormente com o desenvolvimento da chamada **Teoria cinética do gases**.

## Escalas de temperatura

As escalas de temperatura mais comuns são

- *Celsius*, que toma os pontos de congelamento e de ebulição da água como referências,  $0^{\circ}\text{C}$  (zero grau Celsius) e  $100^{\circ}\text{C}$  (cem graus Celsius),<sup>1</sup> respectivamente; essa escala também é chamada *centígrada* porque divide esse intervalo em cem partes.
- *Fahrenheit*, cuja definição foi historicamente mais complexa, e na qual os pontos de congelamento e de ebulição da água são  $32^{\circ}\text{F}$  e  $212^{\circ}\text{F}$ ;
- *Kelvin*, que toma a temperatura mais baixa possível como zero ( $0\text{ K}$ ) e também divide o intervalo entre as temperaturas de congelamento e de ebulição da água em cem partes (de  $273\text{ K}$  a  $373\text{ K}$ ).

## Relação entre intervalos de temperatura nas principais escalas

Embora a escala Kelvin obviamente não coincida com a escala Celsius, diferenças ou variações de temperatura são numericamente iguais nessas duas escalas. Dizendo de uma maneira simples, a distância entre as marcações dos graus de um termômetro são iguais em celsius e kelvins. As marcações em fahrenheit no mesmo termômetro, no entanto, teriam que ser menores. Por exemplo, a diferença entre a temperatura de congelamento e de ebulição da água tem 100 graus se medida em celsius, 100 graus também se medida em kelvins, mas 180 graus se medida em fahrenheit.

Então, os valores de uma certa diferença de temperatura  $\Delta T$  medidos nas três escalas seriam numericamente relacionados como

$$\Delta T_C = \Delta T_K = \frac{5}{9} \Delta T_F,$$

onde os índices subscritos C, K e F indicam o uso das escalas Celsius, Kelvin e Fahrenheit, respectivamente.

### Exercício 8.1 UMA NOVA ESCALA DE TEMPERATURA

Considere que um cientista descobriu uma nova substância e mediu a diferença entre as temperatura de fusão e de ebulição dela como 90 K. Se ele tivesse medido essa diferença em graus Celsius, qual teria sido a variação medida? E se tivesse medido em graus Fahrenheit?

<sup>1</sup>Os pontos de fusão (sólido para líquido) e de congelamento (líquido para sólido) de uma mesma substância não são sempre iguais, mas a diferença geralmente é muito pequena, de modo que podemos considerá-las iguais para a maioria dos efeitos práticos.

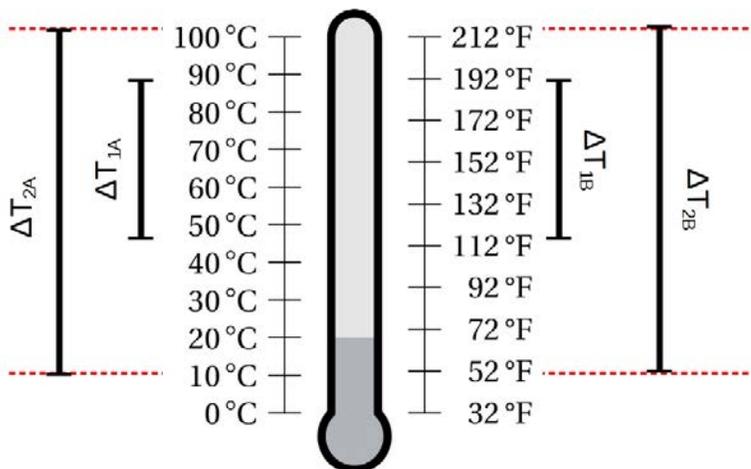
## Conversão de temperaturas entre as principais escalas

A partir de dois pontos de temperatura medidos em duas escalas lineares diferentes, pode-se converter qualquer temperatura de uma escala à outra.<sup>2</sup> Para isso, usa-se o princípio de que **a razão entre duas diferenças de temperatura é independente da escala utilizada,**

$$\frac{\Delta T_{1A}}{\Delta T_{2A}} = \frac{\Delta T_{1B}}{\Delta T_{2B}}, \quad 8.1$$

onde os índices 1 e 2 designam diferenças de temperatura e os índices A e B designam escalas (figura 8.1).

**Figura 8.1:** Representação de um termômetro com temperaturas mostradas em duas escalas  
A escala "A" é em graus Celsius e a escala "B" é em graus Fahrenheit.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, baseado em modelo para TikZ disponível em <https://tex.stackexchange.com/q/124144/91816>. Acesso em 26 set. 2018.).

<sup>2</sup>Escala linear é qualquer escala na qual uma variação na escala representa a mesma variação na grandeza medida, independentemente da localização dessa variação. Por exemplo, na temperatura em graus Celsius, isso significa que a variação de temperatura entre 0°C e 1°C é a mesma que entre 99°C e 100°C. Isso pode parecer óbvio, mas existem escalas não lineares. Por exemplo, na escala Richter, de abalos sísmicos, a variação de intensidade entre 5 e 6 é muito maior que entre 4 e 5. Coisa semelhante ocorre com o decibel, a medida de intensidade sonora.

**Exercício 8.2** VARIAÇÕES EM GRAUS CELSIUS E GRAUS FAHRENHEIT

Com base nas variações de temperatura ilustradas na figura 8.1, responda:

- Quais são os valores de  $\Delta T_{1A}$ ,  $\Delta T_{2A}$ ,  $\Delta T_{1B}$  e  $\Delta T_{2B}$ , aproximadamente?
- A variação  $\Delta T_{1A}$  é numericamente igual à variação  $\Delta T_{1B}$ ?
- A variação  $\Delta T_{1A}$  é fisicamente igual à variação  $\Delta T_{1B}$ ?
- A variação  $\Delta T_{2A}$  é numericamente igual à variação  $\Delta T_{2B}$ ?
- A variação  $\Delta T_{2A}$  é fisicamente igual à variação  $\Delta T_{2B}$ ?
- A razão  $\frac{\Delta T_{1A}}{\Delta T_{2A}}$  é igual à razão  $\frac{\Delta T_{1B}}{\Delta T_{2B}}$ ?

**Tabela 8.1:** Três temperaturas expressas nas três principais escalas

Temperatura	K	°C	°F
Zero absoluto	0	-273	-460
Congelamento da água	273	0	32
Ebulição da água	373	100	212

Fonte: elaboração dos autores.

**Exercício 8.3** CONVERSÃO ENTRE ESCALAS DE TEMPERATURA

Usando os dados da tabela 1 e o princípio de que a relação entre duas variações de temperatura distintas é a mesma independentemente da escala, faça as seguintes conversões:

- |  |  |
|--|--|
| (a) 300 K para °F;   | (e) 110°F (temperatura máxima aproximada no deserto do Kalahari no verão) para °C; |
| (b) 213 °F para K; (b) 213 °F para K;                              |  |
| (c) 300 K para °C;   | (f) 5500°C (temperatura da superfície do sol) para K.                              |
| (d) 30 °C (temperatura em Nova York na época mais quente) para °F; |  |

**Exercício 8.4** CADÊ AS FÓRMULAS?

Deduzas todas as fórmulas de conversões de temperaturas envolvendo graus Celsius, Fahrenheit e Kelvin.

**Problema 8.1.** ESCALA X

Considere uma escala de temperatura cujo grau seja representado por  $^{\circ}X$ . Se  $100^{\circ}X = 100^{\circ}C$  e  $0^{\circ}X = 0\text{ K}$  (zero absoluto), quanto vale  $50^{\circ}C$  nessa escala?

**Problema 8.2.** ESCALA RØMER

Existe uma escala de temperatura chamada “escala Rømer”. Se  $0^{\circ}C = 7,5^{\circ}Rø$  e  $100^{\circ}C = 60^{\circ}Rø$ , quanto é  $59^{\circ}C$  em  $^{\circ}Rø$ ?

- a)  $27^{\circ}Rø$
- b)  $5900^{\circ}Rø$
- c)  $38^{\circ}Rø$
- d)  $98^{\circ}Rø$
- e)  $5886^{\circ}Rø$

**Lei Zero da Termodinâmica**

Essa lei é assim chamada porque, embora tenha sido estabelecida como uma lei depois das outras (primeira, segunda e terceira), foi considerada como mais básica que elas, tendo assim recebido o numeral “zero”.<sup>3</sup> Pode-se expressar essa lei da seguinte forma:

**Axioma 8.1.** LEI ZERO DA TERMODINÂMICA

Se dois corpos (A e B) estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo (C), então eles (A e B) também estão em equilíbrio térmico entre si.

Para quem já conhece o conceito de temperatura, a lei pode parecer óbvia e desnecessária: “É claro! Estão todos na mesma temperatura!”. No entanto, do ponto de vista lógico, é essa lei que viabiliza a própria definição da grandeza “temperatura”, pela qual corpos podem ser comparados e dispostos numa escala unidimensional, do mais frio ao mais quente.

<sup>3</sup>Notavelmente, este zero é um numeral ordinal, como primeiro e segundo, e não cardinal, como um e dois. Em inglês, por exemplo, usa-se a palavra *zeroth* para denominar essa lei, algo como “zeroésima”. Há, de fato, quem prefira dizer “Zeroésima Lei da Termodinâmica” em português.

Além disso, alguém poderia pensar que o corpo C poderia ter temperaturas diferentes em duas partes. Assim, esse corpo poderia estar em equilíbrio térmico com o corpo A de um lado e com o corpo B do outro lado. Pela Lei Zero, isso não é possível, o que significa que *um corpo não estaria em equilíbrio térmico se suas partes tivessem temperaturas diferentes*.

## 8.2 Energia interna, calor, trabalho e a Primeira lei da termodinâmica

### Energia interna

Tanto o calor ganho por um gás quanto o trabalho realizado nele são tipos de energia sendo transferidos a esse gás. Onde essa energia é armazenada? Certamente, nas moléculas de gás. Sob que forma? Como energia cinética associada ao movimento dessas moléculas e energia potencial associada à interação entre elas. Se cada molécula tem vários átomos, a energia também pode ser armazenada em suas ligações (energia potencial química), no seu movimento de rotação ou vibração (energia cinética rotacional ou vibracional). Toda essa energia tomada em conjunto é chamada **energia interna** de um gás. O entendimento das propriedades macroscópicas dos gases pelo modelo de moléculas pontuais em movimento é a base da **Teoria Cinética dos Gases**.

#### **Definição 8.1.** ENERGIA INTERNA

A energia interna de um gás é a energia mecânica total de seus átomos.

### Calor

**Calor é energia térmica em trânsito.** Isso significa que calor não é um tipo de energia que possa ser atribuída a um corpo isoladamente, como uma de suas propriedades. Não se fala em “calor de um corpo” do modo que se fala de seu volume ou de sua temperatura, ou seja, não é um atributo do corpo num dado instante. Fala-se, sim, do *calor ganho ou perdido por esse corpo durante um processo*, ao interagir com outros corpos. Normalmente, calor é representado pela variável  $Q$  e, por convenção, usa-se um valor positivo quando o corpo em questão ganha calor e negativo quando perde. Por uma questão de brevidade, às vezes fala-se em “calor do corpo X” numa equação, mas deve-se ter em mente que isso significa “calor ganho ou perdido pelo corpo X durante o processo Y”.

**Definição 8.2.** CALOR

Calor é energia térmica transferida entre dois corpos. Por convenção, quando se estuda um certo corpo, atribui-se valor positivo ao calor recebido por esse corpo e valor negativo ao calor por ele perdido.

**Trabalho realizado por um gás**

A tendência natural de um gás é expandir. Quando um gás tem barreiras que limitam a sua expansão, como no caso do êmbolo de um pistão ou da membrana de um balão, ele deve realizar trabalho sobre essa barreira para expandir. Caso esse gás seja comprimido, contrariando sua tendência natural, isso significa que a barreira é que está realizando trabalho sobre o gás. Como convenção, adota-se trabalho positivo quando um gás realiza trabalho sobre a barreira, e negativo no caso recíproco. É importante ter uma expressão para o trabalho realizado por um gás em termos de suas propriedades macroscópicas, que, no nosso caso, serão volume e pressão. É mais fácil deduzir essa expressão para um gás num pistão empurrando um êmbolo com força  $F$ , causando assim um deslocamento  $d$  na mesma direção da força. Nessa situação, o trabalho é escrito como

$$\mathcal{W} = Fd.$$

A força  $F$  é  $P \cdot A$ , onde  $P$  é a pressão do gás e  $A$  é a área da superfície do êmbolo, então

$$\mathcal{W} = P \cdot A \cdot d.$$

Ora,  $A \cdot d$  é simplesmente  $\Delta V$ , a variação de volume do gás dentro do pistão, de modo que

$$\mathcal{W} = P\Delta V.$$

Embora essa expressão tenha sido deduzida para um caso específico, ela se aplica a qualquer caso em que um gás aumenta seu volume empurrando uma superfície, caso em que  $\mathcal{W}, \Delta V > 0$ , ou em que um gás diminui o seu volume ao ser empurrado por uma superfície, caso em que  $\mathcal{W}, \Delta V < 0$ .

**Primeira Lei da Termodinâmica**

A conservação da energia num sistema termodinâmico é expressa nessa lei da seguinte forma:

**Axioma 8.2.** PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

A variação da energia interna de um sistema é igual à energia recebida por transferência de calor ou realização de trabalho, menos a energia perdida pelos mesmos processos.

Matematicamente, essa lei é expressa como

$$\Delta U = Q - \mathcal{W}, \quad 8.2$$

onde  $\Delta U$  é a variação de energia interna do sistema;  $Q$  é o calor transferido do ambiente ao sistema menos o calor transferido do sistema ao ambiente; e  $\mathcal{W}$  é o trabalho realizado pelo sistema no ambiente menos o trabalho realizado pelo ambiente no sistema.

Por meio dessas definições de  $Q$  e  $\mathcal{W}$ , podemos estabelecer as seguintes associações para o cômputo total:

- $Q > 0$ : calor é recebido pelo sistema termodinâmico;<sup>4</sup>
- $Q < 0$ : calor é perdido pelo sistema termodinâmico;
- $\mathcal{W} > 0$ : trabalho é realizado pelo sistema termodinâmico;
- $\mathcal{W} < 0$ : trabalho é realizado sobre o sistema termodinâmico.

Como as convenções de positivo e negativo para  $Q$  e  $\mathcal{W}$  podem parecer confusas, eis uma imagem que pode ajudar a fixá-las na mente: quando um cilindro de motor é aquecido, seu gás se expande e empurra um pistão. Lembre-se de que, neste caso, tanto  $Q$  quanto  $\mathcal{W}$  são positivos.

**Exercício 8.5** CONSERVAÇÃO DE ENERGIA NO CILINDRO DE UM MOTOR

Se um gás ideal em um cilindro de motor recebe 40 J em calor e exerce 10 J de trabalho, em quanto muda sua energia interna?

## 8.3 O modelo do gás ideal

O chamado **modelo do gás ideal** é um modelo idealizado de um gás (também utilizado para modelar líquidos) no qual as moléculas são consideradas partículas pontuais que se movem de forma rápida, reta e em direções aleatórias, mudando sua velocidade somente a partir de choques perfeitamente elásticos entre si ou com paredes do sistema.

<sup>4</sup>O sistema termodinâmico, num pistão, seria o gás, não incluindo o êmbolo e as paredes. Dizer “calor recebido pelo sistema termodinâmico” poderia significar o calor recebido por um gás através de qualquer parte que o circunda.

Para um gás ideal, a energia cinética média das moléculas é proporcional à sua temperatura e escrita como

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} k_B T,$$

onde  $k_B$  é a chamada **constante de Boltzmann**, definida como

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

que pode ser usada como alternativa ao número de mols  $n$  e à constante  $R$ .

Como as moléculas do gás ideal são pontuais, elas não rodam nem vibram. Além disso, não há energia potencial de interação entre elas. Assim, a energia interna  $U$  do gás ideal é apenas a energia cinética média  $\langle K \rangle$  multiplicada pelo total de moléculas,

$$U = \frac{3}{2} N k_B T, \quad 8.3$$

$N$  é o número de moléculas,  $T$  é a temperatura absoluta (ou seja, em kelvins). Essa relação também é comumente escrita em termos no número de *mols*, onde um **mol** representa um total de  $6,02 \cdot 10^{23}$  moléculas:

$$U = \frac{3}{2} n R T$$

onde  $R$  é a chamada *constante dos gases ideais* ou *constante dos gases perfeitos*, definida como

$$R = 8,314 \frac{\text{JK}}{\text{mol}}.$$

Não é difícil notar que as constantes  $k_B$  e  $R$  estão relacionadas uma à outra através do *mol*.

### **Exercício 8.6** VARIAÇÃO DE TEMPERATURA E VARIAÇÃO DE ENERGIA INTERNA

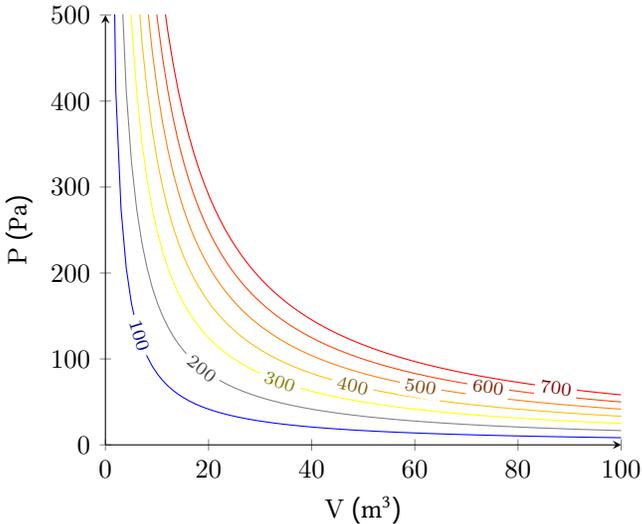
Quando um gás ideal, que não troca moléculas com o ambiente externo, tem sua temperatura triplicada, como muda sua energia interna?

Para um sistema isolado e homogêneo de gás ideal, vale a **Equação de Estado do Gás Ideal**, também conhecida como **Equação de Clapeyron**,

$$PV = nRT,$$

onde  $P$  é a pressão e  $V$  é o volume. A figura 8.2 mostra curvas num gráfico de pressão por volume (comumente chamado de “diagrama PV”), onde cada curva corresponde a uma temperatura constante, sendo por isso *isotermas*.

**Figura 8.2:** Gráfico de pressão *versus* volume para um mol de gás ideal, com o valor da temperatura em *Kelvin* mostrado em cada curva. Essas curvas são chamadas “isotermas” ou “curvas isotérmicas” porque cada uma tem um valor fixo de temperatura.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando TikZ.

### Exercício 8.7 VARIAÇÃO DE TEMPERATURA E VARIAÇÃO DE ENERGIA INTERNA

Partindo da equação de estado  $PV = Nk_B T$ , faça o que se pede nos itens a seguir:

- Considerando um sistema cujo número de moléculas não varie, deduza a **Lei Geral dos Gases Ideais**:  $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ .
- Deduza a **Lei de Boyle-Mariotte**, para um processo de um sistema a temperatura constante (isotérmico).
- Deduza a **Lei de Gay-Lussac**, para um processo de um sistema a pressão constante (isobárico).
- Deduza a **Lei de Charles**, para um processo de um sistema a volume constante (isocórico).
- Em seguida, deduza leis correspondentes a essas para um sistema com número de moléculas variável.

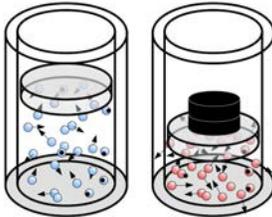
## 8.4 Processos termodinâmicos e máquinas térmicas

### Processos termodinâmicos

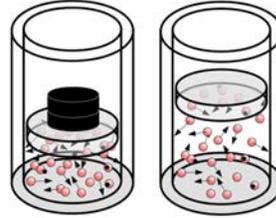
Processos termodinâmicos, ou transformações termodinâmicas, são quaisquer processos nos quais há mudança em quaisquer grandezas macroscópicas. Alguns tipos de processos recebem nomes especiais:

- Processo isotérmico: aquele no qual a temperatura do sistema não varia ( $\Delta T = 0 \equiv T_1 = T_2$ ).
- Processo isobárico: aquele no qual a pressão do sistema não varia ( $\Delta P = 0 \equiv P_1 = P_2$ ).
- Processo isocórico (isovolumétrico): aquele no qual o volume do sistema não varia ( $\Delta V = 0 \equiv V_1 = V_2$ ).
- Processo adiabático: aquele no qual não há transferência de calor para o sistema ou pelo sistema ( $Q = 0$ ).
- Processo cíclico: aquele em que o sistema volta ao estado inicial ( $\Delta U = 0$  num ciclo completo).
- Processo de expansão livre: aquele em que não há transferência de calor nem realização de trabalho ( $Q = W = 0$ ).

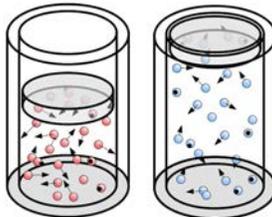
**Figura 8.3:** Exemplos de processos termodinâmicos, que poderiam ser feitos em sequência



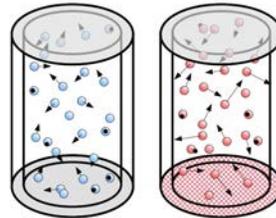
**(a)** Compressão de um gás pela colocação de um peso acima do êmbolo que o contém, causando diminuição do volume, aumento da pressão e aumento da temperatura



**(b)** Expansão isotérmica, feita ao fornecer calor ao gás ao mesmo tempo em que se retira o peso sobre o êmbolo, de modo que todo o calor recebido se transforma em trabalho sobre o peso, de modo que nenhum calor resta para aumentar a temperatura do gás. O volume aumenta e a pressão diminui



**(c)** Expansão isobárica, feita ao isolar o gás do ambiente externo e retirar todo o peso do êmbolo de forma controlada, de modo que o gás possa se expandir à pressão maior que a ambiente. O volume aumenta e a temperatura diminui



**(d)** Transformação isocórica, feita ao aquecer o gás após o êmbolo se deslocar até o volume máximo do gás

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

**Exercício 8.8** CASOS PARTICULARES DA PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

Escreva casos particulares da primeira lei da termodinâmica para

- (a) um processo adiabático;
- (b) um processo isocórico, lembrando-se de que, para haver trabalho, deve haver mudança de volume;
- (c) um processo cíclico, para o ciclo completo;
- (d) um processo de expansão livre.

**Exercício 8.9** TRABALHO REALIZADO POR PISTÕES

Calcule o trabalho realizado

- (a) na expansão de um pistão de  $0,01 \text{ m}^3$  para  $0,02 \text{ m}^3$  sob a pressão constante de  $1.000 \text{ Pa}$ ;
- (b) na expansão de um pistão de  $0,01 \text{ m}^3$  para  $0,02 \text{ m}^3$  sob a pressão constante de  $1 \text{ atm}$ ;
- (c) na expansão de um pistão de  $0,5 \text{ L}$  para  $1,0 \text{ L}$  sob a pressão constante de  $1 \text{ atm}$ ;
- (d) num processo isocórico.

**Exercício 8.10** VARIAÇÕES NUM MOL DE GÁS IDEAL

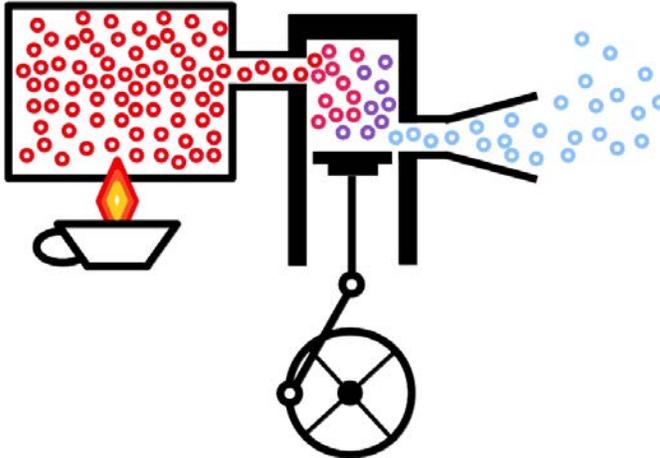
Se  $1 \text{ mol}$  de um gás ideal em um cilindro de motor diminui sua temperatura numa variação de  $1^\circ\text{C}$  numa transformação adiabática, o que ocorre do ponto de vista do trabalho realizado?

- (a) O gás realiza  $1 \text{ J}$  de trabalho no pistão.
- (b) O gás realiza  $12,47 \text{ J}$  de trabalho no pistão.
- (c) O pistão realiza  $1 \text{ J}$  de trabalho no gás.
- (d) O pistão realiza  $1,5 \text{ J}$  de trabalho no gás.
- (e) O pistão realiza  $12,47 \text{ J}$  de trabalho no gás.

## Máquinas térmicas: motores e refrigeradores

Um *motor térmico* é uma máquina que transforma calor em trabalho. Calor é energia desordenada. A função do motor é organizar essa energia de modo que seja útil. A figura 8.4 mostra um montagem simples de um motor térmico hipotético.

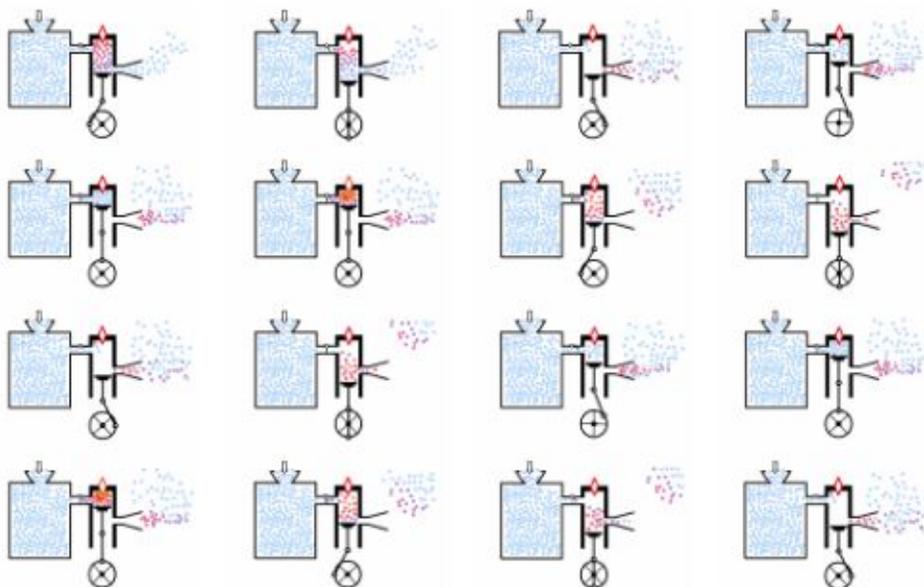
**Figura 8.4:** Ilustração de um motor simples



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Libre Office Draw*

Os chamados “motores de dois tempos” são importantes no meio rural porque são utilizados em vários equipamentos de pequeno porte, como motosserras, barcos, geradores elétricos, moedores etc. O funcionamento do motor de dois tempos é bem mais simples que o do “motor de quatro tempos”, usado em equipamentos de maior porte, como nos carros populares.

Assim, podemos usar o motor de dois tempos para explicar de forma mais simples o funcionamento básico de um motor. A figura 8.5 mostra como, num motor de dois tempos, o gás vindo do exterior e aquecido pela explosão de um combustível movimenta um êmbolo e depois é solto no ambiente. Esse pode ser considerado como um dos “tempos” do motor, sendo o outro “tempo” o período que leva o êmbolo de volta à posição inicial. Na descrição termodinâmica, o calor recebido da fonte quente (o combustível em explosão) realiza trabalho (no êmbolo do pistão) e em seguida o calor restante é perdido para uma fonte fria (o ambiente). A descrição do funcionamento dos motores é uma das principais aplicações da termodinâmica, que é a ciência que estuda mudanças de grandezas macroscópicas como temperatura, pressão e volume, de sistemas físicos em geral.

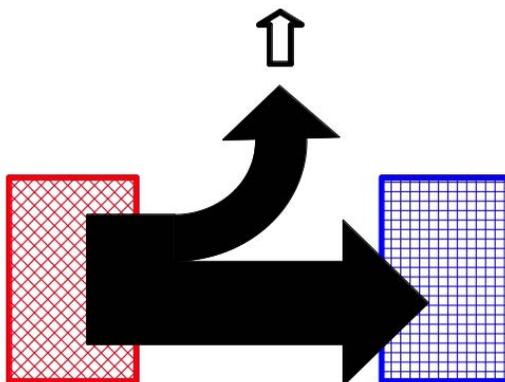
**Figura 8.5:** Ilustração simplificada de um motor de 2 tempos

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

A figura 8.6 mostra um esquema de funcionamento do motor. O motor retira calor de uma fonte quente ( $Q_Q$ ), que é dividido em trabalho realizado ( $W$ ) e calor perdido à fonte fria ( $Q_F$ ). Os esquemas A e B representam exatamente a mesma coisa. Embora o esquema A seja mais facilmente relacionável com o motor de 2 tempos por ter disposição espacial semelhante, o esquema B é mais usual na Física.

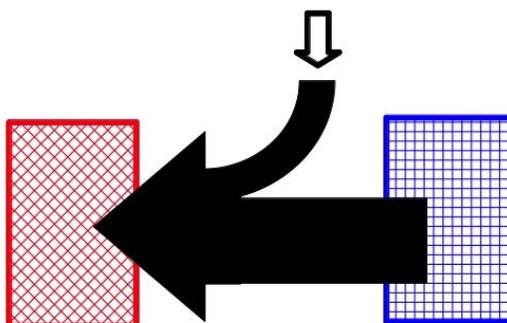
A figura 8.7 mostra um esquema de funcionamento do refrigerador. O motor retira calor de uma fonte quente ( $Q_Q$ ), que é dividido em trabalho realizado ( $W$ ) e calor perdido à fonte fria ( $Q_F$ ). O refrigerador, pelo contrário, retira calor de uma fonte fria e a cede a uma fonte quente, mediante realização de trabalho. O trabalho é necessário sobre o refrigerador pois o calor não seguiria o caminho “do frio ao quente” espontaneamente, sendo necessário ser “empurrado” nesse caminho. Por isso, um refrigerador normalmente precisa de um motor acoplado para funcionar.

**Figura 8.6:** Esquema de funcionamento do motor



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

**Figura 8.7:** Esquema de funcionamento do refrigerador



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

Pode parecer estranho estudar motores e refrigeradores numa mesma seção porque, à primeira vista, parece não haver relação especial entre eles, talvez vistos como “apenas mais dois tipos de máquinas”. No entanto, veremos que eles são fundamentais para o estudo das máquinas em geral e que um refrigerador pode ser visto como um motor operando ao contrário, desde que adequadamente identificadas as partes correspondentes em ambos.

Um **motor** é um dispositivo que transforma calor em trabalho, geralmente atuando em ciclos. A **eficiência de um motor** mede a fração do calor recebido aproveitado para a realização de trabalho e pode ser expressa como

$$e = \frac{W}{|Q_Q|} = \frac{|Q_Q| - |Q_F|}{|Q_Q|}, \quad 8.4$$

onde  $W$  é o trabalho realizado,  $Q_Q$  é a quantidade de calor recebida de uma fonte quente e  $Q_F$  é a quantidade de calor perdida numa fonte fria. A segunda igualdade pode ser entendida quando se percebe que  $W = Q_Q - Q_F$ , ou seja, o trabalho realizado é o calor que se recebe menos o que se perde.

### Exercício 8.11 EFICIÊNCIA DE UM MOTOR

Em cada ciclo, um motor recebe 28 J de uma fonte a 1000 K e transfere 16 J a uma fonte fria a 300 K. Qual é a eficiência desse motor?

Poucos segundos depois do momento em que se liga um refrigerador, sua parte interna passa a estar mais fria que o exterior, mas ele ainda deve continuar esfriando por um tempo. Assim, um refrigerador é uma máquina cujo propósito é esfriar ou manter frio algo que já está mais frio que o ambiente. Na Física, define-se um **refrigerador** como qualquer dispositivo que transfere calor de uma fonte fria a uma fonte quente, através de aplicação de trabalho no sistema. A **eficiência de um refrigerador** é definida como a quantidade de calor que se consegue retirar da fonte fria dividida pelo trabalho utilizado para isso, quantidade expressa algebricamente como

$$k = \frac{|Q_F|}{W} = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|},$$

onde  $W$  é o trabalho realizado para retirar o calor  $Q_F$  da fonte fria, que representa o interior do refrigerador, e  $Q_Q$  é o calor entregue à fonte quente, que representa o ambiente. O trabalho  $W$  deve ser gerado por um motor, de modo que todo refrigerador necessita de um motor acoplado para o seu funcionamento.

**Exercício 8.12** RENDIMENTO DE UM REFRIGERADOR

Em cada ciclo, um refrigerador retira 28 J de uma fonte fria a 0 °C, para mantê-la nessa temperatura, através da realização de um trabalho de 20 J. Qual é o rendimento desse refrigerador?

A potência de um motor normalmente é a taxa temporal de trabalho útil realizado por ele. O cálculo da potência de um motor, na prática, é uma tarefa complexa, representando uma ampla área de estudo (MIALHE, 1936; MIALHE, 2012).

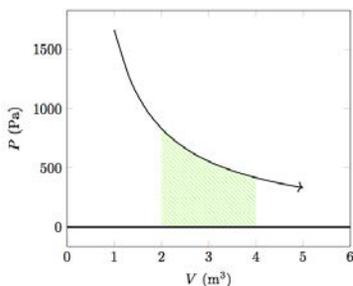
Ciclos termodinâmicos são frequentemente representados em gráficos de pressão por volume, conhecidos como *gráficos PV* ou *diagramas PV*. A partir da definição  $W = Fd$  para o trabalho, pode-se mostrar que também vale a seguinte relação para o trabalho:

$$W = P dV,$$

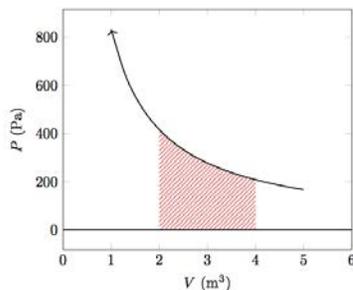
onde  $P$  é a pressão e  $dV$  é uma variação infinitesimal de volume ocorrida no instante em que o gás experimenta a aplicação dessa pressão. Graficamente, isso significa que o trabalho pode ser dado pela área abaixo da curva num gráfico PV. Esse trabalho tem valor positivo se o ciclo no gráfico PV ocorre no sentido horário e negativo se ele ocorre no sentido anti-horário.

A figura 8.8 mostra gráficos que representam transformações termodinâmicas (também chamadas de “processos termodinâmicos”). As curvas mostradas são para 1 mol de gás ideal, que ocupa 22,4 l em condições normais de temperatura e pressão (CNTP): 101.325 Pa e 273,15 K. A região mostrada no gráfico tem pressão bem mais baixa e volume alto, entre dois e quatro metros cúbicos. Lembre-se que um metro cúbico é igual a mil litros. Portanto, essa região do gráfico não é realista para representar um pistão real. Porém, *multiplicando* os valores de pressão por 1000 e *dividindo* os valores de volume por 1000 ( $P$  e  $V$  são inversamente proporcionais num gás ideal), teríamos exatamente essas mesmas formas com pressão da ordem do **quilopascal** (kPa) e temperatura da ordem do **litro**. A figura 8.8a mostra uma transformação em que o volume aumenta, ou seja, a curva vai da esquerda à direita no gráfico, e o trabalho é a área delimitada por essa curva (acima) e o eixo  $V$  (abaixo). A figura 8.8b mostra uma transformação em que o volume diminui, ou seja, a curva vai da direita à esquerda, e o trabalho é o **valor negativo** da área abaixo da curva. A figura 8.8c ilustra duas transformações termodinâmicas em sentido oposto de variação de volume. O trabalho é positivo nas partes em que  $V$  aumenta e negativo nas partes em que  $V$  diminui, de modo que as partes em comum se cancelam (se ocorrem no mesmo sistema). A figura 8.8d mostra um ciclo no sentido horário do diagrama. Em ciclos que giram no sentido horário, como o mostrado, o gás realiza trabalho total positivo, o que significa que o gás mais realiza que sofre trabalho do ambiente. Em ciclos que giram no sentido anti-horário o gás o trabalho realizado pelo gás é negativo (ou seja, ele mais sofre que realiza trabalho).

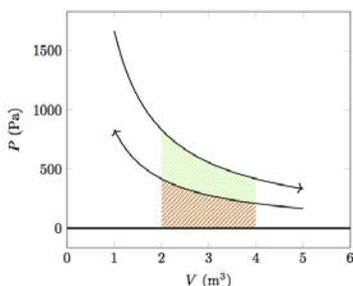
**Figura 8.8:** Diagramas PV de processos termodinâmicos em um 1 mol de gás ideal



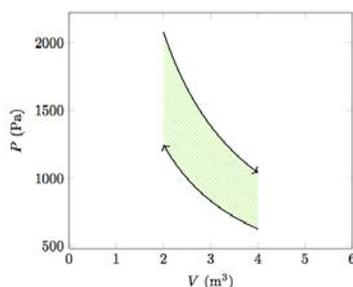
**(a)** Processo em que o volume aumenta; o trabalho é positivo, com módulo igual à área abaixo da curva



**(b)** Processo em que o volume diminui; o trabalho é negativo, com módulo igual à área abaixo da curva



**(c)** Dois processos em sentidos opostos; o trabalho resultante é a diferença entre as áreas



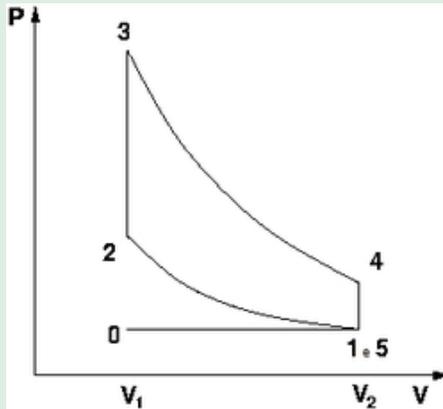
**(d)** Ciclo termodinâmico em sentido horário; o trabalho total é positivo

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *PGFPLOTS*.

**Problema 8.3.** Numa máquina, um gás sofre o seguinte ciclo: sua pressão permanece constante como  $P_1$  e seu volume decresce de  $V_1$  até  $V_2$ , então seu volume permanece como  $V_2$  e sua pressão aumenta até  $P_2$ , depois o pistão volta ao estado inicial por um processo descrito por uma reta no diagrama P-V. Se  $P_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $P_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V_1 = 20 \text{ cm}^3$  e  $V_2 = 10 \text{ cm}^3$ , qual é o trabalho realizado no ciclo? Trata-se de um motor ou um refrigerador?

**Exercício 8.13** CICLO DE OTTO

Como as etapas  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4$ ,  $4 \rightarrow 5$ ,  $5 \rightarrow 0$ , respectivamente, do ciclo de diagrama PV (pressão-volume) ilustrado na figura seguinte podem ser descritas em palavras, considerando processos que podem estar ocorrendo no pistão?



- Ⓐ Expansão isotérmica, expansão adiabática, compressão isotérmica, compressão adiabática, abertura de válvula, exaustão isocórica.
- Ⓑ Admissão isovolumétrica, compressão isotérmica, combustão isobárica, expansão isotérmica, abertura de válvula, exaustão isobárica.
- Ⓒ Admissão isobárica, compressão adiabática, combustão isocórica, expansão adiabática, abertura de válvula, exaustão isobárica.
- Ⓓ Combustão isocórica, compressão isotérmica, expansão isobárica, expansão isotérmica, fechamento de válvula, exaustão isocórica.
- Ⓔ Combustão isocórica, compressão isotérmica, expansão isobárica, expansão isotérmica, abertura de válvula, exaustão isobárica.

Ciclos termodinâmicos são conjuntos de processos termodinâmicos que se fecham em ciclos. Motores, naturalmente, atuam em ciclos, pois devem voltar ao estado original para prosseguir funcionando. Seria estranho imaginar uma máquina cujo funcionamento a fizesse passar indefinidamente por configurações nunca antes observadas.

## 8.5 Entropia e a Segunda lei da termodinâmica

### Entropia

Quando Carnot buscava algum padrão que permitisse encontrar o motor de maior eficiência possível, notou que a *quantidade de calor perdida na fonte fria dividida pela temperatura fria* era sempre maior que a *quantidade de calor ganha na fonte quente dividida pela temperatura quente*, ou seja,

$$\frac{|Q_F|}{T_F} > \frac{|Q_Q|}{T_Q} \text{ (máquina real).} \quad 8.5$$

A grandeza  $\frac{|Q|}{T}$  foi inicialmente identificada como a *entropia*, termo que Lazare Carnot, pai de Sadi Carnot (o da máquina), havia usado anteriormente como a energia perdida por fricção ou dissipação. Considere um motor no qual o gás entra quente num pistão, empurra o êmbolo (gerando trabalho) e sai para uma fonte fria. Como o gás vai da fonte quente para a fonte fria, a grandeza  $\frac{|Q_Q|}{T_Q}$  pode ser entendida como o valor inicial da entropia do gás e  $\frac{|Q_F|}{T_F}$  como o seu valor final, ao longo de um ciclo. Embora esse raciocínio seja muito ilustrativo, ele não serve para motores nos quais o mesmo gás fique preso dentro do pistão, não havendo admissão e exaustão, e apenas calor seja ganho e perdido ciclicamente por esse mesmo gás, como é o caso do *motor de Stirling*.

A falha do raciocínio é que “calor” não é uma propriedade do gás, esteja ele entrando no pistão, saindo dele ou permanecendo nele. O calor é, na verdade, “energia térmica em trânsito”, sendo transferida de um corpo a outro. O calor é definido para um corpo durante um processo, enquanto a entropia é definida como uma propriedade de um corpo num dado instante. Para que assim fosse,  $Q/T$  (positiva ou negativa) foi posteriormente identificada como a *variação da entropia* (ao invés da entropia em si):

$$\Delta S = \frac{Q}{T},$$

onde  $Q$  é o calor transferido e  $T$  é a temperatura na qual o calor se transfere. Assim, essa expressão permite trabalhar com variações da entropia, de forma similar a como se trabalha com variações de energia potencial em problemas de queda de corpo: geralmente, define-se que a energia potencial é nula no ponto mais baixo do problema, mas se fosse cavado um buraco abaixo de um objeto no nível considerado como  $U = 0$ , notar-se-ia que ele continuaria caindo, o que indica que  $U$  (energia potencial) ainda não era nula. Do mesmo modo, o símbolo  $\Delta$  da equação 8.5 indica que só podemos calcular, a partir dela, variações de entropia, não o valor absoluto da entropia em si, cujo cálculo só foi tornado possível por meio da *Terceira Lei da Termodinâmica*, que estudaremos mais adiante.

Para uma transformação de um sistema termodinâmico no qual tanto  $Q$  quanto  $T$  podem variar, a entropia é definida por

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{\delta Q}{T},$$

onde  $S_f$  e  $S_i$  são os valores da entropia nos estados final  $f$  e inicial  $i$  do sistema, respectivamente;  $\delta Q$  é uma porção *infinitesimal* (tão pequena quanto se queira) de calor transferida em cada ponto da transformação; e  $T$  é a temperatura em cada ponto.

Embora não seja evidente, a equação 8.5 estabelece que a variação da entropia total é positiva, ou seja, que a entropia aumenta. Isso pode ser entendido ao se considerar que a variação total de entropia é a soma da variação da entropia do motor e da variação da entropia do ambiente:

$$\Delta S = \Delta S_{mot} + \Delta S_{amb} \quad 8.6$$

A variação da entropia no motor deve-se a dois fatores: o calor ganho da fonte quente e o calor perdido para a fonte fria. No entanto, o interior do motor em si está sempre à temperatura  $T_Q$  (o ambiente é que está à temperatura  $T_F$ ). Assim,

$$\Delta S_{mot} = \frac{|Q_Q|}{T_Q} - \frac{|Q_F|}{T_Q}.$$

No ambiente, os termos são diferentes porque ele *recebe*  $Q_F$  e *fornece*  $Q_Q$ . Sua temperatura é mais complicada, pois há uma região *fria*, para onde o motor expelle os gases, e uma região *quente*, pela qual o calor entra no motor (num motor de automóvel, isso quer dizer que consideramos a vela como parte do ambiente). Assim,

$$\Delta S_{amb} = \frac{|Q_F|}{T_F} - \frac{|Q_Q|}{T_Q}.$$

Combinando as equações acima desde a equação 8.6, temos a expressão

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_{maq} + \Delta S_{amb} \\ &= \frac{|Q_Q|}{T_Q} - \frac{|Q_F|}{T_Q} + \frac{|Q_F|}{T_F} - \frac{|Q_Q|}{T_Q} \\ &= -\frac{|Q_F|}{T_Q} + \frac{|Q_F|}{T_F} \end{aligned}$$

que é obviamente positiva, pois  $T_F$  é menor que  $T_Q$ .

## Segunda Lei da Termodinâmica

Sendo uma das leis físicas mais discutidas e de aplicabilidade mais ampla, a segunda lei da Termodinâmica também pode ser expressa de diversas formas cuja interrelação não é evidente. Ela apareceu inicialmente quando Carnot estudava os motores teoricamente e observou que, durante o ciclo de funcionamento de um motor,

$$\frac{Q_Q}{T_Q} < \frac{Q_F}{T_F},$$

onde  $Q_Q$  é o calor recebido de uma fonte quente de calor a uma temperatura  $T_Q$  (em kelvin) e  $Q_F$  é o calor fornecido a uma fonte fria a uma temperatura  $T_F$ .

**Essa lei só é válida para temperaturas absolutas** (medidas em kelvin).

Ou seja, a grandeza  $\frac{Q}{T}$  relativa à perda de calor na fonte fria é sempre maior que a mesma grandeza relativa ao ganho de calor na fonte quente. Como o calor perdido na fonte fria não é transformado em trabalho útil, essa observação impõe uma limitação à eficiência de um motor. Nesse contexto, deu-se o nome *entropia* a essa grandeza, de modo que a Segunda Lei da Termodinâmica pode ser escrita em termos dela:

### **Axioma 8.3.** SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Em qualquer transformação termodinâmica que vai de um estado de equilíbrio para outro, a entropia do conjunto sistema + ambiente aumenta ou permanece constante.

Outras definições incluem as que se seguem (HALLIDAY, 1996a):

- NÃO É POSSÍVEL TRANSFORMAR CALOR COMPLETAMENTE EM TRABALHO, COM NENHUMA MUDANÇA OCORRENDO NO AMBIENTE.

A parte “com nenhuma mudança ocorrendo no ambiente” se refere à incapacidade de voltar ao estado inicial, ou seja, fechar o ciclo. Como motores devem operar em ciclos, isso equivale a dizer o seguinte:

- NÃO EXISTEM MOTORES PERFEITOS.
- NÃO É POSSÍVEL QUE O CALOR SEJA TRANSMITIDO DE UM CORPO PARA OUTRO, QUE ESTEJA À TEMPERATURA MAIS ALTA SEM QUE OUTRA MUDANÇA OCORRA NO AMBIENTE.

Como transmitir calor de um corpo a outro que esteja a uma temperatura mais alta faz parte do funcionamento de um refrigerador, que também opera em ciclos, isso equivale a dizer o seguinte:

- NÃO EXISTEM REFRIGERADORES PERFEITOS.

**Exercício 8.14** CALOR PERDIDO MÍNIMO POSSÍVEL

Em cada ciclo, um motor recebe 29 J de uma fonte a 1000 °C e transfere  $Q_F$  a uma fonte fria a 0 °C. Qual é o valor mínimo possível de calor perdido para a fonte fria ( $Q_F$ )?

## 8.6 Calor específico, calor latente e a Terceira lei da termodinâmica

### Calor específico

A equação 8.2 e a equação 8.3 permitem calcular a variação de temperatura de um gás ideal, dados o calor transferido e o trabalho realizado. Para substâncias que não são gases ideais, incluindo gases reais, líquidos e sólidos, essas equações não são suficientes. Num sólido cristalino, por exemplo, a energia pode ser armazenada em *fônons*, que são padrões de vibração de toda a rede cristalina em conjunto que dependem muito da estrutura cristalina de cada sólido em particular. Como os materiais são muito diferentes em sua estrutura, não há uma expressão única, como a equação 8.3 para o gás ideal, que sirva para todos os tipos de materiais.

No entanto, para a maior parte das substâncias, a variação da temperatura é proporcional ao calor transferido por unidade de massa,

$$\frac{Q}{m} \propto \Delta T$$

A constante de proporcionalidade depende da composição e estrutura da substância, e é chamada de **calor específico**:

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}.$$

Para objetos não homogêneos, ou seja, compostos de mais de uma substância, é mais apropriado trabalhar com a **capacidade térmica**,

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

A massa não é considerada no cálculo de  $C$  porque a capacidade térmica é uma propriedade de cada objeto como um todo, não da substância. Cada objeto específico tem uma capacidade térmica, enquanto cada substância tem um calor específico. Assim, fala-se em *calor específico* da água, do mercúrio, do ar etc., mas da *capacidade térmica* de uma barra, de um recipiente, de uma peça de automóvel, de uma capa protetiva etc.

## Calor latente

A equação 8.6 informa que a variação de temperatura de um corpo homogêneo é proporcional ao calor ganho ou perdido. Existe uma importante exceção para essa regra: a ***mudança de estado físico***.

Quando uma substância muda do estado sólido ao estado líquido, ela gasta energia para fazer a mudança. Portanto, enquanto um corpo está mudando de estado físico, sua temperatura permanece fixa. Durante esse processo, o corpo está nos dois estados ao mesmo tempo. Um bom exemplo é o gelo derretendo: sua superfície é líquida e seu interior é sólido.

Para toda substância, existe uma combinação de pressão e temperatura em que os três estados (sólido, líquido e gasoso) coexistem: o *ponto triplo* (também chamado de “ponto tríplice”). O ponto triplo da água é o seguinte:

- $T = 273,16 \text{ K}$  ( $0,01 \text{ °C}$ ),
- $P = 611,73 \text{ Pa}$  ( $0,0060373 \text{ atm}$ ).

Isso significa que podemos ter gelo, água na forma líquida e vapor d’água, nessa condição de temperatura e pressão. A figura 8.1 mostra como são chamados os processos de mudança de estado físico.

**Quadro 8.1:** Processos de mudança de estado físico

De ↓ para →	sólido	líquido	gasoso
sólido	-	fusão, derretimento, liquefação	sublimação
líquido	solidificação, congelamento	-	evaporação, vaporização
gasoso	sublimação	condensação	-

Fonte: elaboração dos autores.

## Terceira Lei da Termodinâmica

A lei zero permite a definição da temperatura como grandeza, mas não de seus limites. Similarmente, a segunda lei permite calcular *variações* de entropia mediante a relação entre o calor recebido e a variação de temperatura, mas não o valor *absoluto* da entropia.

Para acabar com essas limitações, existe a Terceira Lei da Termodinâmica, que estabelece que o mínimo possível da temperatura de qualquer sistema, chamado zero absoluto, coincide com o mínimo de sua entropia.

### **Axioma 8.4.** TERCEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

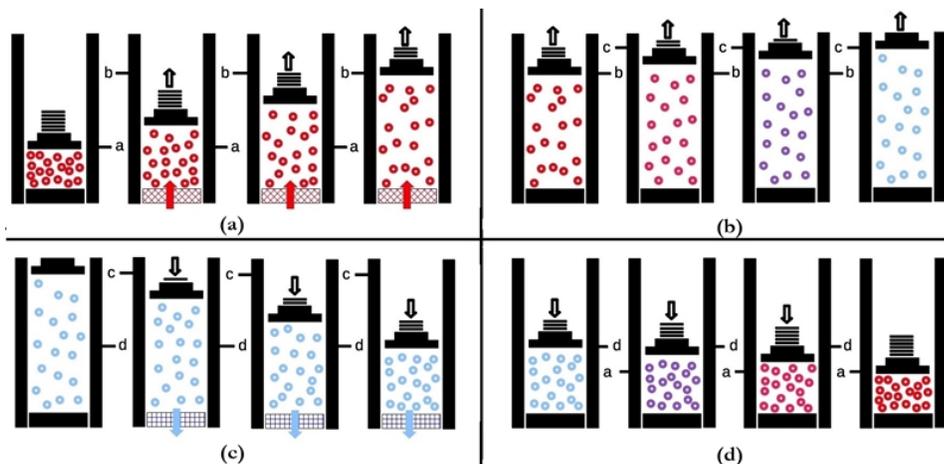
A entropia de um sistema termodinâmico tende a zero quando sua temperatura tende ao zero absoluto.

## 8.7 O ciclo de Carnot

O físico Sadi Carnot estudou os ciclos dos motores e encontrou teoricamente o ciclo mais eficiente possível atuando entre duas dadas temperaturas. Esse ciclo é chamado de **Ciclo de Carnot** e é composto pelas seguintes fases:

1. expansão isotérmica,
2. expansão adiabática,
3. compressão isotérmica, e
4. compressão adiabática,

retornando ao ponto inicial para reiniciar o ciclo.

**Figura 8.9:** Representação do ciclo de Carnot e suas quatro etapas

Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro.

O Motor de Carnot, mostrado na figura 8.9, é controlado ao retirar e colocar pesos acima do êmbolo, e ao colocar o gás em contato com fontes frias e quentes, separadas por fases de isolamentos.

Trata-se do *Ciclo de Carnot*, realizado suavemente, sem explosões ou outras mudanças bruscas, de modo a ser *reversível*. A reversão do ciclo configuraria um *Refrigerador de Carnot*.

Nenhum ciclo de motor real é perfeitamente reversível, pois envolve processos irreversíveis (combustão de um gás, exaustão do gás para a atmosfera com súbito decréscimo de pressão no pistão, etc.). O Motor de Carnot é uma idealização. Não é construído na prática.

Convém notar que, embora o mais *eficiente*, o Motor de Carnot não seria o motor mais *potente*. A potência de um motor também está relacionada à frequência em que o motor opera.

A eficiência é a porcentagem de calor convertida em trabalho, independentemente do *tempo gasto* para essa conversão. Um motor de eficiência 20% à frequência de 4.000 ciclos por minuto (ou *rotações por minuto* - RPM) é mais potente que um motor de eficiência 80% à uma frequência de 100 ciclos por minutos, caso ambos recebam a mesma quantidade de calor da fonte quente a cada ciclo.

A eficiência de um motor de Carnot é obtida substituindo-se Q por T na equação 8.4, de modo a obter

$$e_{Car} = \frac{T_Q - T_F}{T_Q}.$$

Um refrigerador de Carnot segue o mesmo ciclo do motor de Carnot, mas no sentido contrário. A eficiência de um refrigerador de Carnot é obtida por procedimento análogo e é dada por

$$k_{Car} = \frac{T_F}{T_Q - T_F}.$$

De fato, somente a máquina de Carnot é reversível. Entretanto, a máquina de Carnot é teórica e não pode ser realizada por um sistema físico concreto. Ciclos de motores e refrigeradores reais nunca coincidem totalmente. Exemplos de representações de ciclos reais são o *ciclo de Stirling*, que representa motores de dois tempos, conhecidos coletivamente como *motor de Stirling*, e o *ciclo de Otto*, que modela o funcionamento de um motor de quatro tempos, classe à qual pertence os motores mais comuns, como os dos automóveis.

### **Teorema 8.1.** EFICIÊNCIA MÁXIMA DE UM MOTOR

Nenhum motor operando entre duas dadas temperaturas pode ser mais eficiente que o *Motor de Carnot* operando entre as duas mesmas temperaturas.

**Demonstração 8.1.** Para demonstrar que o motor de Carnot é o mais eficiente possível, consideraremos que exista um motor mais eficiente e chegaremos a uma contradição, um absurdo. Esse tipo de demonstração é normalmente chamada de demonstração *ad absurdum*.

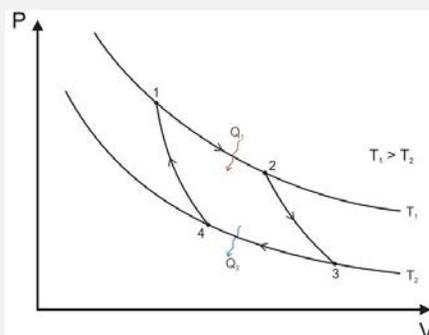
Considere então que exista um motor mais eficiente que um motor de Carnot, atuando entre as duas mesmas temperaturas. Vamos chamá-lo de “motor-mais”. Num ciclo, o motor-mais poderia gerar o mesmo trabalho  $W$  que o motor de Carnot, porém retirando da fonte quente uma quantidade de calor  $|Q_Q^+|$  que é menor que a quantidade de calor  $|Q_Q^{Car}|$  que o motor de Carnot retiraria.

Como o motor de Carnot é reversível, ele poderia ser invertido para funcionar como um refrigerador (enquanto o ciclo de um motor real nunca é revertido perfeitamente).

Conectando o motor-mais ao refrigerador de Carnot, de modo que todo o trabalho  $W$  gerado pelo motor-mais seja utilizado para fazer o refrigerador de Carnot funcionar, a máquina conjunta funcionaria como um refrigerador perfeito, pois transferiria uma quantidade de calor  $[|Q_Q^{Car}| - |Q_Q^+|]$  (que também é igual a  $[|Q_F^{Car}| - |Q_F^+|]$ ) da fonte fria à fonte quente

sem nenhum custo. Isso é proibido pela Segunda Lei da Termodinâmica, que estabelece que não existem refrigeradores perfeitos. Assim, fica provado *ad absurdum* que não existem motores mais eficientes que o motor de Carnot.

**Problema 8.4.** A figura representa um diagrama PV (pressão-volume) do ciclo de Carnot. Considerando a figura e a direção das setas, descreva os tipos de transformação que ocorrem nos caminhos 1→2, 2→3, 3→4 e 4→1, respectivamente.



- Ⓐ Compr. isotérmica, compr. isocórica, exp. isocórica, exp. adiabática.
- Ⓑ Compr. isotérmica, compr. adiabática, exp. isotérmica, exp. adiabática.
- Ⓒ Compr. isotérmica, compr. isobárica, exp. isobárica, exp. adiabática.
- Ⓓ Exp. isotérmica, exp. adiabática, compr. isotérmica, compr. adiabática.
- Ⓔ Exp. isotérmica, exp. adiabática, compr. adiabática, compr. isotérmica.

**Problema 8.5.** Um motor funciona da seguinte forma: a cada ciclo, recebe 20 J de uma fonte a 100 °C e fornece 15 J a uma fonte a 0 °C. Sobre essa situação, faça o que é pedido em cada item:

- (a) calcule o trabalho realizado em cada ciclo;
- (b) calcule a eficiência do motor;
- (c) calcule a eficiência que uma máquina de Carnot teria trabalhando entre as duas temperaturas;

- (d) diga se o motor descrito no enunciado da questão é teoricamente possível;
- (e) calcule a eficiência do refrigerador obtido pela reversão desse ciclo;
- (f) calcule a eficiência que um refrigerador de Carnot teria trabalhando entre essas duas temperaturas;
- (g) considerando que cada uma das duas etapas do ciclo seja instantânea, calcule a variação de entropia em cada ciclo;
- (h) considerando que o consumo de energia desse refrigerador seja causado apenas pelo trabalho exercido sobre ele, e que a frequência de funcionamento seja de  $1.000 \text{ rpm}$ , calcule a taxa de consumo de energia (potência gasta) em watts (W);
- (i) considerando que esse refrigerador fique ligado por 30 dias ininterruptamente, calcule o seu consumo total em  $kWh$ .

## 8.8 Entropia e desorganização

Em muitos textos, diz-se que a entropia é o “grau de desorganização do sistema”. Embora essa definição tenha utilidade, ela pode ser enganadora porque depende da ideia que se tem de “desorganização”. Essa associação é mais bem entendida pela chamada “entropia de Boltzmann”, a definição estatística da entropia. Mas, para apresentar essa definição, é preciso definir duas maneiras de se descrever o estado de um sistema termodinâmico: microestado e macroestado.

### **Definição 8.3.** MICROESTADO

O microestado de um sistema termodinâmico é o seu estado descrito por grandezas microscópicas, atribuídas às suas partículas, tais como velocidade, posição, velocidade angular...

**Definição 8.4.** MACROESTADO

O macroestado de um sistema termodinâmico é o seu estado descrito por grandezas macroscópicas, atribuídas ao sistema como um todo, tais como volume, temperatura, pressão, número de partículas etc.

Considere um sistema de gás ideal no macroestado descrito por  $V = 1,0 \text{ m}^3$ ,  $P = 1 \text{ atm}$  e  $T = 300 \text{ K}$ . Existe um número enorme de maneiras diferentes pelas quais as partículas desse gás podem se organizar sem sair desse macroestado. Esse exemplo mostra que **existem vários microestados correspondentes a um mesmo macroestado**. Com isso, podemos já entender a definição estatística da entropia.

**Definição 8.5.** ENTROPIA DE BOLTZMANN: DEFINIÇÃO ESTATÍSTICA DE ENTROPIA

A quantidade de entropia de um sistema num macroestado é proporcional ao logaritmo natural do número de microestados possíveis nesse macroestado.

Em linguagem matemática,

$$S_i = k_B \ln \Omega_i$$

onde  $S_i$  é a entropia do sistema no macroestado  $i$ ,  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $\Omega$  é o número de microestados possíveis correspondentes ao macroestado  $i$ .

A equação 8.5 está escrita na lápide sobre o túmulo de Boltzmann.

Onde a desorganização entra nessa história? Macroestados considerados mais organizados tendem a ter menos microestados associados a eles. Considere um sistema de várias partículas magnéticas sobre as quais se aplica campo magnético  $\vec{B}$  constante. Uma das grandezas macroscópicas utilizadas para descrevê-lo é a energia total de interação entre essas partículas e esse campo ( $U_B$ ). Para um certo conjunto de  $P$ ,  $V$  e  $T$  fixos, o macroestado de  $U_B$  mínimo equivale a todas as partículas com seus momentos magnéticos completamente alinhados com esse campo. Existe apenas uma maneira de estarem completamente alinhadas, então  $\Omega = 1$  para esse macroestado. Por outro lado, existem diversas maneiras de as partículas se desalinharem e aumentarem assim essa energia numa mesma quantidade. Quanto maior o desalinhamento, maior  $\Omega$ .

De forma geral, um sistema é considerado mais desorganizado se as partículas que o compõem

- estão menos alinhadas;
- estão distribuídas de forma mais homogênea pelo espaço;

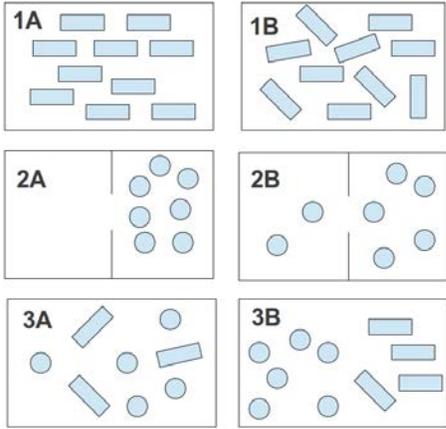
- têm suas velocidades distribuídas mais aleatoriamente;
- têm seus tipos diferentes, quando existe mais de uma qualidade de partícula, mais misturados entre si.

Alguns desses itens permitem mostrar que há uma relação enganosa entre homogeneidade e desorganização.

Um sistema de maior entropia é, de forma geral, mais homogêneo. Se as partículas de um sistema fechado estão mais concentradas de um lado que do outro, ele é menos homogêneo e mais organizado. Ou mesmo se as velocidades de suas partículas apontarem mais para a direita que para a esquerda: isso também é visto como mais organizado e menos homogêneo. Um sistema em equilíbrio térmico é o mais desorganizado possível, porque cada partícula pode estar em qualquer lugar e com qualquer velocidade, sem nenhum padrão facilmente observável, e por isso mais homogêneo. Para um certo sistema, o equilíbrio térmico entre todas as suas partes corresponde ao seu macroestado de entropia máxima.

A vida exige um certo grau de organização da matéria, e, portanto, uma entropia baixa. Um organismo vivo está constantemente fora do equilíbrio térmico, pois exige movimento ordenado de várias partes: músculos, ossos, sangue, impulsos elétricos dos nervos, tudo isso deve se mover com certa ordem. O sangue flui numa certa direção, e não homogeneamente para qualquer direção. A Segunda Lei da Termodinâmica afirma que a entropia de um sistema fechado sempre aumenta ou permanece constante. O surgimento da vida, o crescimento de um bebê, o desenvolvimento de uma planta, tudo isso parece estar aumentando a organização da matéria e, portanto, diminuindo a entropia, aparentemente violando a Segunda Lei.

No entanto, os organismos vivos não são sistemas termodinâmicos isolados, mas transferem matéria e energia ao ambiente, em forma de calor, suor, excrementos, radiação, geralmente em alto nível de entropia. A entropia de um sistema não isolado pode até diminuir, desde que a entropia do ambiente aumente mais ou na mesma quantidade, de modo que a Segunda Lei da Termodinâmica não seja violada, pois a soma das entropias do sistema e do ambiente aumenta.

**Exercício 8.15**

Considere que os sistemas da figura representem três sistemas, 1, 2 e 3, cada um mostrado em dois instantes A e B. Os retângulos e círculos representam dois tipos moléculas e as linhas representam as fronteiras do recipiente. Para cada um dos três sistemas, diga em qual dos dois instantes o sistema tem maior entropia.

## Aplicações da Termodinâmica na Agricultura e no Meio Ambiente

A Termodinâmica é, basicamente, uma poderosa teoria sobre a transferência ou transformação de energia em contextos que envolvam calor. Suas aplicações na agricultura são inúmeras e vão desde a irrigação até a conversão de energia solar em eletricidade. Nas seções a seguir, apresentamos algumas delas.

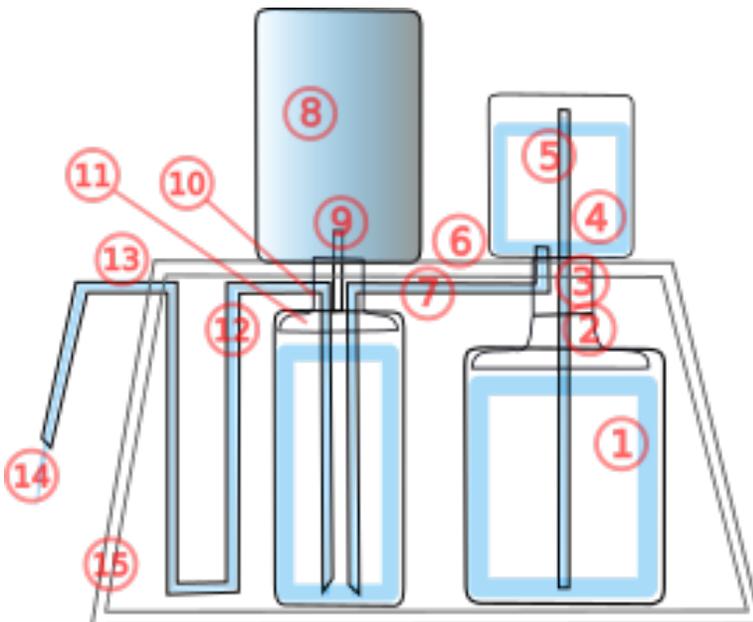
## 8.9 Irrigador automático solar

Um irrigador automático que usa apenas energia solar foi desenvolvido em 2015 pelo físico Washington Luiz de Barros Melo (MELO, 2016), pesquisador da Embrapa Instrumentação (SP). O equipamento baseia-se no simples fato de que o ar, ao ser aquecido, expande-se e pode realizar trabalho. Melo se valeu dessa propriedade para utilizar o ar como um pistão que pressiona a água para a irrigação.

Apresentamos um esquema simplificado do irrigador na figura 8.10. O irrigador funciona da seguinte maneira: quando o Sol ilumina a bomba solar (8), a temperatura interna aumenta fazendo com que haja a expansão do ar interno pelo tubo (9); a pressão do ar sobre a água no recipiente (11) impulsiona-o a sair pelos tubos (7) e (12).

A água sai pelo tubo (12) por gotejamento. A pressão interna do recipiente (11) diminui. Nisso, a água no recipiente (4) passa para o recipiente (11) para suprir a água perdida. Mas um pequeno vácuo no recipiente (4) é gerado. Este vácuo provoca a sucção da água que se encontra no reservatório (1).

**Figura 8.10:** Esquema do irrigador automático solar



Fonte: elaboração dos autores, com base em ilustração da Embrapa (MELO, 2016).

Quando se encerra a iluminação, a bomba solar (8) tende a esfriar, diminuindo ainda mais a pressão interna do recipiente (11), o que provoca um aumento do vácuo no recipiente (4), que aumenta a sucção da água do reservatório (1).

Este processo continua até o recipiente (11) completar totalmente o seu volume de água. O sistema é, de fato, bastante sensível. Se a garrafa recebe sombra, o gotejamento para, e, ao deixar o sol bater novamente, a água volta a gotejar.

Fazem parte do invento outros dois depósitos de água: uma garrafa rígida também emborcada que desempenha a função de caixa d'água para manter abastecida a garrafa do gotejamento, e um recipiente maior conectado à garrafa-caixa-d'água que armazena um volume maior de água que será usado por todo o sistema. Os tubos que interligam as garrafas podem ser de equipos de soro hospitalar, por exemplo. Também compõe o sistema um distribuidor que pode ser construído com garrafa PET e do qual saem as tubulações que farão a irrigação.

## 8.10 Controle térmico do ambiente na pecuária

Os principais animais de produção de carne, leite, lã, pele e ovos são *homeotérmicos*. Os animais homeotérmicos tendem a manter a temperatura corporal dentro de certos limites relativamente estreitos, mesmo que a temperatura ambiente flutue e que sua atividade varie intensamente.<sup>5</sup> Para os animais homeotérmicos manterem a temperatura corporal relativamente constante, eles necessitam, através de variações fisiológicas, comportamentais e metabólicas, produzir calor (para aumentar a temperatura corporal quando a temperatura diminui) ou perder calor para o meio (diminuir a temperatura corporal no estresse calórico).

A zona de conforto térmico é o intervalo de temperatura no qual os animais homeotérmicos não precisam produzir ou perder temperatura corporal e seu metabolismo é mínimo. Quando a temperatura do ambiente ultrapassa o limite superior da zona de conforto, os animais reagem através da dissipação de calor utilizando os mecanismos sensíveis como condução, convecção, radiação e mecanismos latentes de evaporação. Os mecanismos de radiação, condução e convecção dependem da existência de gradiente de temperatura entre o animal e o ambiente.

- Radiação: é a transferência de energia térmica de um corpo a outro através de ondas eletromagnéticas.

<sup>5</sup>Informações retiradas de: [www.uel.br/pessoal/ambridi/Bioclimatologia/\\_arquivos](http://www.uel.br/pessoal/ambridi/Bioclimatologia/_arquivos). Acesso em 3 jan. 2017.

- **Condução:** é o mecanismo de transferência de energia térmica entre corpos por contato direto com substâncias frias ou quentes, incluindo ar, água e materiais sólidos.
- **Convecção:** é a perda de calor através de uma corrente de fluido (líquido ou gasoso) que absorve energia térmica em um dado local e que então se desloca para outro local, onde se mistura com porções mais frias do fluido e para elas transfere a energia, como ocorre na ventilação.
- **Evaporação:** é a troca de calor através da mudança do estado da água de líquido para gasoso, sendo este processo carreador de calor para fora do corpo animal. À medida que aumenta a umidade relativa do ar, a perda de calor por evaporação diminui.

No início dos anos 1980, um frango com 70 dias de idade atingia aproximadamente 2,0 kg de peso vivo, com conversão alimentar média de 3,5.<sup>6</sup> Atualmente, em apenas 42 dias é possível se obter frangos com 2,3 kg de peso vivo e conversão alimentar de 1,8 (BUENO; ROSSI, 2006).

A alta produção de carne por área em curto espaço de tempo se deve aos avanços científicos conquistados na genética, nutrição, sanidade e manejo, fazendo com que a produção de frangos de corte atingisse um patamar elevado quanto à produção animal. Muito desse avanço se deu na maneira como as instalações avícolas passaram a ser consideradas, em particular no que concerne ao *conforto térmico* para frangos de corte.

Ainda assim, no Brasil, as instalações de modo geral são inadequadamente dimensionadas quanto à questão térmica, gerando desconforto térmico e aumento de doenças ligadas à perda da qualidade do ar. Ante esta constatação, encontram-se altas taxas de mortalidade no período final de criação, diminuição dos índices de produtividade no segmento de corte e aumento dos gastos com energia elétrica nos períodos quentes do ano. Tal fato se vem agravando à medida que a densidade de criação é aumentada e, também, pelo fato de que a ave vem sendo desenvolvida geneticamente, tornando-se mais precoce e produtiva.

Isso se deve ao fato de a ave adulta se adaptar melhor a ambientes frios, pois seu sistema termorregulador é mais adequado para reter calor que para dissipá-lo. Quando exposta ao estresse térmico por elevadas temperaturas, a ave apresenta diminuição no consumo de ração e, em consequência, redução no ganho de peso e pior conversão alimentar. Nesse contexto, a climatização se torna uma saída estratégica para se criar uma situação de certa independência do clima externo. Os valores ideais de temperatura média do ar e de umidade relativa do ar são, respectivamente, 20°C e de 60 a 70%.

<sup>6</sup> Conversão alimentar é a quantidade de ração ( kg ), consumida em uma granja dividida por todo o peso ( kg ) dos animais vendidos no mesmo período.

A zona de conforto térmico para os bovinos, além da umidade relativa do ar e da radiação solar, depende da espécie, da adaptação da raça, potencial produtivo, estágio de lactação etc. Em média, a zona de conforto situa-se entre 4 e 21°C.

Para tentar manter o conforto térmico, os bovinos procuram a sombra, aumentam o consumo de água, reduzem o consumo de alimento, permanecem em pé, ao invés de se deitar, a não ser que chão esteja molhado, aumentam a frequência respiratória, produzem saliva em excesso, aumentam a sudorese e a vasodilatação periférica.

Assim, resta claro que a compreensão dos princípios termodinâmicos podem ajudar no dimensionamento térmico adequado para o processo de criação de animais.

## 8.11 Condução de calor

Do que foi dito na seção anterior, fica claro que é importante saber dimensionar termodinamicamente um sistema (e.g. um galpão para criação de aves) de modo a sugerir alternativas para a manutenção de sua temperatura interna.

Podemos tratar a condução de calor de modo relativamente simples quando o problema pode ser modelado por uma temperatura que depende apenas da posição e do tempo – um problema unidimensional, com relação ao espaço. Ainda que seja uma simplificação, já que o problema é realmente tridimensional, esse tipo de tratamento pode ser aplicado em muitos dos problemas importantes em aplicações de engenharia.

Por exemplo, no caso da transferência de calor em um sistema que consiste de um fluido que escoar ao longo de um tubo, a temperatura da parede do tubo pode ser considerada função apenas do raio do tubo, se o fluido escoar uniformemente ao longo de toda a superfície interna e se o tubo não for longo o suficiente para que ocorram grandes variações de temperatura do fluido devido à transferência de calor.

O fluxo de calor através de paredes também pode ser considerada sob o modelo unidimensional. Essa é uma situação que se aplica evidentemente às situações apresentadas na seção anterior para a criação de aves.

Há uma lei física que permite calcular a razão pela qual o calor é transferido de uma parte do sistema para outra em função da maneira como a temperatura varia ao longo da direção relevante (e.g. ao longo do raio de um tubo, ou ao longo de uma barra com uma das extremidades mantidas a certa temperatura). Essa lei pode ser escrita, em forma matemática, como

$$\frac{dq}{dt} = -kA \frac{dT}{dx},$$

em que  $q(x, t)$  (em J) representa o calor transferido em um intervalo  $\Delta x$  (em m), no intervalo de tempo  $\Delta t$  (em s),  $T(x, t)$  (em K) é a temperatura,  $k$  é uma constante (sob certas condições que veremos a seguir) e  $A$  ( $m^2$ ) é a área da seção através da qual o calor flui por condução. O sinal negativo na equação anterior deve-se ao fato de que a direção do aumento da distância  $x$  deve ser a direção do fluxo de calor positivo, mas como o calor flui do ponto de temperatura mais alta para o de temperatura mais baixa (gradiente negativo), o fluxo só será positivo se multiplicarmos o gradiente por  $-1$ .

A constante  $k$  é dada em unidades  $W/m.K$ , no sistema SI. Se o valor de  $k$  é elevado, o material é considerado condutor térmico; caso contrário, é considerado um isolante térmico. Com relação à temperatura, em alguns materiais como o alumínio e o cobre, o  $k$  varia muito pouco com a temperatura (é realmente uma constante, em termos práticos), porém, em outros materiais o  $k$  pode variar significativamente com a temperatura (não sendo exatamente uma constante). Nesses casos, adota-se como solução de engenharia um valor médio de  $k$  em um intervalo de temperatura.

Assim, se temos uma parede e uma transferência em regime permanente, o calor transferido não varia com o tempo. Como a área transversal da parede é uniforme e a condutividade  $k$  é um valor médio, a equação (8.11) fornece

$$\frac{dq}{dt} = \frac{kA}{L} \Delta T,$$

em que  $L$  é a dimensão na direção perpendicular à área  $A$  da parede e  $\Delta T = T_2 - T_1$  representa a variação de temperatura entre o exterior e o interior da parede.

**Exemplo 8.1.** Vinte equipamentos condicionadores de ar devem manter um galpão, de  $40m$  de comprimento,  $40 m$  de largura e  $3 m$  de altura a  $22^\circ C$ . As paredes da sala, de  $25 cm$  de espessura, são feitas de tijolos com condutividade térmica de  $9,763 W/m.^{\circ}C$  e a área das janelas podem ser consideradas desprezíveis. A face externa das paredes pode estar até a  $40^\circ C$  em um dia de verão. Desprezando a troca de calor pelo piso e pelo teto, que estão bem isolados, pede-se o calor a ser extraído da sala pelos condicionadores. Refaça seus cálculos assumindo agora que as paredes são feitas de isopor, cujo  $k = 0,029 W/m.^{\circ}C$

A área de cada parede é dada por  $A = 120 m^2$ , com  $L = 0,25 m$  e  $\Delta T = 18^\circ C$ . Como são quatro paredes, temos que  $A_T = 480 m^2$ . Assim,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{9,763 \times 480}{0,25} \times 18 = 337397,76W$$

ou  $\dot{q} = 452,46 \text{ hp}$ . Cada condicionador de ar deve ter uma potência igual a  $22 \text{ hp}$ . Se usássemos isopor nas paredes, ficaríamos com

$$\dot{q} = \frac{0,029 \times 480}{0,25} \times 18 = 1.004,16 \text{ W}$$

ou  $\dot{q} = 1,35 \text{ hp}$ . Neste caso, apenas um condicionador de ar com potência igual a  $3.500 \text{ btu/h}$  seria suficiente.

A introdução do conceito de *resistência térmica* pode nos ajudar a tornar ainda mais efetiva nossa capacidade de dimensionamento térmico. De fato, a partir da equação (8.11), podemos escrever

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\Delta T}{L/kA},$$

e definir a resistência térmica  $R$  como sendo  $R = \frac{kA}{L}$ , que o leitor poderá lembrar ser equivalente matematicamente à expressão da resistência elétrica no âmbito da Lei de Ohm de circuitos elétricos.

Assim, o conceito de resistência térmica permite tratar associação de paredes como associação de resistores elétricos (do ponto de vista matemático). Basicamente, a resistência térmica é a oposição que um material faz à condução do calor em seu interior, do mesmo jeito que a resistência elétrica é a oposição que um resistor faz à condução da corrente em seu interior.

Assim, em associação de camadas de paredes *em série* podemos considerar a resistência equivalente da parede completa como sendo simplesmente a soma das resistências de cada uma das camadas da parede. Da mesma maneira, a associação de paredes com janelas, por exemplo, pode ser tratada como a associação *paralelo* de elementos condutores de calor e o inverso da resistência equivalente do sistema completo será a soma dos inversos de cada uma das resistências térmicas relativas a estes elementos.

Com isso, análises mais precisas de situações concretas, que envolvem vários elementos na constituição de uma parede (e.g. parede com uma camada externa e uma interna de isopor com uma camada central de tijolos).

### Exercício 8.16

(Necessita cálculo diferencial e integral) Obter a equação para o fluxo de calor em uma parede plana na qual a condutividade térmica ( $k$ ) varia com a temperatura de acordo com a seguinte função:  $k = a + b.T$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes.

## 8.12 Controle da temperatura do solo

A temperatura do solo é um importante fator para o desenvolvimento das plantas. O solo tem a capacidade de armazenar energia térmica e transferi-la na forma de calor. Tal capacidade é determinada pelas suas propriedades térmicas (parcialmente controláveis) e pelas condições meteorológicas que, por sua vez, influenciam todos os processos químicos, físicos e biológicos do solo.

A depender da temperatura do solo, sua atividade microbiológica poderá ser interrompida, as sementes poderão não germinar e as plantas não se desenvolverem. As propriedades físicas da água e do ar do solo, bem como seus movimentos e disponibilidade no solo, além de muitas reações químicas que liberam nutrientes para as plantas, são influenciados pela temperatura do solo. Ademais, o calor armazenado próximo da superfície do solo tem grande efeito na evaporação.

Os processos de transferência de calor no solo podem ocorrer por condução e convecção. A temperatura do solo é consequência desses processos e das trocas de calor entre a superfície do solo com a atmosfera. Nas trocas de calor entre a superfície do solo com a atmosfera ocorre, ainda a radiação.

A condução é geralmente o processo mais importante de transferência de calor nos solos. Esse processo é governado pelas propriedades térmicas do solo, que por sua vez são tremendamente dependentes da umidade do solo.

A quantidade de calor que pode ser transmitida por condução no solo depende: (a) da capacidade de ele transmitir calor, ou seja, da sua condutividade térmica; (b) da quantidade de energia térmica que uma massa ou volume de solo armazena antes que a sua temperatura se eleve (calor específico), refletindo a capacidade do solo de atuar como um reservatório de energia.

Uma maneira de se controlar a temperatura do solo é fazendo o uso das *coberturas térmicas*. As coberturas térmicas são capazes de modificar o regime térmico dos solos, tanto para aumentar quanto para diminuir a temperatura. Essas coberturas podem ser constituídas de materiais de diferentes espessuras e propriedades térmicas, permitindo um vasto controle da temperatura do solo.

O uso de capas secas de areia sobre a superfície do solo, por exemplo, leva a baixa condutividade térmica e alto coeficiente de reflexão (albedo), determinando (a) uma redução da amplitude de variação da temperatura abaixo da capa, (b) uma prevenção das perdas por evaporação, já que a condutividade hidráulica na cobertura também diminui.

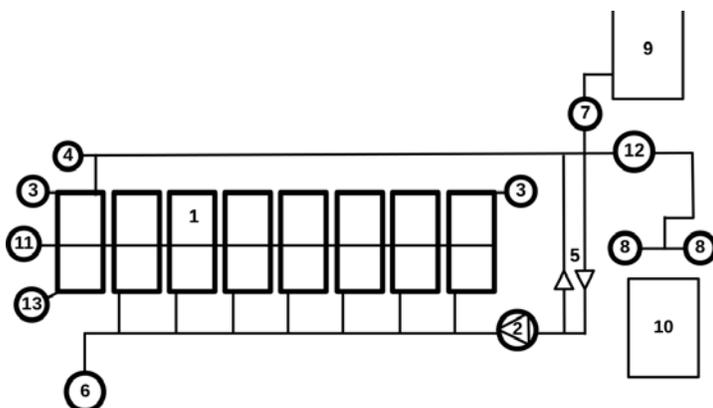
Coberturas com grande quantidade de ar, como as coberturas de matéria vegetal, geram um solo com temperaturas mais amenas. Pela mesma razão, a superfície seca dos solos arados também pode manter o perfil de temperatura do solo mais uniforme do que se ele fosse compactado.

## 8.13 Controle de pragas na irrigação por aquecimento da água

Na seção anterior vimos o uso de um mecanismo de *condução* de calor que pode ser usado para estabilizar a temperatura de criadouros. Nesta seção iremos abordar o mecanismo de *convecção*, que é aquele em que há *transporte de matéria* de um ponto a outro do sistema. Um contexto natural em que pode ocorrer o fenômeno de convecção é o processo de irrigação.

A adoção de irrigação das lavouras pode ter um importante impacto na disseminação de microrganismos fitopatogênicos em viveiros e culturas irrigadas, tanto de frutíferas como de hortaliças, ornamentais e outras plantas, uma vez que os propágulos desses microrganismos na maioria fungos, podem ser transportados pela água de irrigação.

**Figura 8.11:** Esquema de um equipamento para controle de fitopatogênicos por meio de aquecimento solar da água de irrigação



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, com base em ilustração da Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental (BRAGA, 2001).

O aquecimento solar da água é uma técnica útil para a desinfestação da água utilizada para irrigação e outras finalidades agrícolas, uma vez que pode operar na faixa de temperatura de 35 a 60°C, letal para a maioria dos microrganismos fitopatogênicos.

O uso de aquecimento solar faz uso do dispositivo básico de captação de energia solar sendo comercializado atualmente, que é o coletor plano, que pode ser usado para aquecimento do ar ou de líquidos. Essa aplicação supõe processos térmicos a temperaturas relativamente baixas, cujos rendimentos

térmicos apresentem valores médios da ordem de 45 a 50%, quando operam na faixa de temperaturas de 50 a 60°C, sob radiação solar intensa. Essa faixa de temperatura, quando aplicada durante o tempo de 10 min, é letal para a maioria absoluta dos microrganismos fitopatogênicos.

Pode-se seguir um esquema técnico para montagem, instalação e operação do equipamento básico como mostrado na figura 8.11. Esse esquema sugere o funcionamento em quatro fases:

- Fase 1: transferência da massa de água do reservatório de alimentação para os coletores solares;
- Fase 2: preaquecimento da massa de água nos coletores solares, por processo de convecção natural, a partir da sua temperatura inicial ( $T_i$ ) no reservatório de alimentação (9) até a temperatura intermediária ( $T_{int}$ ) de acionamento da motobomba (2), programada no monitor termostático Mt1D(B) com o diferencial de 10°C, com relação à temperatura final ( $T_f$ ) de operação.
- Fase 3: complementar a dinâmica de aquecimento da massa de água, por processo de convecção forçada, em circuito fechado, através dos coletores solares e induzida pela motobomba (2) a partir da temperatura intermediária ( $T_{int}$ ), até a temperatura final de operação ( $T_f$ ) de processamento, programada no controlador termostático (MT2D);
- Fase 4: descarga e carga simultâneas da massa de água, respectivamente, já processada (quente) dos coletores ao reservatório de coleta (10) e a processar (fria), do reservatório de alimentação (9) para coletores; operações comandadas pelo monitor termostático (MT2D) que também monitoriza as válvulas controladoras de fluxo de água no equipamento.

Testes realizados com diversos fitopatógenos indicaram controle eficiente de todos eles. A maioria absoluta dos fungos não sobrevivem além de 40 a 45°C, com tempo médio de exposição de 2,5 min, evidenciando-se a viabilidade prática da sua utilização.

Esse arranjo tem uma característica interessante, quando o analisamos à luz da noção de *rendimento*. Vimos que o rendimento de uma máquina térmica poderia ser definido como sendo

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

em que  $Q_2$  é o calor recebido pela fonte fria (a água) e  $Q_1$  é o calor cedido pela fonte quente (o sistema de aquecimento). A diferença  $Q_1 - Q_2$  é o trabalho realizado pelo sistema. Evidentemente, a situação aqui é mais complexa, pois há uma situação de convecção natural (quando o aquecimento da água faz com que ela flua mais rapidamente, implicando realização de trabalho sobre a massa da água) e uma situação de convecção forçada (quando a motobomba realiza trabalho sobre a massa de água para que ela se mova).

Seja como for, nesse caso a variável que importa não é o trabalho realizado sobre a massa de água, mas a relação de aproveitamento do calor obtido pelo sistema pela sua exposição ao sol  $Q_1$  e o calor que o sistema transfere para a água  $Q_2$ . Quanto maior for essa relação, melhor o funcionamento da presente *máquina térmica*.

Assim, o rendimento real do sistema deve ser calculado pela equação

$$\eta' = \frac{Q_2}{Q_1},$$

em que  $Q_1$  é a radiação solar transferida ao plano dos coletores (na unidade de tempo, que pode ser o dia ou a hora) e  $Q_2$  é a quantidade de calor transferida para aquecer a quantidade de massa de água que passa pelos coletores (na mesma unidade de tempo).

Com essa definição, vemos que podemos calcular  $Q_2$  como sendo dada por

$$Q_2 = m_h c_{\text{H}_2\text{O}} (T_2 - T_1),$$

em que  $m_h$  é a massa de água processada na unidade de tempo adotada,  $c_{\text{H}_2\text{O}}$  é o calor específico da água,  $T_2$  é a temperatura da massa de água quando terminou de passar pelos coletores, e  $T_1$  é a temperatura com que a massa de água entrou nos coletores

Assim, outra variável importante para o dimensionamento do sistema é o *tempo de exposição* da massa de água no sistema (no interior dos coletores), que está associada à vazão. Uma vazão muito alta fará com que a água passe muito rapidamente pelos coletores, absorvendo destes pouca energia e esquentando menos.

É, pois, importante saber, para se dimensionar adequadamente o sistema, qual a vazão que vai permitir ao sistema liberar a massa de água associada à capacidade dos coletores na temperatura desejada.

Essa situação permite notar uma característica importante das aplicações práticas da Física. Ela evidentemente envolve não apenas elementos da Termodinâmica, mas também da Física de Fluidos. A Física estuda essas áreas de modo independente, pois busca seus princípios próprios, mas os contextos de aplicação, quase sempre, as articulam.

**Exemplo 8.2.** Considere que os coletores solares têm uma capacidade igual a  $1,5 \text{ kg/m}^2$  de água (usamos o fato de que os coletores são planos, de modo que se pode usar apenas o  $m^2$ ). O sistema está exposto a uma radiação solar incidente sobre os coletores igual a  $2.314,69 \text{ kJ/m}^2 \cdot h$ . Qual vazão  $Q_v = m_h \text{ kg/m}^2 \cdot h$  deve ser imposta ao sistema para que ele apresente um rendimento aproximado de 50% gerando uma temperatura de saída da massa de água igual a  $45^\circ\text{C}$ , sabendo que a temperatura de entrada é  $25^\circ\text{C}$ ? Qual será, nesse caso, o tempo de exposição médio? (O calor específico da água é  $4,19 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$ )

Temos que a eficiência térmica do sistema é dada pela expressão 8.13. Com o uso da equação 8.13 ficamos com a eficiência dada por

$$\eta' = \frac{m_h c_{\text{H}_2\text{O}} (T_2 - T_1)}{Q_1}$$

de modo que

$$0,5 = \frac{m_h \times 4,19 \times 20}{2.314,69} \rightarrow m_h = 13,81 \text{ kg/m}^2 \cdot h,$$

a vazão no sistema. Com essa vazão, o tempo de exposição fica

$$T_{exp} = \frac{1,5}{m_h} = \frac{1,5}{13,81} h = 0,11 h \approx 6,6 \text{ min.}$$

(compare esses valores com os apresentados na tabela 1 de Braga et al. (BRAGA, 2001) para o mês de janeiro, com algumas adaptações).

Note que, do ponto de vista da Física de Fluidos, se fôssemos dimensionar o sistema tubular, teríamos que levar em conta todo o processo de perda de carga implicado no uso de tubulações com determinada rugosidade interna, joelhos, além das perdas de carga ocasionadas pelos próprios coletores (vistos como uma unidade, como uma válvula, por exemplo). Mas isso já sabemos fazer.

## 8.14 Uso de cálculo diferencial e integral

A Primeira Lei da Termodinâmica (equação 8.2) é frequentemente escrita na forma

$$\delta Q = dU + \delta W \quad 8.7$$

onde o símbolo  $\delta$  representa uma “diferencial inexata”. Como variações de  $Q$  e  $W$  não dependem somente dos estados inicial e final de uma transformação do sistema, mas também do *caminho* pelo qual a transformação ocorre, essas grandezas não podem ser definidas como funções não ambíguas das variáveis de estado.

No entanto, para processos termodinâmicos *reversíveis*, considera-se que valem as relações  $\delta Q = TdS$  e  $\delta W = PdV$ , de modo que a equação 8.7 pode ser escrita como

$$TdS = dU + PdV.$$

Para processos isocóricos, temos  $dV = 0$ , de modo que

$$T = \frac{dU}{dS},$$

equação de grande importância teórica por permitir definir a temperatura de sistemas a volume constante em função de grandezas microscópicas, uma vez que a energia interna  $U$  pode ser entendida como a soma da energia mecânica de todos os átomos do sistema, e  $S$  está relacionada com os microestados do sistema através da equação 8.5.

## 8.15 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 8.1

Pela equação 8.1, essa variação seria igual a  $90^\circ\text{C}$  ou  $162^\circ\text{F}$ .

### Solução 8.2

- $\Delta T_{1A} \approx 45^\circ\text{C}$ ,  $\Delta T_{2A} \approx 90^\circ\text{C}$ ,  $\Delta T_{1B} \approx 80^\circ\text{F}$ ,  $\Delta T_{2B} \approx 160^\circ\text{F}$ .
- Não.
- Sim.
- Não.
- Sim.
- Sim.

**Solução 8.3**

O enunciado instrui a usar o princípio expresso na equação 8.1, portanto nem pense em usar fórmulas prontas de conversão. O objetivo é entender o princípio geral que pode ser usado para conversões entre quaisquer escalas (não só as mais conhecidas) e, além disso, saber de onde essas fórmulas vêm.

Para o primeiro item, escolhamos usar as temperaturas de ebulição e de congelamento da água para fazer os cálculos:

$$(a) \frac{\Delta T_{1A}}{\Delta T_{2A}} = \frac{\Delta T_{1B}}{\Delta T_{2B}}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_F - 32^\circ\text{F}}{212^\circ\text{F} - 32^\circ\text{F}} &= \frac{300\text{ K} - 273\text{ K}}{373\text{ K} - 273\text{ K}} \\ \frac{T_F - 32^\circ\text{F}}{180^\circ\text{F}} &= \frac{27\text{ K}}{100\text{ K}} \\ T_F - 32^\circ\text{F} &= \frac{27\text{ K} \cdot 180^\circ\text{F}}{100\text{ K}} \\ T_F &= \frac{27\text{ K} \cdot 180^\circ\text{F}}{100\text{ K}} + 32^\circ\text{F} \\ T_F &= 80,6^\circ\text{F} \end{aligned}$$

Agora tente fazer os outros itens!

**Solução 8.4**

De Celsius para Fahrenheit, por exemplo, fica assim:

$$(a) \frac{\Delta T_{1A}}{\Delta T_{2A}} = \frac{\Delta T_{1B}}{\Delta T_{2B}}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_F - 32^\circ\text{F}}{212^\circ\text{F} - 32^\circ\text{F}} &= \frac{T_C - 0^\circ\text{C}}{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}} \\ \frac{T_F - 32^\circ\text{F}}{180^\circ\text{F}} &= \frac{T_C}{100^\circ\text{C}} \\ T_F - 32^\circ\text{F} &= \frac{T_C \cdot 180^\circ\text{F}}{100^\circ\text{C}} \\ T_F &= \frac{T_C \cdot 180^\circ\text{F}}{100^\circ\text{C}} + 32^\circ\text{F} \\ T_F &= \frac{9^\circ\text{F}}{5^\circ\text{C}} T_C + 32^\circ\text{F} \end{aligned}$$

Agora tente fazer os outros itens!

**Solução 8.5**

Em 30 J, pela conservação da energia (primeira lei da termodinâmica).

**Solução 8.6**

Pela equação 8.3, se a temperatura triplica, a energia interna triplica também.

**Solução 8.7**

Em cada item, deve-se separar, na equação 8.3, variáveis do lado esquerdo e constantes do lado direito. Assim, sabe-se a combinação de variáveis que permanece constante.

- (a)  $PV = Nk_B T \rightarrow \frac{PV}{T} = Nk_B$ . Como  $Nk_B$  é constante, temos  $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ .
- (b)  $PV = Nk_B T \rightarrow PV = k_B NT$ . Como  $k_B NT$  é constante, temos  $P_1 V_1 = P_2 V_2$ .
- (c)  $PV = Nk_B T \rightarrow V/T = k_B N/P$ , portanto  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ .
- (d) Por processo análogo,  $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ .
- (e)  $PV = Nk_B T \rightarrow \frac{PV}{NT} = k_B$ . Como  $k_B$  é constante, temos  $\frac{P_1 V_1}{N_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{N_2 T_2}$ . Para os outros casos, faz-se  $T_1 = T_2$ ,  $P_1 = P_2$  e  $V_1 = V_2$ , respectivamente, para se chegar às respostas (faça).

A Lei Geral dos Gases Ideais também é chamada de “Lei Combinada dos Gases Ideais”, por ser uma combinação das leis de Boyle-Mariotte, Gay-Lussac e Charles.

**Solução 8.8**

Partindo da equação 8.2 ( $\Delta U = Q - \mathcal{W}$ ),

- (a)  $Q = 0 \rightarrow \Delta U = \mathcal{W}$ ;
- (b)  $V = 0 \rightarrow \mathcal{W} = 0 \rightarrow \Delta U = Q$ ;
- (c) no ciclo completo, o sistema volta ao mesmo estado inicial, portanto à mesma energia interna (pense em por que não se pode dizer o mesmo de  $Q$  e  $\mathcal{W}$ ); portanto,  $\Delta U = 0 \rightarrow Q = \mathcal{W}$ ;
- (d) para um processo de expansão livre, não há calor transmitido nem trabalho realizado, então  $Q = \mathcal{W} = \Delta U = 0$ .

**Solução 8.9**

- (a)  $1.000 \text{ Pa}(0,02 \text{ m}^3 - 0,01 \text{ m}^3) = 1.000 \text{ Pa}(0,01 \text{ m}^3) = 10 \text{ J}$ ;
- (b) Cálculo análogo, mas convém converter a pressão de atm para Pa para ter resultado em J.
- (c) Idem, e também deve-se converter o volume de litros para metros cúbicos.
- (d) num processo isocórico, não há trabalho realizado porque não há variação de volume.

**Solução 8.10**

Se o gás diminui sua temperatura, perde energia interna por um desses processos: realiza trabalho no ambiente externo (através do pistão neste caso) ou transfere calor para o meio externo (o que não ocorre neste caso porque a transformação é adiabática). Deste modo, a resposta só pode ser (a) ou (b). Para decidir entre elas, calcule o trabalho como sendo igual à variação da energia interna, dada por  $\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T$ .

**Solução 8.11**

$$e = \frac{|Q_Q| - |Q_F|}{|Q_Q|} = \frac{28 \text{ J} - 16 \text{ J}}{28 \text{ J}} = 0,43$$

**Solução 8.12**

$$k = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} = \frac{20 \text{ J}}{28 \text{ J} - 20 \text{ J}} = \frac{20 \text{ J}}{8 \text{ J}} = 2,5$$

**Solução 8.13**

Opção (c).

**Solução 8.14**

A eficiência máxima do motor teoricamente possível é a eficiência do Motor de Carnot atuando entre as mesmas temperaturas:  $e_{Car} = \frac{T_Q - T_F}{T_Q} = \frac{1273 - 273}{1273} = 79\%$ .

A eficiência de um motor real é dada por  $e = \frac{Q_Q - Q_F}{Q_Q}$ . No nosso caso, seu valor máximo será igual a  $e_{Car}$ , ou seja,  $\frac{29 \text{ J} - Q_F}{29 \text{ J}} = 79\%$ . Isole  $Q_F$  nessa última igualdade para achar seu valor mínimo (a eficiência é máxima quando o calor perdido é mínimo).

**Solução 8.15**

Os estados de maior entropia são 1B, 2B e 3A. Note que, ao receber energia em forma de movimento aleatório, os sistemas provavelmente iriam do estado de baixa para o estado de alta entropia, ou seja,  $1A \rightarrow 1B$ ,  $2A \rightarrow 2B$  e  $3B \rightarrow 3A$ , mas dificilmente nos sentidos contrários.

**Solução 8.16**

Da equação de condução, podemos escrever

$$\frac{dq}{dt} dx = -k(T) \frac{A}{L} dT.$$

Substituindo a expressão para  $k(T)$  e integrando de ambos os lados (em  $x$  de 0 até  $L$  e em  $T$  de  $T_1$  até  $T_2$ , ficamos com o resultado

$$\frac{dq}{dt} = \frac{A \cdot a}{L} (T_1 - T_2) + \frac{A \cdot b}{2L} (T_1^2 - T_2^2).$$

## Texto complementar 5

### ÁGUA E VIDA

**Marco Aurélio Alves Barbosa**

*Faculdade UnB Planaltina  
Universidade de Brasília*

Desde a antiguidade a água é reconhecida como elemento especial. Tales de Mileto, tido por Aristóteles como o primeiro filósofo na tradição grega, considerava que a água era o (único) elemento primordial, sendo tudo que existe no universo derivado dela. Já na Idade Moderna, por volta do final do século XVIII, Cavendish e Lavoisier descobriram que a água se decompõe nos gases oxigênio e hidrogênio. A composição exata da água só foi descoberta mais adiante, no início do século XIX, por Gay-Lussac e Humboldt, que observaram que são necessários dois volumes de gás hidrogênio e um de gás oxigênio para formar a água (de onde se origina a fórmula  $H_2O$ ). Apesar desta longa tradição nos estudos da água, ainda hoje ela tem fascinado cientistas e pesquisadores: a estrutura molecular e as propriedades termodinâmicas de sua fase líquida, a existência de inúmeras ‘anomalias’ termodinâmica e cinéticas e a existência muitas fases sólidas (atualmente são conhecidos 15 tipos distintos de gelo), tem sido motivo de constantes debates na literatura científica.

No que diz respeito às teorias sobre a vida e sua origem, a água tem caráter fundamental: todo ser vivo conhecido necessita de água líquida para manter sua atividade metabólica, mesmo que em quantidades ínfimas. Esta constatação também é observada no sentido oposto, ou seja, também se pode afirmar que, na Terra, a presença de água líquida sempre está associada à existência de alguma forma de vida, independentemente de quão extremas sejam as condições observadas.

Mas o que faz com que a água seja um líquido tão especial para a vida? Além de ser o segundo composto químico mais abundante no universo (o primeiro é o hidrogênio gasoso), a água tem propriedades químicas especiais, sendo considerado um “solvente universal”, devido a sua capacidade de dissolver uma grande variedade de substâncias e compostos, e também por ser capaz de atuar tanto como ácido quanto como base, dependendo da reação química. As características químicas não usuais da água já a tornam um líquido peculiar, mas, além disso, a água também tem outras propriedades físicas não usuais. Algumas de

suas propriedades termodinâmicas foram importantes para o aparecimento da vida na Terra e continuam contribuindo para a sua manutenção. Uma dessas propriedades é o alto calor específico apresentado pela água na sua fase líquida. O calor específico de um material indica que variação da temperatura ele irá sofrer ao absorver ou perder certa quantidade de calor. No caso da água líquida, em condições ambientes de pressão e temperatura, seu calor específico é igual  $1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$ , que é um valor maior do que o observado em grande parte dos materiais conhecidos. Façamos uma comparação simples, mas interessante, notando que este número é aproximadamente 5 vezes maior do que aqueles tipicamente encontrados para a areia. A partir disso podemos concluir que, se, em uma região costeira, amostras de areia e de água absorverem a mesma quantidade de radiação, a areia sofrerá uma variação de temperatura cinco vezes maior que a da água, mas, como a areia da praia e a água do mar trocam calor por contato direto e pelas correntes atmosféricas de ar, a água acaba por absorver parte significativa do calor irradiado pela areia da praia, contribuindo para estabilizar a temperatura do ambiente.

Considerando que 75% da superfície terrestre é coberta por oceanos, o alto calor específico da água atua como um fator importante na regulação da clima, estabilizando a temperatura em uma escala global e contribuindo, desta forma, para a manutenção da vida em nosso planeta. O alto calor específico da água também é um fator relevante para o equilíbrio da temperatura interna dos seres vivos, por ser a principal substância na composição de seus corpos. Outra característica da água que é importante para a vida diz respeito ao fato de que, em condições usuais de pressão (cerca de 1 atm), o gelo é menos denso que esta e, portanto, flutua. A presença de uma camada de gelo flutuando sobre grandes reservatórios de água produz uma camada 'protetora' que reduz a perda de calor para o meio externo à fase líquida, visto que no gelo não existe perda de calor por convecção.<sup>a</sup> Este efeito também é importante por outros motivos, sendo um deles associado à origem e evolução da vida: uma das teses mais aceitas atualmente afirma que a vida apareceu no fundo dos oceanos há aproximadamente 4 bilhões de anos. Como o processo evolutivo ocorreu de forma lenta, tendo levado cerca de 3,4 bilhões até que surgissem os primeiros animais, há 630 milhões de anos, o ambiente no qual a vida cresceu e evoluiu deve ter existido por pelo menos três bilhões de anos. Mas, neste período de tempo, a Terra passou por intensas transformações, incluindo inúmeras eras glaciais e, se a fase sólida da água fosse mais densa que sua fase líquida, o gelo iria se sedimentar no fundo dos oceanos possivelmente extinguindo as primeiras formas de vida logo no início da primeira era glacial. Um outro aspecto que torna interessante a existência de uma camada de gelo recobrimdo a

Terra tem a ver com o fato de que, segundo teorias atuais sobre a formação estelar, estrelas da mesma classe que o Sol emitem muita radiação ultravioleta em seus estágios iniciais, o que potencialmente poderia ser danoso para o aparecimento de vida complexa. Uma camada de gelo recobrando a superfície do planeta poderia blindar formas de vida dos raios UV, até que surgisse uma camada de ozônio como consequência da presença de organismos fotossintetizantes, como ocorreu na Terra por volta de 3 bilhões de anos atrás.

Neste texto apenas discutimos como duas propriedades especiais da água são importantes para a vida na Terra. Além destas, a água tem várias propriedades físico-químicas intrigantes, como a diminuição da constante de difusão com o aumento da pressão, observado em certas condições, e a (possível) existência de uma transição entre dois líquidos distintos em baixas temperaturas. Muitas dessas características especiais da água, algumas das quais são denominadas de anômalas, têm sido motivo de investigação e debate científico na atualidade. Além disso, é importante ressaltar que a água permeia muitos aspectos da nossa sociedade, incluindo saneamento, indústrias de transformação e transporte. Tudo isso mostra a relevância da água como bem material, sendo uma boa razão para uma conscientização maior sobre o tema, chamando a atenção para a utilização e a reutilização adequada dessa substância em nossa sociedade.

---

<sup>a</sup>Note que a condutividade térmica do gelo é maior do que a da água, mas na fase líquida o calor também é transmitido por convecção.

# Capítulo 9

## Eletromagnetismo

### 9.1 Eletricidade

Algumas árvores liberam resinas que escorrem por seus caules, ajudando a protegê-los e cicatrizar suas feridas. Em várias regiões do mundo, porções dessa resina vegetal caíram, foram enterradas e, após milhões de anos, tornaram-se pedras fósseis chamadas de **âmbar**. Essas pedras são hoje utilizadas como objetos de estudo científico, expostas em museus e comercializadas como pedras preciosas (*gemas*). Os antigos gregos relataram que âmbar friccionado em tecido passa a atrair pequenos pedaços de palha (HALLIDAY, 1996b). Como o nome do âmbar em grego antigo era *elektron*, esse fenômeno passou a ser conhecido como **eletricidade**.

### 9.2 Carga, força, potencial e campo elétrico

A propriedade presente em dois corpos e responsável pela atração elétrica entre eles é a **carga elétrica** ( $q$ ). A primeira partícula elementar conhecida, descoberta pelo inglês *Joseph John Thomson*, em 1897, foi nomeada como **elétron**, e apresenta carga elétrica  $-e$ , onde  $e$  é a chamada "carga elétrica fundamental", definida por

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

onde C é a unidade *coulomb* definida em termos de unidades básicas do SI como

$$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s},$$

em que A é a unidade de corrente elétrica, chamada *ampère*.

Por meio de experimentos, os cientistas observaram que existem dois tipos de carga elétrica e que cargas de mesmo tipo se repelem e cargas de tipos diferentes se atraem.

A propriedade de ser de um tipo ou outro é conhecida como *polaridade elétrica* e formalizada matematicamente por meio da admissão de que a carga elétrica pode ser positiva ou negativa. Para dois corpos ( $i$  e  $j$ ), portadores de cargas elétricas  $q_i$  e  $q_j$ , vale a seguinte regra: se o produto  $q_i q_j$  for positivo, há repulsão, e, se for negativo, há atração. A tabela 9.1 mostra a polaridade desse produto para as combinações possíveis.

**Tabela 9.1:** Polaridade de  $q_i q_j$  para várias combinações de polaridades de  $q_i$  e  $q_j$

$q_i$	$q_j$	$q_i q_j$	<b>Atração ou repulsão?</b>
+	+	+	
-	-	+	
+	-	-	

Fonte: elaboração dos autores.

### Exercício 9.1 ATRAÇÃO OU REPULSÃO?

Preencha a última coluna da tabela 9.1 com “atração” ou “repulsão” em cada uma das linhas.

Se os corpos  $i$  e  $j$  estão suficientemente afastados ou são suficientemente pequenos para que possam ser considerados pontuais, o módulo da **força elétrica** entre eles é calculado como

$$F_{\mathcal{E}ij} = \kappa \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}, \quad 9.1$$

onde  $\kappa$  é a *constante eletrostática do meio*,  $q_i$  e  $q_j$  são duas cargas pontuais interagentes, e  $r_{ij}$  é a distância entre os corpos  $i$  e  $j$ .

Quando há apenas vácuo entre os corpos  $i$  e  $j$ , a constante  $\kappa$  é a **constante eletrostática do vácuo** ( $\kappa_0$ ), também chamada de “constante de Coulomb”:

$$\kappa_0 = 8,98755 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2},$$

e a equação 9.1 é reescrita como

$$F_{\mathcal{E}ij} = \kappa_0 \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2}.$$

**Exercício 9.2** FORÇA ELÉTRICA NO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO?

O átomo mais simples é o *átomo de hidrogênio* (H), composto de apenas um *próton* e um *elétron*. Segundo o *modelo atômico de Rutherford-Bohr*, a distância próton-elétron é dada pelo *raio de Bohr* ( $a_0$ ). Sabendo que a carga do próton é  $+e$ , que a carga do elétron é  $-e$ , onde  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C e que  $a_0 = 0,53 \text{ \AA}$ , onde  $1 \text{ \AA}$  (um angstrom) é igual a  $1 \times 10^{-10}$  m, calcule a força elétrica entre o próton e o elétron segundo o modelo atômico de Rutherford-Bohr.

É comum escrever a equação 9.1 na seguinte forma:

$$F_{\mathcal{E}ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2},$$

onde  $\epsilon$  é a **permissividade elétrica do meio** (também conhecida como “**constante dielétrica**”), cujo valor depende das *características físico-químicas* do meio entre as cargas.

Caso não haja nenhum meio material entre as cargas, apenas vácuo, a equação 9.1 é reescrita como

$$F_{\mathcal{E}ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2},$$

onde  $\epsilon_0$  é a **permissividade elétrica do vácuo**.

**Exercício 9.3** CONSTANTE ELETROSTÁTICA E PERMISSIVIDADE ELÉTRICA DO VÁCUO

Comparando a equação 9.1 e a equação 9.2, mostre que

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\kappa_0}$$

e calcule o valor de  $\epsilon_0$ .

A permissividade elétrica de um meio é frequentemente expressa em unidades de  $\epsilon_0$ . Para evitar confusão, é boa prática chamá-la de “**permissividade elétrica relativa**” e denotá-la por  $\epsilon_r$ . Assim,

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

OU

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}.$$

**Tabela 9.2:** Permissividade elétrica de algumas substâncias  
Esses são valores típicos, pois o valor exato depende da pressão e da temperatura.

Material	$\epsilon_r$	$\epsilon$
vácuo	1 (por definição)	$8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$ ( $\epsilon_0$ )
ar	1,00059	
água	80	
óleo	4,6	
plástico	3	

Fonte: elaboração dos autores.

#### Exercício 9.4 PERMISSIVIDADE ELÉTRICA DE ALGUMAS SUBSTÂNCIAS

Calcule os valores de  $\epsilon$  para cada uma das substâncias mostradas na tabela 9.2 e assim complete a tabela.

O módulo e a polaridade da força elétrica entre dois corpos pontuais carregados eletricamente podem ser descritos por uma equação vetorial:

$$\vec{F}_{\mathcal{E}ij} = \kappa \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_{ij}|^2} \hat{r}_{ij},$$

onde  $\vec{F}_{\mathcal{E}ij}$  é a força elétrica sofrida pelo corpo  $i$  devido ao corpo  $j$ , e  $\vec{r}_{ij}$  é a posição do corpo  $i$  em relação ao corpo  $j$ . Para calcular a força de reação a  $\vec{F}_{\mathcal{E}ij}$ , que é  $\vec{F}_{\mathcal{E}ji}$ , basta trocar todos os índices 1 e 2 na equação 9.2. Não é difícil mostrar que, se  $q_i q_j$  é negativo, as forças são atrativas e que, se  $q_i q_j$  é positivo, as forças são repulsivas (mostre isso como exercício desenhando as cargas e todos os vetores envolvidos para casos particulares).

**Problema 9.1.** AÇÃO E REAÇÃO ELÉTRICA

Mostre que a força elétrica definida pela equação 9.2 obedece à Terceira Lei de Newton. Ou seja, mostre que

$$\vec{F}_{\mathcal{E}ij} = -\vec{F}_{\mathcal{E}ji}.$$

A carga do elétron é negativa por definição, ou seja,

$$q_e = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Se as cargas de qualquer problema tivessem suas polaridades invertidas, os resultados seriam os mesmos: forças atrativas continuariam sendo atrativas, repulsivas continuariam repulsivas. Ou seja, positivo e negativo em cargas são fruto de puras convenções históricas. Assim, é natural então perguntar-se por que a carga do elétron foi definida como negativa e não como positiva. Bem, talvez teria sido realmente mais conveniente definir a carga elétrica como positiva, mas, quando Benjamin Franklin notou pioneiramente que havia dois tipos de objetos carregados, achou que um tipo era o dos que tinham excesso de carga (portanto com “carga positiva”) e o outro era dos que tinham déficit de carga (com “carga negativa”). Posteriormente, descobriu-se que os objetos que se acreditava ter “déficit de carga” tinham na verdade excesso de elétrons. No entanto, a polaridade elétrica que muitos materiais adquiriam em certas situações já tinham sido definidas, então o elétron teve que ser definido como tendo carga negativa, a fim de manter os resultados já estudados.

Como a força elétrica (equação 9.1) é conservativa, pode-se definir uma **energia potencial elétrica**:

$$U_{e12} = \kappa \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

A energia  $U_{e12}$  é definida para dois corpos carregados. Existe uma grandeza similar que é definida somente para um corpo carregado. Para encontrá-la, separemos, na equação 9.2, o que depende da carga  $q_1$  do que não depende dela:

$$U_{e12} = \{q_1\} \left\{ \kappa \frac{q_2}{r_{12}} \right\}.$$

Assim podemos dizer que a parte  $\left\{ \kappa \frac{q_2}{r_{12}} \right\}$  é algo externo ao corpo de carga  $q_1$ , mas que influencia esse corpo. A essa grandeza, chamamos **potencial elétrico**:

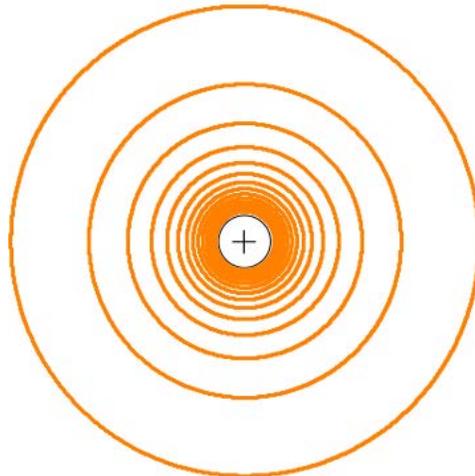
$$V_{e2}(\vec{r}_1) = \kappa \frac{q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

onde foi usada a relação  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Note que  $V_{e2}$  não depende de carga do corpo 1 ( $q_1$ ), mas depende de sua posição ( $\vec{r}_1$ ). Como essa posição é arbitrária, podemos calcular o potencial devido ao corpo 2 em todo o espaço. Deste modo, “livramo-nos” da dependência da carga  $q_1$ , e esse potencial pode ser definido para uma variável posição arbitrária, onde não necessariamente há um corpo carregado. Então, é conveniente agora omitir o índice 2 de  $V_{e2}$  e  $q_2$ , porque esse potencial depende de uma única carga, e escrever a posição  $r_1$  como  $r$ , para deixar claro que é uma posição indefinida onde não necessariamente está um “corpo 1”:

$$V_e(\vec{r}) = \kappa \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|},$$

onde  $\vec{r}$  está entre os parênteses do lado esquerdo porque é tomada como variável (o que significa que tem valor variável, indefinido), enquanto  $\kappa$ ,  $q$  e  $\vec{r}_q$  não estão lá porque são tomadas como parâmetros (o que significa que têm valores fixos como referência). A figura 9.2 mostra superfícies esféricas tridimensionais representadas por círculos que são “cortes” nessas superfícies. Cada superfície equipotencial tem um valor constante de potencial  $V_e$ . Embora a carga mostrada seja positiva, as curvas seriam exatamente as mesmas para uma carga negativa (desde que também seja pontual ou esférica).

**Figura 9.1:** Representação de superfícies esféricas equipotenciais para uma carga elétrica positiva (pontual ou esférica)



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

Podemos fazer uma separação análoga no lado direito da equação 9.2 entre  $q_1$  e o restante,

$$\vec{F}_{e12} = \{q_1\} \times \left\{ \kappa \frac{q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12} \right\},$$

e assim identificamos a grandeza **campo elétrico** como a parte que não depende de  $q_1$ :

$$\vec{F}_{e12} = \{q_1\} \times \left\{ \kappa \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}_1) \right\},$$

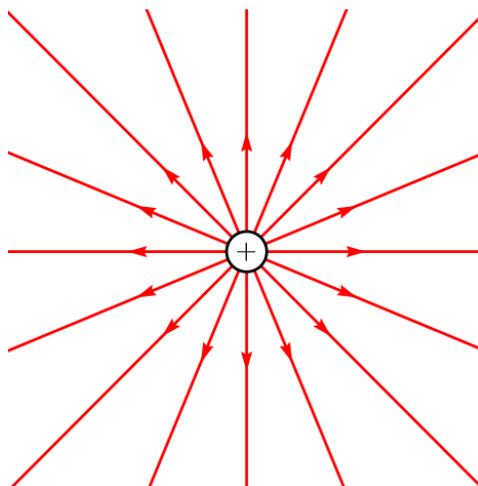
onde  $\vec{\mathcal{E}}_2(\vec{r}_1)$  é o campo elétrico gerado pelo corpo 2 na posição  $r_1$ .

Como foi feito antes, omitamos os índices na definição de campo elétrico:

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = \kappa \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2} \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \right),$$

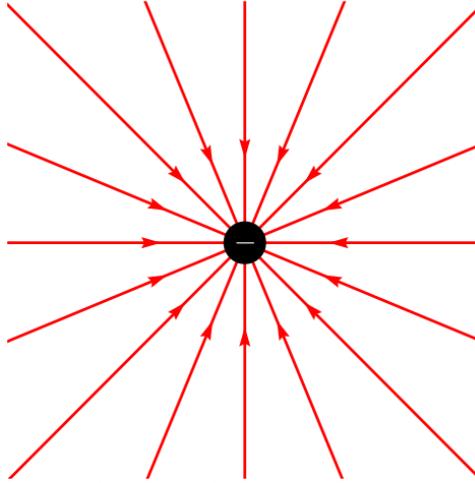
onde  $\vec{\mathcal{E}}_q(\vec{r})$  deve ser entendido como o campo elétrico gerado pela carga pontual  $q$  na posição  $\vec{r}$ , e o vetor descrito por  $\left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \right)$  é o vetor unitário na direção radial em relação à partícula  $q$  e sentido “afastando-se da posição da partícula  $q$ ”.

**Figura 9.2:** Representação de linhas de campo elétrico que saem de uma carga positiva



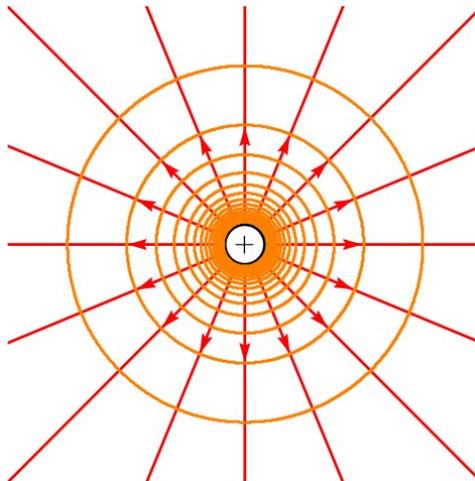
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

**Figura 9.3:** Representação de linhas de campo elétrico que entram numa carga negativa



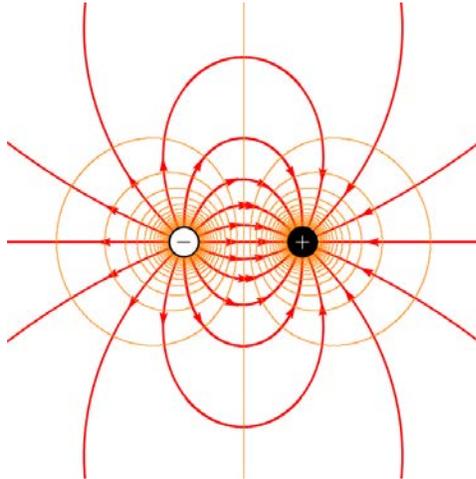
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

**Figura 9.4:** Representação de linhas de campo elétrico e superfícies equipotenciais que entram numa carga negativa



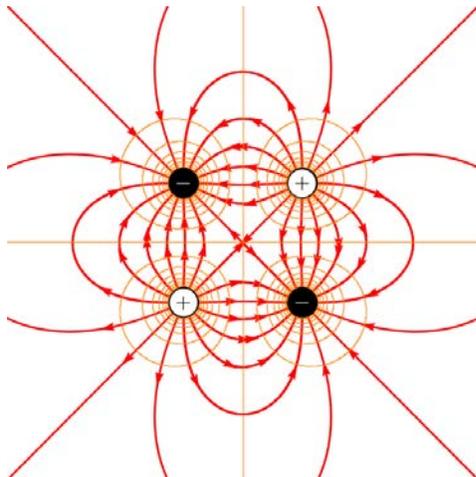
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

**Figura 9.5:** Representação de dipolo elétrico, consistindo de uma carga elétrica positiva e outra negativa



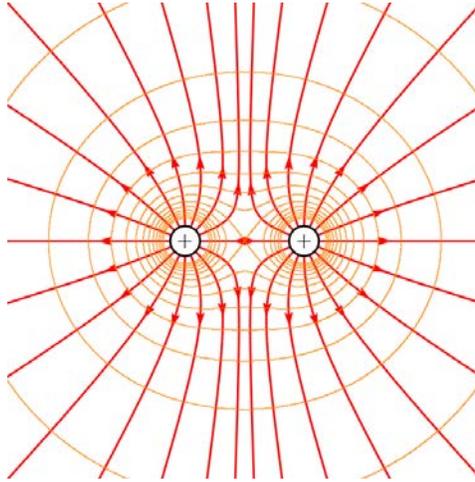
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

**Figura 9.6:** Representação de quadrupolo elétrico, consistindo de duas cargas elétricas positivas e outras duas negativas



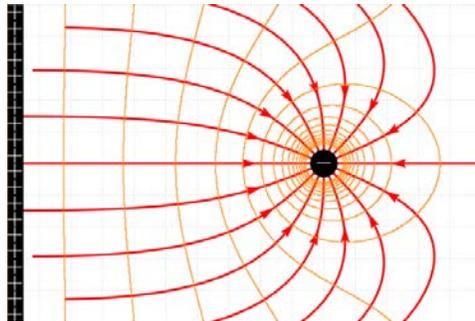
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

**Figura 9.7:** Representação de duas cargas elétricas de mesma polaridade: há repulsão



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

**Figura 9.8:** Representação de interação entre uma parede carregada com cargas elétricas positivas e uma carga elétrica, pontual ou esférica, negativa: há atração



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando pacote *pst-electricfield* (GILG, 2010).

## 9.3 Separação eletrostática de sementes

Ao entrar em contato com cargas elétricas, as sementes são eletrizadas de formas diferentes, dependendo de seu tamanho, da umidade, da composição química etc.

Esse fato permite a técnica da *separação eletrostática de sementes*. Geralmente, sementes passam por um esteira na qual entram em contato com cargas elétricas. Em seguida, são despejadas para cair numa região submetida a um campo elétrico.

As sementes que sofrerão maior desvio durante a queda serão aquelas com maior carga elétrica e menor massa. Isso significa que as sementes cairão em posições diferentes dependendo de suas características.

A conclusão é fácil: colocam-se recipientes para coletar as sementes que caem em regiões distintas, de forma que elas estarão assim separadas de acordo com alguma característica da semente.

Essa técnica pode ser usada para separar sementes com umidade dentro de um padrão desejado, separá-las por tamanho, por espécie etc. Tudo depende das características das sementes, da intensidade e direção do campo elétrico aplicado e da posição dos recipientes que recolhem as sementes.

## 9.4 Corrente elétrica

A maior parte das aplicações da eletricidade estão relacionadas à capacidade que os materiais chamados “condutores elétricos”, principalmente os metais, têm de transportar cargas elétricas, levando-as às residências de modo a acender luzes, eletrodomésticos e aparelhos eletrônicos. A corrente elétrica que passa por um fio é a quantidade de carga elétrica que passa por segundo por sua seção transversal.

### **Definição 9.1.** CORRENTE ELÉTRICA

A corrente elétrica que passa por determinada área é igual à carga elétrica total que passa por essa área dividida pelo tempo em que isso ocorre.

Na soma das cargas, deve-se considerar os sinais positivo e negativo. Ou seja, se passa a mesma quantidade de cada tipo de carga elétrica e *na mesma direção* a cada segundo, a corrente elétrica é considerada nula.

Como equação matemática, a corrente elétrica fica assim definida:

$$I = \frac{Q}{\Delta t}$$

onde a carga  $Q$  passa por uma certa área no tempo  $\Delta t$ . A unidade de corrente elétrica é o **ampère**, equivalente a um *coulomb* por segundo.

$$A = \frac{C}{s}$$

### Exercício 9.5 TEMPO DE CARREGAMENTO ELÉTRICO

Uma corrente elétrica de 3,0 A leva quanto tempo para carregar um corpo com carga elétrica de 100 C?

### Exercício 9.6 QUANTOS ELÉTRONS PASSAM NO MEU CARREGADOR?

Pegue um carregador de um aparelho eletrônico real (por exemplo, um telefone celular ou um *smartphone*). Descubra a sua corrente elétrica de saída. Calcule quantos elétrons entram no aparelho carregado por esse carregador a cada segundo.

Para que haja corrente elétrica num fio, é necessário que haja uma **diferença de potencial elétrico** ( $\Delta V_e$ ) entre as suas extremidades. Trata-se ainda do potencial elétrico da equação 9.2, mas nessa equação, entrariam muitas cargas externas que causam o  $\Delta V_e$ , de modo que, na prática, essa equação é pouco usada para fios.

O que se faz é *medir* a diferença de potencial (d.d.p.), não calculá-la. Para isso, usa-se um aparelho chamado **voltímetro**, pois a d.d.p. também é chamada de “voltagem”. O funcionamento desse aparelho baseia-se em relações conhecidas entre grandezas elétricas macroscópicas medidas nos fios, como as que serão descritas a seguir. Usemos, a partir deste ponto, a variável  $\mathcal{U}$  para designar  $\Delta V_e$ , por ser mais comum. O nome “tensão elétrica” também é usado intercambiavelmente com “diferença de potencial” e “voltagem”.

Quanto maior a voltagem entre as duas extremidades de um fio, maior a corrente gerada entre esses pontos. No entanto, cada fio também oferece uma resistência diferente à passagem da corrente elétrica, relacionada à sua composição, espessura, comprimento etc. Para muitos materiais condutores, vale a **Lei de Ohm**,

$$I = \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{R}}, \quad 9.2$$

onde  $\mathcal{R}$  é a **resistência elétrica** própria do fio em questão, que pode ser calculada como

$$\mathcal{R} = \rho_e \frac{L}{A},$$

onde  $\rho_e$  é a resistividade elétrica própria de cada metal,  $L$  é o comprimento do fio e  $A$  é a sua área de seção transversal. Um condutor que obedece a equação 9.2 é considerado um **condutor ôhmico**. A unidade de resistência elétrica é o “ohm”, cujo símbolo é  $\Omega$ .

**Exercício 9.7** FIOS DE COBRE E ESTANHO

Considere que a resistividade do cobre é  $1,72 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$  e do estanho é  $1,09 \times 10^{-7} \Omega \text{m}$ . Dois fios, ambos de bitola  $10 \text{mm}^2$  são construídos, um de cobre e outro de estanho. Se ambos devem ter resistência de  $1,0 \Omega$ , qual deve ser o comprimento de cada um?

Embora a resistência elétrica dificulte a passagem de corrente elétrica, uma resistência alta é desejável em vários casos. Uma resistência muito baixa pode gerar uma corrente muito alta, acima daquela que os aparelhos eletrônicos podem suportar.

Quando se ligam diretamente os dois pólos de uma tomada com um fio curto, ocorre um *curto-circuito*, porque a baixa resistência do fio permite passagem de corrente elétrica excessiva. Nesses casos, para proteger a rede elétrica, disjuntores desarmam-se ou fusíveis fundem-se, causando uma quebra no circuito.

Uma resistência elétrica alta também é desejável em aparelhos cuja função é gerar calor, como chuveiros, ferros de passar roupa, torradeiras etc. Nesses aparelhos, deseja-se uma rápida transformação de energia elétrica em calor, ou seja, deseja-se uma alta potência dissipada, que é dada por

$$\mathcal{P} = UI = \mathcal{R}I^2,$$

onde a equação 9.2 foi usada no último passo. Pode-se notar assim que a quantidade de calor gerada é proporcional à resistência. Por isso, os fios das conhecidas “resistências de chuveiro” (facilmente encontradas em supermercados para conserto de chuveiros) são finos e longos; se apresentam enrolados em espirais para que seu comprimento caiba no espaço disponível.

**Exercício 9.8** RESISTÊNCIA DO CHUVEIRO

Com base na equação 9.4, explique por que fios de “resistências” de aparelhos destinados a gerar calor são finos e longos.

### ENTENDENDO AS LEIS DE KIRCHHOFF

A descrição matemática de circuitos elétricos começa pelas Leis de Kirchhoff, a saber:

- Lei dos Nós (1ª Lei de Kirchhoff): a soma das correntes elétricas que entram em qualquer nó de um circuito é igual à soma das correntes elétricas que saem desse nó.
- Lei das Malhas (2ª Lei de Kirchhoff): a soma das diferenças de potenciais elétricos ao longo de qualquer percurso fechado de um circuito é igual a zero.

A Lei dos Nós é uma simples consequência do princípio da conservação da carga elétrica. Um nó é um ponto de junção entre três ou mais fios elétricos. Como o nó não acumula carga, a corrente que entra deve ser igual à corrente que sai.

A Lei das Malhas decorre do fato de que o potencial elétrico é uma função espacial. Ou seja, cada ponto do espaço tem apenas um potencial elétrico a cada instante. As figuras de 9.5 a 9.8 representam superfícies equipotenciais perpendiculares às linhas de campo elétrico. Se uma linha fechada for traçada sobre uma dessas figuras, é óbvio que voltaremos ao mesmo valor de potencial elétrico depois que a percorrêssemos. Num circuito elétrico, essas linhas seriam mais complexas, mas a ideia continua válida. Ao percorrermos uma malha (um caminho fechado), inevitavelmente voltaremos ao mesmo ponto e portanto ao mesmo potencial elétrico. Assim, os aumentos de potencial são compensados por quedas, de modo que a diferença de potencial resultante ao longo da malha é nula.

## 9.5 Magnetismo

Desde a Antiguidade, sabe-se que a pedra conhecida como *magnetita*, o ímã natural comum, tem a propriedade de atrair fragmentos de ferro. Tal fenômeno ficou conhecido como *magnetismo*. Os relatos conhecidos mais antigos envolvendo essa propriedade da magnetita são atribuídos aos gregos e datam de 800 a.C.

A primeira utilização prática do magnetismo foi provavelmente a bússola, inventada pelos chineses na Antiguidade e muito usada como instrumento de navegação na era moderna. Atualmente, as aplicações do magnetismo são inúmeras: na geração de energia (dínamos), na gravação de dados (como em discos rígidos), na medicina (como em diagnósticos por ressonância magnética) etc.

Depois de muitos modelos teóricos e muitas observações experimentais, os cientistas acabaram notando que o magnetismo está relacionado a *cargas elétricas em movimento*, ou seja, *correntes elétricas*. O movimento de cargas elétricas tanto gera quanto é influenciado por magnetismo. Sem entrar em maiores complicações teóricas, pode-se dizer que o campo magnético gerado por um ímã provém do movimento rotacional dos elétrons dos átomos ao redor destes, formando espiras de corrente elétrica.

Materiais magnéticos atraem ou repelem outros materiais magnéticos, dependendo da orientação relativa entre seus polos. Entretanto, metais que geralmente não são espontaneamente magnéticos também são atraídos por ímãs, porque o movimento de seus elétrons é influenciado pelo campo magnético que esses ímãs geram, deixando os metais temporariamente magnetizados também.

## 9.6 Força e campo magnéticos

Uma corrente de 1 A, típica de carregadores de aparelhos eletrônicos portáteis, corresponde a quase  $10^{19}$  elétrons passando por segundo pelo fio. Por isso, é muito mais fácil medir correntes elétricas que partículas carregadas individualmente. O físico francês *André-Marie Ampère* observou que longos fios com correntes elétricas causavam forças mútuas que dependiam da magnitude da corrente, do comprimento dos fios e da orientação relativa entre eles (CHAIB; ASSIS, 2007). Fios com correntes no mesmo sentido atraem-se; em sentidos opostos repelem-se.

Como homenagem a esse físico, o SI tem a unidade de corrente elétrica chamada “ampere”, definida como unidade básica do SI. A unidade de carga elétrica, “coulomb”, é que é considerada derivada do ampere, como

$$C = As,$$

em contraste com a equação 9.4. O módulo da força entre dois fios retos paralelos de mesmo comprimento e correntes elétricas constantes é

$$|\vec{F}_{m12}| = \frac{\mu L I_1 I_2}{2\pi |\vec{r}_{12}|}, \quad 9.3$$

onde  $\mu$  é a *permeabilidade magnética do meio*,  $L$  é o comprimento de cada um dos fios,  $I_1$  e  $I_2$  são as correntes que fluem nos fios 1 e 2, e  $|\vec{r}_{12}|$  é o módulo da menor distância entre eles (onde “menor distância” significa a distância entre dois pontos lado a lado, ou seja, a distância ao longo da direção perpendicular aos fios). Essa é uma **força magnética** e a lei representada pela equação 9.3 é chamada de Lei de Biot-Savart.

Posteriormente à definição da equação 9.3, notou-se que a interação entre os fios também pode ser descrita como mediada por um *campo magnético*. O campo magnético gerado por um fio reto e muito longo (tão longo que possa ser considerado infinito para fins de cálculo) pelo qual passa uma corrente constante é

$$|\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})| = \frac{\mu I}{2\pi d(\vec{r})},$$

onde  $\vec{\mathcal{B}}$  é o campo magnético,  $d(\vec{r})$  é a distância perpendicular entre o ponto  $\vec{r}$  e o fio. A unidade de campo magnético no SI é o **tesla** (T), definido por  $1\text{T} = 1\text{N}/(\text{A}\cdot\text{m}) = 10^4\text{gauss}$ , onde *gauss* é outra unidade magnética muito comum.

Uma vez definido o campo magnético, ainda que apenas para o caso do fio infinito, podemos definir a **força magnética** sofrida por uma carga em movimento num campo magnético como sendo

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}},$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do corpo pontual de carga  $q$  submetido a um campo magnético  $\vec{\mathcal{B}}$ .

Embora o magnetismo tenha inúmeras aplicações, as equações envolvidas são complexas, de modo que não aprofundaremos a formalização matemática aqui, deixando que os mais interessados nesse assunto busquem referências específicas. O mais importante neste capítulo é ter alguma concepção de campo magnético para melhor compreender o conceito de *radiação eletromagnética*, este sim mais relevante em aplicações envolvendo a agricultura ou as ciências ambientais.

Foi o físico alemão *Heinrich Hertz* quem demonstrou matematicamente que deveriam existir *ondas* formadas por campos elétricos e magnéticos oscilando em sincronia e propagando-se no espaço. Nos seus cálculos, a velocidade prevista para essas ondas coincidia exatamente com a *velocidade da luz*, o que o fez supor que a luz é uma *onda eletromagnética*.<sup>1</sup>

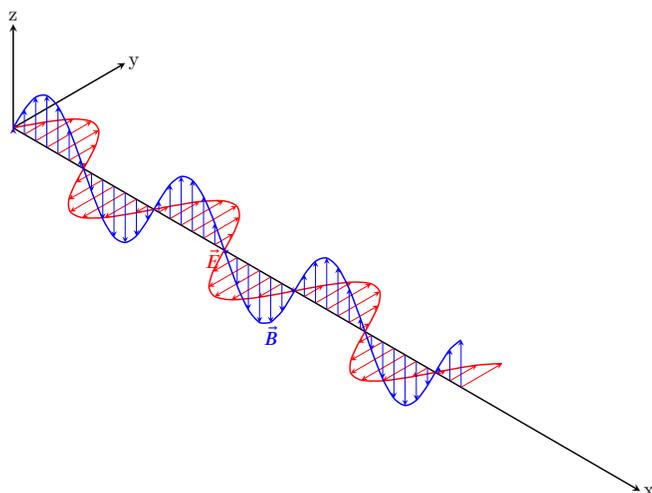
Hoje sabe-se que não somente a luz visível, mas muitas outras radiações com aplicações tecnológicas e médicas são ondas eletromagnéticas, incluindo as ondas de *raios-X*, *raios gama*, *infravermelho*, *ultravioleta* e as *ondas de rádio*.<sup>2</sup>

Em homenagem a Heinrich Hertz, a unidade de nome "hertz" (Hz) foi definida como sinônimo de "ciclos por segundo" ( $\frac{1}{s}$ ). A unidade *megahertz* (MHz) é igual a um milhão de *hertz* e é frequentemente utilizada nas rádios para descrever suas frequências de transmissão.

<sup>1</sup>Voltaremos ao tema da propagação de ondas no capítulo seguinte.

<sup>2</sup>Quando se fala em ondas de rádio, normalmente se está referindo às ondas eletromagnéticas pelas quais a informação sonora é transmitida pelo ar. Só depois de recebida pelos aparelhos, essa informação é convertida novamente em *ondas sonoras*.

**Figura 9.9:** Representação de onda eletromagnética propagando-se ao longo do eixo  $x$



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro a partir do exemplo *Polarizing microscope* de Cyril Langlois (LANGLOIS, 2010)

## 9.7 Fluxo magnético e indução eletromagnética

A *força eletromotriz* (f.e.m.)  $\mathcal{E}$  associada a um circuito é a propriedade que qualquer dispositivo, especialmente geradores, tem de produzir corrente elétrica neste circuito. Trata-se de uma grandeza escalar cuja unidade é o volt, designando a tensão existente nos terminais de uma bateria ou gerador elétrico, antes da ligação de qualquer carga. Desse modo, conhecendo a f.e.m. de um gerador, podemos calcular a energia que ele fornece ao circuito durante certo tempo. A força eletromotriz pode ser escrita como

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

em que  $\oint$  é a integral tomada ao longo do circuito definido pelo elemento  $d\vec{\ell}$ .

Se uma determinada área  $\vec{S}$  é perpassada por um campo magnético  $\vec{B}$ , então definimos o fluxo magnético  $\Phi$  como sendo a quantidade de campo magnético  $\vec{B}$  que atravessa a área  $\vec{S}$ . Se  $\vec{B}$  é constante, então podemos escrever o fluxo magnético como

$$\Phi = \mathcal{B}A,$$

em que  $A$  é a área da seção reta de  $\vec{S}$ , ou seja, é a projeção da área  $\vec{S}$  na direção de  $\vec{B}$ . Também poderíamos escrever essa mesma equação como

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S},$$

em que  $\vec{S}$ , escrito como um vetor, tem a direção perpendicular ao plano definido por  $S$ . Em situações em que o fluxo magnético é uma função que depende da posição, então devemos definir o fluxo magnético como

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Como já ressaltamos, foi observado experimentalmente que a corrente em um circuito pode variar se fazemos o fluxo magnético no circuito variar. Também vale o contrário: é possível variar o fluxo magnético em um circuito se variarmos a corrente que percorre esse circuito. Esse resultado está inscrito em uma lei fundamental da natureza conhecida como *Lei de Indução de Faraday*, expressa matematicamente na forma

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

que diz que a *força eletromotriz* em um circuito elétrico é proporcional à variação do fluxo magnético neste mesmo circuito.

A Lei de Indução de Faraday está na base do funcionamento de inúmeras máquinas, sendo, em particular, o princípio de funcionamento dos motores elétricos, geradores elétricos, dínamos etc.

**Exemplo 9.1.** Considere um circuito elétrico plano, na forma quadrada, de lados com comprimento  $\ell$ , posicionado no plano  $xy$  e que se move com a velocidade  $v$  na direção positiva do eixo  $x$ . Assuma que existe, na região do plano  $xy$  dos valores positivos de  $x$ , um campo magnético  $\mathcal{B}$  uniforme na direção do eixo  $z$ . Se o circuito elétrico está inicialmente na região dos valores negativos de  $x$ , calcule a força eletromotriz que surge quando o circuito adentra a região positiva.

Enquanto está na região dos valores negativos de  $x$ , o circuito elétrico apresenta fluxo magnético nulo, visto não ser perpassado por qualquer campo magnético. Entretanto, como se move com velocidade  $v_x$ , a partir de determinado instante esse circuito penetra a região positiva de  $x$  e então surge um fluxo magnético  $\Phi$ . Esse fluxo magnético é dado por

$$\Phi = \mathcal{B}A,$$

sendo que a área  $A$  a ser considerada é apenas aquela que está sendo perpassada pelo campo, ou seja, a área  $A$  deve ser dada por  $A = \ell v t$ , assumindo-se que o instante em que o circuito começa a passar para a região positiva dos  $x$  seja igual a zero. Assim, temos o fluxo magnético dado por

$$\Phi = B \ell v_x t$$

se  $v_x t < \ell$ . Se  $v_x t \geq \ell$ , então teremos  $\Phi = B \ell^2$  constante.

Assim, pela Lei de Faraday, obtemos que a força eletromotriz para essa configuração do problema deve ser dada por

$$\mathcal{E} = \begin{cases} -B \ell v_x & \text{se } t < \ell/v_x \\ 0 & \text{se } t \geq \ell/v_x \end{cases}$$

### Exercício 9.9 CIRCUITO EM MOVIMENTO

(Necessita de cálculo diferencial e integral.) Considere a mesma situação do exemplo anterior. Entretanto, agora, o circuito elétrico começa a ser acelerado. Essa aceleração é descrita por  $a_x(t) = a \cos(\pi v t / \ell)$  a partir do momento que sua extremidade mais à direita se encontra na origem do eixo  $x$ . Assuma ainda que o circuito comece sua oscilação entre as posições 0 e  $\ell$  com velocidade nula, quando seu lado direito está sobre a origem do eixo  $x$ . Encontre a força eletromotriz em termos da aceleração  $a_x(t)$  e dos outros parâmetros do problema.

O exemplo e o exercício anteriores apresentam os fundamentos do funcionamento dos motores.

## 9.8 Dínamos

O que usinas eólicas, nucleares e hidrelétricas poderiam ter em comum? A resposta é que todas elas *convertem* energia mecânica em energia elétrica através de *dínamos*. Um dínamo (ou *alternador*) converte energia mecânica em elétrica através de rotação de alguma peça que muda a posição relativa entre ímãs e espiras, o que gera *corrente elétrica alternada* segundo a *Lei de Indução de Faraday*.

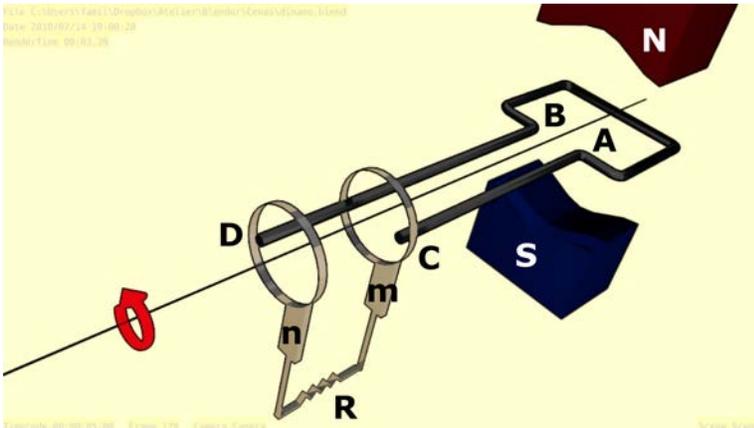
O dínamo gera *corrente alternada*, na qual a direção de fluxo dos elétrons oscila, que é o tipo de corrente que recebemos em nossas residências. Apresentamos, na figura 9.10, o funcionamento típico de um dínamo, representado por um circuito que se move entre os polos do ímã que produz o campo magnético. Segundo a figura, A e D são as saídas de corrente que serão acopladas a um circuito externo R por meio dos carvões m e n. De A e D saem dois condutores

AB e CD que são ligados a dois anéis, B e D. À medida que o circuito gira dentro do campo magnético, os anéis giram junto com ele. Os pedaços de carvão m e n ficam fixos e os anéis ficam raspando neles. A corrente que se produz no circuito passa para os anéis, destes para o carvão e do carvão vai para o circuito externo. É fácil ver que, com esse dispositivo, quando a corrente elétrica muda de sentido no quadro, também muda de sentido no circuito externo, isto é, no circuito externo ela é captada também como alternada.

Dínamos podem ter um comutador acoplado que transforma a corrente alternada em corrente contínua, mas essa transformação é mais comumente realizada nos próprios *transformadores* (“adaptadores”) dos aparelhos eletrônicos.

O que muda em usinas eólicas, nucleares, hidrelétricas etc. é a forma de gerar a energia *meccânica*: movimento dos ventos, convecção de água aquecida por radiação, água em queda livre etc. O que figura na etapa seguinte, de transformar a energia mecânica em elétrica, é quase o dínamo. Notável exceção é a placa fotovoltaica, que converte energia solar diretamente em energia elétrica, sem necessidade de dínamo.

**Figura 9.10:** Ilustração do funcionamento de um dínamo de corrente alternada



Fonte: Elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Blender 3D* e *InkScape*, inspirado em modelos do da página *e-Física* (2007).

## ESPECIFICAÇÃO DE FONTES E TRANSFORMADORES

A energia elétrica normalmente chega às tomadas de nossas residências por meio de corrente alternada. Isso significa que tanto a corrente quanto a tensão são variáveis. Assim, valores como 110 V e 220 V não podem ser valores fixos, são valores de *tensão eficaz*, calculada como um tipo de “média” conhecida como *raiz do valor quadrático médio*. No entanto, a maioria dos eletrônicos e eletrodomésticos não suporta tensões tão altas. Além disso, os circuitos desses equipamentos normalmente exigem corrente contínua. O dispositivo que faz a conversão de corrente alternada para corrente contínua é chamado de “fonte de alimentação” ou “adaptador AC”. No caso de telefones celulares e computadores portáteis, a fonte é chamada de “carregador” porque há uma bateria interna que armazena a energia elétrica para uso posterior sem a fonte conectada. Embora uma fonte “transforme” a corrente elétrica, normalmente o nome “transformador” é usado para se referir a dispositivo em que tanto a corrente de entrada quanto a corrente de saída é alternada, mudando-se a tensão eficaz.

Um carregador de celular típico tem uma especificação deste tipo:

Entrada (*input*): 100–240 V 50–60 Hz

Saída(*output*): 9,0 V  $\underline{\underline{=}}$ 1,67 A ou 5,0 V  $\underline{\underline{=}}$ 2,0 A

A faixa “100–240 V” indica os limites de tensão de entrada. Essa faixa indica que o adaptador é “bivolt”, podendo ser conectado tanto a 110 V quanto a 220 V. O símbolo “ $\underline{\underline{=}}$ ” indica que a corrente de entrada é alternada e “50–60 Hz” é a faixa de frequência de oscilação (a rede elétrica do Brasil é de 60 Hz, enquanto outros países latinoamericanos preferem 50 Hz). A corrente de saída do adaptador (e que entra no celular) é indicada por “9,0 V” (valor muito menor que 220 V) e o símbolo  $\underline{\underline{=}}$  indica que essa corrente é contínua. O texto “ou 5,0 V  $\underline{\underline{=}}$ 2,0 A” indica outra combinação de tensão e corrente que pode ser gerada de fato, a depender de características do circuito interno do celular conectado.

## 9.9 Indutância e impedância

O conceito de *fluxo magnético* permite que introduzamos o conceito de *indutância*, que é importante para aplicações do magnetismo em circuitos elétricos e eletrônicos.

Definimos a *indutância*  $\mathcal{L}$  de um circuito com  $N$  espiras e perpassado por um fluxo magnético  $\Phi$  a uma corrente  $i$  como

$$\mathcal{L} = \frac{N\Phi}{i}.$$

Assim como, no caso da eletrostática, o resistor representa uma resistência à passagem de corrente elétrica, na magnetostática a indutância representa uma resistência à *variação* desta corrente (ou do fluxo magnético). De fato, do mesmo modo que a potência relativa à presença de resistores é calculada como sendo  $P = Ri^2$ , a potência relativa à presença de indutores (indutâncias) é calculada como sendo  $P = \mathcal{L}i^2$ .

Devido a essa característica de resistência à mudança da corrente elétrica, os indutores são usados em circuitos elétricos como mecanismo para “amortecer” a variação da corrente elétrica em aparelhos eletrônicos quando estes são desligados. Os indutores fazem com que a corrente, que na sua ausência iria do valor nominal a zero quase que instantaneamente, diminua de modo mais suave, diminuindo a probabilidade de o desligamento causar danos ao circuito eletrônico.

Assim, com esses dois tipos de elementos que “resistem” à passagem/mudança de corrente elétrica, podemos definir outro conceito importante para as aplicações do eletromagnetismo em situações concretas: a *impedância*.

A impedância elétrica ou simplesmente impedância mede a capacidade de um circuito de resistir ao fluxo de uma determinada corrente elétrica quando se aplica uma certa *tensão elétrica* em seus terminais. Microscopicamente, a impedância elétrica fornece uma maneira de se medir como a eletricidade flui em cada material. Todo material possui uma impedância elétrica que o caracteriza, determinada pelos átomos que o compõem.

Assim, matematicamente, a impedância  $\mathcal{Z}$  é definida a partir de uma Lei de Ohm generalizada na forma

$$\mathcal{Z} = \frac{V}{i},$$

em que  $V$  é a diferença de potencial aplicada e  $i$  a corrente que se obtém.

## 9.10 Agricultura de precisão

A população mundial não para de crescer, e isso em taxas cada vez mais altas. Mais ainda, o crescimento populacional se concentra, cada vez mais, nas zonas urbanas, havendo uma expansão dessas sobre as áreas agriculturáveis. Tal crescimento populacional e a diminuição das terras agriculturáveis implicam o desafio de desenvolver tecnologias e conhecimento que possam fomentar a agricultura, de modo a suprir uma demanda que não para de crescer, permitindo um uso mais preciso do solo, quanto às suas necessidades de água, defensivos e insumos agrícolas etc.

De modo geral, as lavouras são tratadas sem se levar em conta sua natural variabilidade espacial. Tanto na aplicação de insumos como na irrigação, isso acaba levando a um uso desnecessário em determinadas regiões da lavoura, assim como a um uso insuficiente em outras regiões, diminuindo a capacidade de produção daquela lavoura.

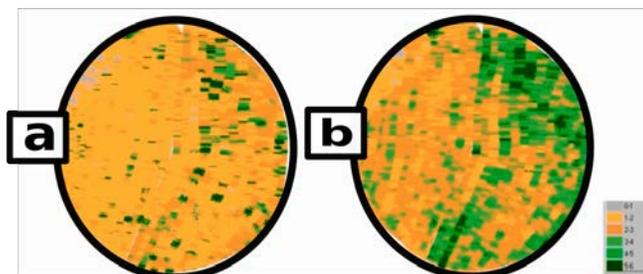
Com isso, passou-se a adotar o método de dividir a lavoura em zonas de manejo, que ficou conhecido como *Agricultura de Precisão*.

A Agricultura de Precisão em grandes áreas consiste na coleta de um grande número de amostras para estudo das propriedades físicas e químicas da lavoura que são posteriormente levadas aos laboratórios e analisadas. Em seguida mapeia-se toda a região, com detalhamento das áreas segundo suas características próprias. Para o mapeamento propriamente dito, o advento de tecnologias como o GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) tornou possível mapear as áreas com precisão adequada, em termos da localização da amostra e do dimensionamento das zonas de manejo.

Evidentemente, quanto maior o número de amostras melhor será o resultado das análises, mas também maiores serão os custos. Por causa disso, técnicas para o mapeamento do solo quanto às suas necessidades foram desenvolvidas. *A medida da condutividade elétrica do solo* é uma técnica que tem se mostrado excepcionalmente barata e rápida para se fazer uma pré-avaliação das propriedades físicas e químicas da área de lavoura.

Seu princípio baseia-se na propriedade do solo de variar a condução de corrente elétrica conforme suas propriedades físicas e químicas. Regiões com mesmas propriedades (condução de corrente próximas) são representadas em mapas por manchas de cores distintas indicando a necessidade de uso diferenciado de insumos e/ou irrigação. Na figura 9.11 apresentamos um mapeamento feito nas profundidades de (a) 90 *cm* e (b) 30 *cm*.

**Figura 9.11:** Mapas de condutividade elétrica do solo  
(a) profundidade igual a 90 *cm* e (b) profundidade igual a 30 *cm*



Fonte: elaboração dos autores, com base em mapas da Embrapa (RABELLO, 2009).

A corrente elétrica pode caminhar pelo solo de três maneiras:

- pela porção líquida;
- na mistura sólido-líquido via troca de cátions associados com os minerais de argila; e
- pela porção sólida, graças ao contato direto das partículas do solo, umas com as outras.

A condutividade elétrica é influenciada por várias propriedades físicas e químicas do solo, tais como:

- Salinidade do solo;
- Porcentagem de saturação;
- Densidade volumétrica,
- Umidade;
- Quantidade de argila;
- Capacidade de troca de cátions e matéria orgânica;
- Temperatura.<sup>3</sup>

Assim, as medidas de condutividade elétrica (*EC*) devem ser analisadas levando em conta esses fatores.

## Salinidade do solo

A salinidade do solo está associada à presença de solutos inorgânicos, como, por exemplo,  $Na^+$ ,  $K^+$ ,  $Mg^{+2}$ ,  $Ca^{+2}$ ,  $NO_3^-$ ,  $SO_4^{-2}$ , dissolvidos na fase aquosa do solo. Os efeitos da salinidade do solo são visíveis na redução do crescimento da planta; redução da produção e quebra da safra. A salinidade limita a captação da água pela planta reduzindo o seu potencial osmótico.

Os seguintes métodos são empregados para a determinação da salinidade do solo em escala de campo:

- Medição da condutância elétrica do solo: a solução de solo é colocada entre dois elétrodos, igualmente distanciados e de geometria conhecida. Aplicando-se uma diferença de potencial constante entre os dois elétrodos, a corrente é inversamente proporcional à resistência elétrica do solo, representada na equação abaixo:

$$EC = \frac{k}{R},$$

<sup>3</sup>A condutividade eletrolítica é incrementada a um taxa de aproximadamente de 1,9% por graus Celsius. é tomada como referência a temperatura de 25°C.

em que  $EC$  é a condutividade elétrica,  $k$  é uma constante e  $R$  é a resistência medida.

- O método de medida da resistividade elétrica consiste em injetar uma determinada intensidade de corrente elétrica na superfície do solo, através de dois eletrodos  $C_1$  e  $C_2$ . A passagem da corrente elétrica no solo resulta numa diferença de potencial, que é medida por outros dois eletrodos,  $P_1$  e  $P_2$ , nas vizinhanças dos eletrodos de corrente.
- Medida com indução eletromagnética: uma bobina de transmissão induz um corrente de forma espiralada de sentido contrário no solo. A magnitude dessas espiras é proporcional a condutividade elétrica nas proximidades de cada espira. Cada espira de corrente gera um campo eletromagnético secundário, que é proporcional ao valor da corrente fluindo dentro da espira. Uma fração do campo eletromagnético induzido, secundário, é detectada por outra bobina receptora, e é amplificado e convertido em uma saída de tensão. Este sinal é proporcional a condutividade elétrica do solo na região onde se está a medir.
- Reflectometria no domínio do tempo (TDR): esta técnica baseia-se na medição do tempo de propagação, ida e volta de um pulso de voltagem, através de uma sonda. Esse tempo é função da constante dielétrica ( $\epsilon$ ) do meio em que se está fazendo a medição. Pela medida da impedância da carga resistiva através da sonda ( $Z$ ), a condutividade elétrica pode ser calculada por meio da equação

$$EC = \frac{\epsilon_0 c}{l} \frac{Z_0}{Z_L},$$

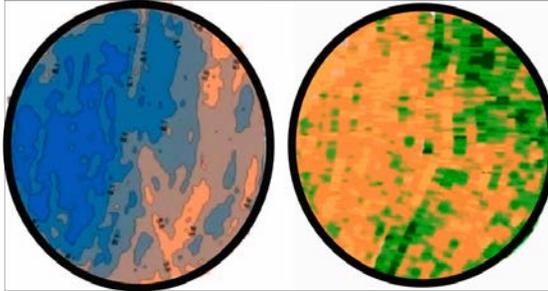
em que  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo,  $Z_0$  é a impedância da sonda (em  $\Omega$ ),

$$Z_L = Z_u \left[ \frac{2V_0}{V_f} - 1 \right]^{-1},$$

em que  $Z_u$  é a impedância característica dos cabos,  $V_0$  é a voltagem do pulso gerador e  $V_f$  é a voltagem final refletida ao longo do tempo,  $l$  é o comprimento da sonda.

Uma noção adequada da importância de uma agricultura de precisão pode ser haurida da comparação entre o mapa de salinidade à profundidade igual a 30 *cm* e um mapa de produtividade da mesma região. Na figura 9.12 apresentamos uma comparação desses dois gráficos, mostrando claramente a correlação existente entre eles.

**Figura 9.12:** Comparação entre o mapa de produtividade (esquerda) e o mapa de salinidade do solo à profundidade igual a 30 *cm* (direita)



Fonte: elaboração dos autores, com base em mapa da Embrapa (RABELLO, 2009).

## 9.11 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 9.1

$q_i$	$q_j$	$q_i q_j$	Atração ou repulsão?
+	+	+	repulsão
-	-	+	repulsão
+	-	-	atração

### Solução 9.2

$$\begin{aligned}
 F_{\varepsilon ij} &= \kappa \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \\
 &= \kappa_0 \frac{(+e)(-e)}{a_0^2} \\
 &= -\kappa_0 \frac{e^2}{a_0^2} \\
 &= -8,98755 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{C})^2}{(0,53 \times 10^{-10} \text{m})^2} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

### Solução 9.3

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

### Solução 9.4

Basta multiplicar a segunda coluna por  $8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$  para encontrar os valores da terceira coluna.

### Solução 9.5

$$\Delta t = \frac{Q}{I} = 33 \text{ s}$$

### Solução 9.6

Num carregador típico, pode-se encontrar informações como estas:

Entrada ( <i>input</i> ): AC 100-240 V	50-60 Hz
Saída ( <i>output</i> ): 16,5 V	3,65 A

Nesse exemplo, a corrente elétrica de saída é 3,65 A. Para saber quantos elétrons passam a cada segundo, basta dividir esse valor pela carga elementar. O resultado será algo da ordem de  $1 \times 10^{19}$  elétrons.

### Solução 9.7

$$\mathcal{R} = \rho_e \frac{L}{A}$$

$$\rightarrow L = \frac{\mathcal{R}A}{\rho_e}$$

Cobre:  $5,8 \times 10^5 \text{ m}$  Estanho:  $9,2 \times 10^4 \text{ m}$

### Solução 9.8

Argumente com base nas variáveis A e L da equação 9.4 e no fato de que a potência  $\mathcal{P}$  da equação 9.4 representa a quantidade de calor gerada por tempo.

### Solução 9.9

Neste caso, temos inicialmente que calcular a velocidade com que o circuito se move. Como temos a aceleração, a velocidade fica sendo simplesmente

$$v_x(t) = \frac{a\ell}{\pi v} \text{sen}(\pi vt/\ell).$$

Com isso, a parte do circuito que é perpassada pelo campo magnético  $\mathcal{B}$  é dada por

$$\Delta x = -\frac{a\ell^2}{\pi^2 v^2} \cos(\pi vt/\ell),$$

e a força eletromotriz fica

$$\mathcal{E} = -\frac{a\mathcal{B}\ell^2}{\pi v} \text{sen}(\pi vt/\ell),$$

mostrando que a voltagem no circuito será da forma sinusoidal, ou seja, *alternada* (durante uma parte do tempo, positiva; na outra, negativa).

## Capítulo 10

# Física ondulatória

Dizem que “tudo o que vai volta” e que “tudo o que sobe desce”. Obviamente, tais afirmações são apenas generalizações sem rigor científico, mas provavelmente decorrem da observação de que oscilações, vibrações, são recorrentes no mundo físico.

As vibrações são uma conciliação entre estabilidade e movimento. Um sistema mecânico é considerável estável quando mantém sua forma básica ao longo do tempo. No entanto, a ausência completa de movimento só ocorreria em zero absoluto de temperatura. Oscilações permitem que um sistema manifeste sua energia como movimento de seus átomos em torno de pontos fixos.

Deste modo, vibrações são observadas em toda a natureza. A frequência de vibração é muito variável. Por exemplo, mosquitos batem suas asas centenas de vezes por segundo (produzindo som audível), enquanto a vibração da terra após terremotos pode ter frequência de poucas oscilações por hora (FRENCH, 2001). Átomos chegam a vibrar  $10 \times 10^{14}$  vezes por segundo em suas moléculas.

A palavra “onda”, originalmente usada para se referir apenas às águas cujas superfícies oscilam, foi generalizada na Física para se referir a toda transferência de energia mediante movimentos contrários alternados de pequenos elementos. A parte da Física que trata das ondas é a *Física Ondulatória*.

A *Óptica*, outro ramo da Física, é a ciência que trata da luz e da visão. Como hoje se sabe que a visão depende da luz e que a luz é um tipo de onda (eletromagnética), o estudo da Óptica é frequentemente feito em associação com o estudo da Física Ondulatória.

## 10.1 Tipos de onda

Ondas ocorrem quando sistemas são perturbados perto de suas configurações de equilíbrio estável. Ondas sonoras, por exemplo, correspondem à alternância de regiões de alta e baixa pressão do ar. Isso ocorre porque, quando o ar da região A é “empurrado” para a região B, a região A fica com densidade mais baixa que o habitual enquanto a região B fica com densidade mais *alta* que o habitual, de modo que as moléculas do ar tendem a voltar da região B para a região A para reestabelecer a homogeneidade relativa à densidade do sistema. No entanto, ao voltar devido à pressão da região B, muitas dessas moléculas adquirem muita velocidade e “passam” da região A pressionando outra região anterior que faz com que as diferentes regiões de alta e baixa densidades apresentem um movimento em determinada direção.

Citemos alguns tipos de onda **classificadas quanto à sua natureza**:

- **mecânicas**: também chamadas de “ondas materiais”, são aquelas que necessitam de um meio material para se propagar; como exemplos, temos ondas
  - **sonoras**: regiões de alta e baixa densidade alternadas que se propagam pela vibração das moléculas (tipicamente moléculas de ar, mas também ocorre em líquidos e em sólidos);
  - **em cordas**: movimentos transversais alternados que se propagam ao longo do comprimento da corda;
  - **sísmicas**: propagação de movimento vibratório de grãos de rocha pressionados entre si devido à liberação original de energia ocorrida pelo choque entre *placas tectônicas* num *foco sísmico*; quando as ondas sísmicas são perceptíveis às pessoas e ocorrem em terra, chamam-se nas “terremoto”;
  - **fônons**: vibrações da rede cristalina de sólidos, que podem gerar ondas sonoras ou calor.
- **ondas eletromagnéticas**: propagam-se pelo espaço como campos elétricos e magnéticos, vibrando em harmonia, e não necessitam de meio material, podendo se propagar no vazio.

As ondas eletromagnéticas podem ser divididas em vários tipos de acordo com sua frequência: luz visível, raios-X, raios gama, radiação ultravioleta, radiação infravermelha etc. Todas elas viajam à velocidade da luz. Na verdade, alguns consideram todas as ondas eletromagnéticas como tipos de “luz”, visível ou invisível, enquanto outros chamam de “luz” apenas àqueles fenômenos luminosos que podemos enxergar, ou seja, a “luz visível”, expressão redundante para aqueles que consideram como luz apenas a radiação eletromagnética visível.

Como os animais de cada espécie diferem na gama de frequências de luz que podem enxergar, e até mesmo seres humanos apresentam uma ligeira diferença entre si, o que é luz (visível) para uns pode não ser para outros. Na onda eletromagnética, o que oscila são os *campos elétrico e magnético* em uma direção transversal à direção de propagação.

As ondas também podem ser **classificadas quanto à relação entre a direção de vibração e a direção de propagação**:

- **transversais**: ondas nas quais a direção de vibração é perpendicular à direção de propagação; incluem ondas em cordas, ondas eletromagnéticas etc.
- **longitudinais**: ondas nas quais a direção de vibração é paralela à direção de propagação; incluem ondas sonoras, ondas em molas quando vibradas na direção de seu comprimento etc.

A toda direção, existe um plano perpendicular. Portanto, a certa direção de propagação, existem infinitas direções perpendiculares, todas contidas no plano perpendicular. Uma onda transversal pode ser **polarizada**, o que quer dizer que ela é forçada a vibrar em apenas uma direção entre todas as possíveis. A *luz polarizada* é aquela na qual o campo elétrico vibra em apenas uma das direções perpendiculares à direção de propagação.

Por outro lado, as vibrações de ondas longitudinais somente ocorrem na direção de propagação. Assim, ela não pode ser polarizada (de fato, já está “polarizada” na direção da propagação). As ondas longitudinais também são chamadas de “ondas compressionais” ou “ondas de compressão”, porque são produzidas ao se comprimir o meio na direção da propagação.

As ondas também podem ser **classificadas quanto à dimensionalidade da propagação**:

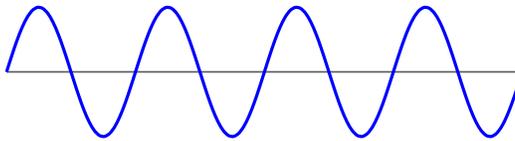
- **unidimensionais**: propagam-se ao longo de uma linha (uma dimensão), como ondas em cordas, em molas etc.;
- **bidimensionais**: propagam-se ao longo de uma superfície (duas dimensões), como ondas na superfície da água;
- **tridimensionais**: propagam-se ao longo de um volume (três dimensões), como ondas de som e luz;

Nem sempre a dimensionalidade da propagação da onda corresponde a quantas dimensões ela ocupa fisicamente. Por exemplo, considere uma onda numa corda, cujas partes vibrem no eixo  $y$  mas que se propaga no eixo  $x$ . Essa onda ocupa duas dimensões fisicamente ( $x$  e  $y$ ), mas se propaga apenas na direção do eixo  $x$ . Ondas têm direções de vibração e a direções de propagação. A dimensionalidade de propagação está relacionada a essas últimas.

## 10.2 Descrição matemática das ondas

A descrição matemática mais simples de uma onda a considera como **unidimensional e infinita**, o que quer dizer que se estendem num padrão periódico ao longo de toda a reta real, como representado na figura 10.1. Embora pareça que essa figura seja uma representação de uma onda *transversal*, essa não é uma restrição necessária, pois o eixo vertical não necessariamente representa uma dimensão espacial. Para uma onda sonora, por exemplo, o eixo vertical poderia representar a pressão do ar ao longo de um comprimento representado pelo eixo horizontal.

**Figura 10.1:** Representação de uma onda que se propaga linearmente



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando TikZ.

Uma onda é comumente descrita por meio das seguintes características:

- **amplitude** ( $A$ ): variação máxima em que o elemento vibrante se afasta de seu valor de equilíbrio; a unidade da amplitude depende do tipo da onda, correspondendo à unidade da grandeza vibrante: unidade de distância para ondas transversais em cordas, unidade de pressão para ondas sonoras, unidade de campo elétrico ou magnético (ou ambas) para ondas eletromagnéticas etc.;
- **comprimento de onda** ( $\lambda$ ): distância linear ao longo da qual se estende exatamente um ciclo completo de uma onda;
- **período** ( $T$ ): intervalo de tempo no qual uma onda se desloca exatamente em um comprimento de onda;
- **frequência** ( $f$  ou  $\nu$ ): quantidade de comprimentos de onda percorridos por unidade de tempo.
- **intensidade** ( $\mathcal{J}$ ): é relacionada com a quantidade de energia transportada pela onda, proporcional ao quadrado da amplitude.

Uma onda do tipo mostrado na figura 10.1, pode ser descrita matematicamente por uma função seno do tipo

$$f(x) = A \operatorname{sen}(\kappa x), \quad 10.1$$

onde  $A$  é a *amplitude* e  $\kappa$  é o *número de onda*, dado por

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda},$$

onde  $\lambda$  é o *comprimento de onda*.

**Exercício 10.1** NÚMERO DE ONDA

Calcule o número de onda correspondente aos seguintes comprimentos de onda:

- 8,5 m (pequena onda oceânica de superfície, “onda do mar”)
- 212 m (grande onda oceânica de superfície)
- 4000 Å (luz verde)
- 1 Å (onda de raio-X)

**Problema 10.1.** DESENHANDO ONDAS ATRAVÉS DA FÓRMULA Represente as ondas do exercício anterior de título “número de onda”, usando a equação 10.1, por meio de gráficos  $f(x)$  vs.  $x$  em planos cartesianos.

O argumento da função seno deve ser um ângulo dado em rad, o que equivale matematicamente a ser um número puro, sem unidade de medida. No entanto, a equação 10.1 descreve uma onda *num só instante*. Para descrever a sua evolução temporal, devemos acrescentar um termo que dependa do tempo no argumento do seno:

$$f(x, t) = A \text{sen}(\kappa x - \omega t),$$

onde  $\omega$  é a *frequência angular* (também chamada de “velocidade angular”), que pode ser dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

onde  $T$  é o *período* ou

$$\omega = 2\pi f$$

onde  $f$  é a *frequência*. Os valores da grandeza  $\kappa x - \omega t$  definem as *fases* da onda.

**Exercício 10.2** FREQUÊNCIA ANGULAR

Calcule a frequência angular correspondente aos seguintes períodos:

- 1 s
- $1,3 \text{ fs} = 1,3 \times 10^{-15} \text{ s}$  (luz verde)
- $0,3 \text{ as} = 0,3 \times 10^{-18} \text{ s}$  (onda de raio-X)

**Problema 10.2.** DESENHANDO ONDAS DINÂMICAS ATRAVÉS DA FÓRMULA

Escolha uma das ondas do exercício anterior de título “número de onda”, defina um valor razoável de período e esboce a forma da onda em alguns tempos diferentes, para ver como ela muda.

O termo  $-\omega t$  da fase na equação 10.2 faz com que a curva senoidal descrita pela equação 10.1, mostrada na figura 10.2, desloque-se para a direita com o passar do tempo.

A equação 10.1 descreve uma onda que se propaga linearmente, mas também pode representar o que ocorre numa **frente de onda**. Há duas definições utilizadas para *frente de onda*:

**Definição 10.1.** FRENTE DE ONDA

Fronteira entre a região já atingida pela onda e a região ainda não atingida.

**Definição 10.2.** FRENTE DE ONDA

Região contínua do espaço na qual a onda está na mesma fase.

A Definição 10.1 é mais estrita e parece mais adequada a julgar pela palavra “frente”. Por essa definição, a frente é apenas a região na qual a onda está “chegando” num certo instante. A Definição 10.2 é mais geral e inclui a frente da primeira definição, mas também qualquer região que está na mesma fase, geralmente por ter sido gerada no mesmo instante. Uma frente de onda é uma parte da onda que foi gerada num mesmo instante por um mesmo evento.

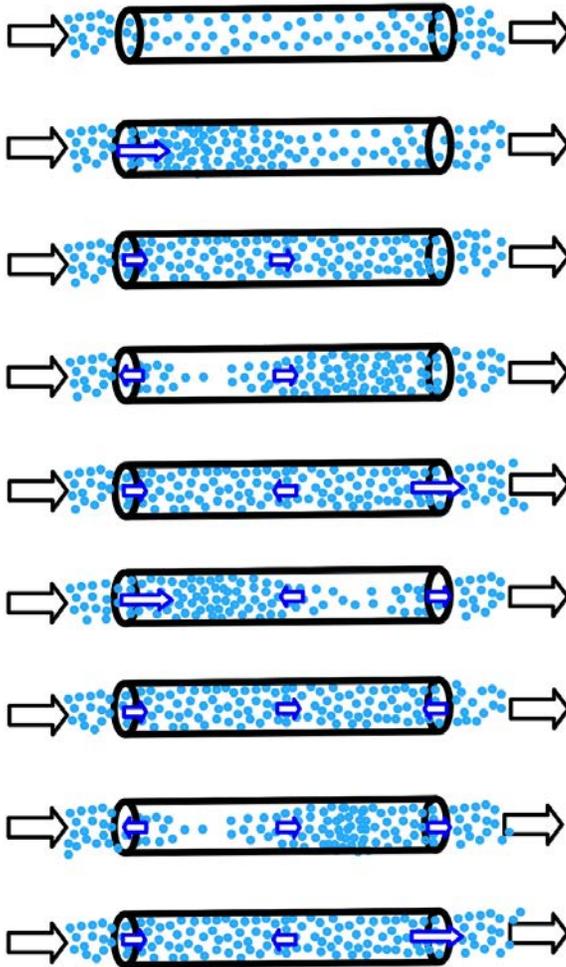
A Definição 10.1 permite que classifiquemos as ondas quanto à sua frente:

- a frente de uma onda unidimensional é um *ponto*;
- a frente de uma onda bidimensional é uma *curva*;
  - **ondas circulares** são ondas bidimensionais cujas frentes são *círculos*;
  - **ondas planas bidimensionais** são ondas bidimensionais cujas frentes são *retas*;
- a frente de uma onda tridimensional é uma *superfície*;
  - **ondas esféricas** são ondas tridimensionais cujas frentes são *esferas*;
  - **ondas planas tridimensionais** são ondas tridimensionais cujas frentes são *planos*.

**Problema 10.3.** Dê exemplos desses tipos de ondas:

- circulares,
- planas 2D,
- esféricas,
- planas 3D.

**Figura 10.2:** Ilustração de corrente de ar passando por um tubo, formando ondas sonoras. Uma flauta funciona como um tubo de comprimento que varia quando seus furos são cobertos ou descobertos.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro usando *Libre-Office*.

## 10.3 Acústica

A *Acústica* é a parte da Física que trata do som e da audição. Caracteriza-se por ser um dos ramos da Física com grande aplicação e interface com outras áreas do conhecimento como a *Fonoaudiologia* e a *Música*. A Acústica aplicada a diversas áreas tem diversos nomes específicos, como *Acústica Arquitetônica*, *Acústica Ambiental*, *Psicoacústica* etc.

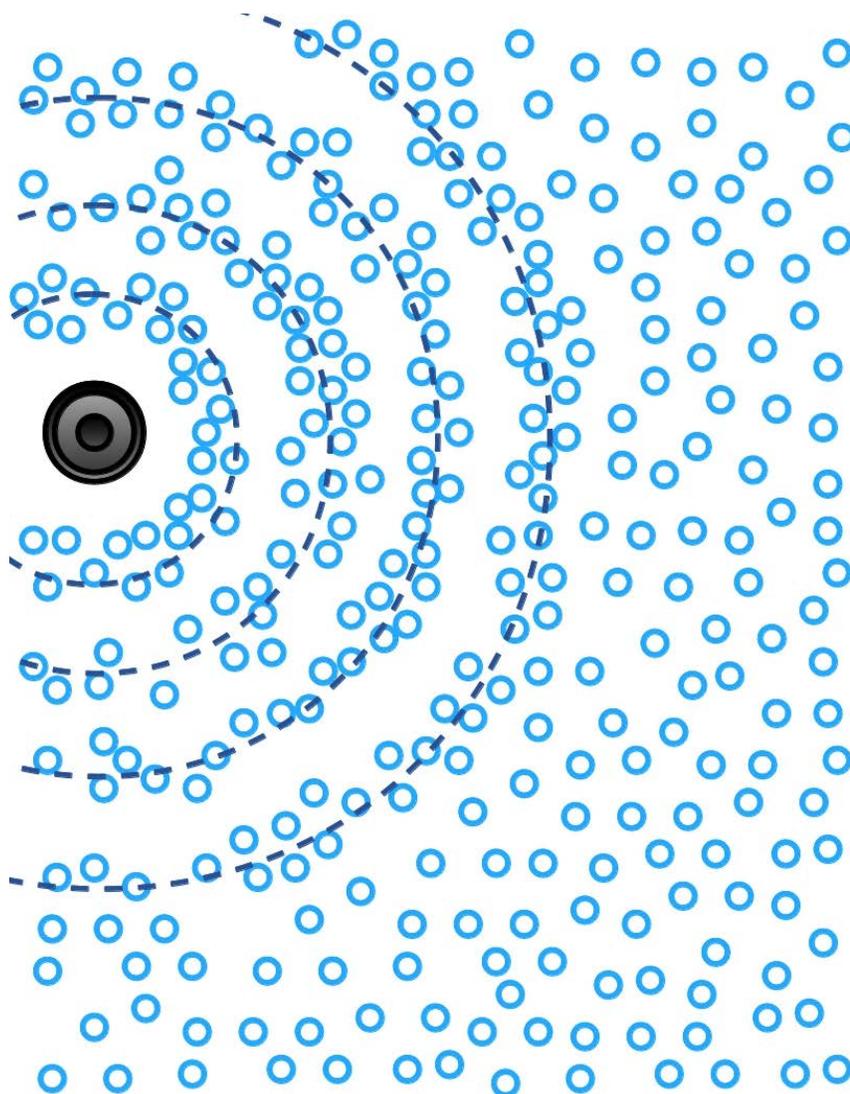
Na Acústica, existem alguns termos usados para descrever as ondas sonoras que normalmente não são utilizados de forma geral na Física Ondulatória, sendo termos mais correntes na Música que na Física. Esses termos estão relacionados à audição e incluem:

- **altura:** qualidade de um som que permite avaliá-lo como mais alto (o mesmo que “mais agudo”) ou mais baixo (o mesmo que “mais grave”); a altura é relacionada com a frequência da onda sonora: um som mais agudo é composto de ondas sonoras de maior frequência, enquanto sons mais graves têm frequências baixas;
- **timbre:** qualidade de um som que permite diferenciá-lo de outro de mesma intensidade e mesma altura, associando-os a fontes sonoras de tipos diferentes, como vozes de pessoas diferentes ou instrumentos musicais distintos; o timbre é relacionado à combinação de ondas sonoras cujos semicomprimentos de onda sejam múltiplos entre si (o que significa que são ondas *harmônicas* entre si).

A figura 10.4 representa uma corda vibrando e gerando regiões de alta e baixa pressão no ar, configurando uma onda sonora. A figura também pode ser interpretada como a película de um tambor vista lateralmente. Instrumentos musicais baseados em vibração de superfícies, causada por choques, são os *instrumentos de percussão*. Os que se baseiam em vibração de corda são *instrumentos de corda*, que curiosamente incluem o piano devido às cordas em seu interior, acionadas pelas teclas.

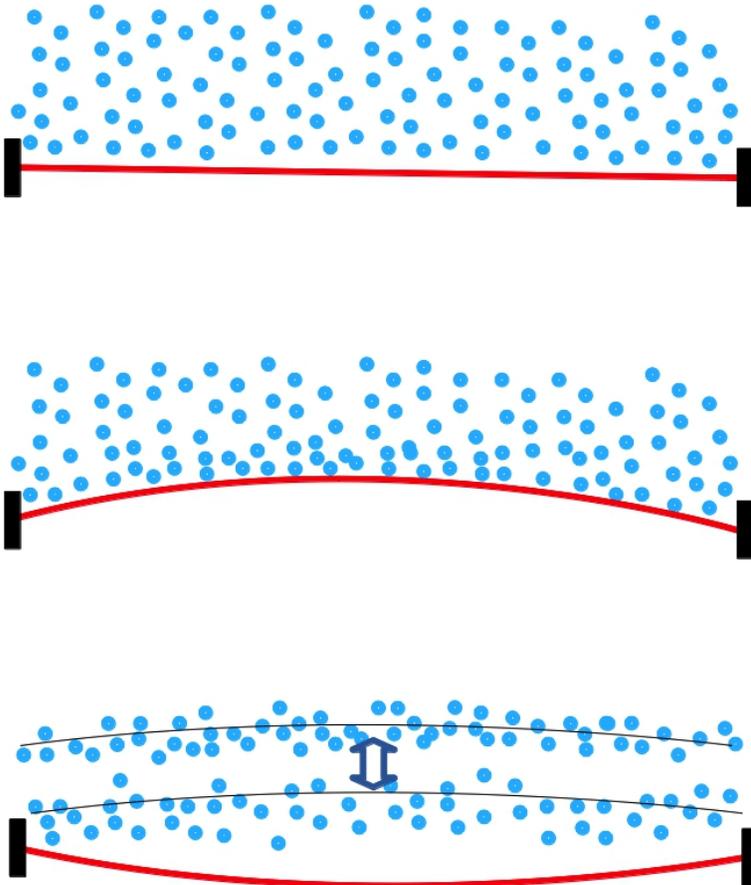
A figura 10.5 representa ondas sonoras em tubos. As extremidades abertas funcionam como *nós* porque tendem a fazer a pressão voltar ao valor da pressão atmosférica (o nó, na verdade, é localizado um pouco mais para fora, dependendo do diâmetro do tubo (60% do raio a mais para fora) , mas desconsideramos isso aqui). Extremidades fechadas funcionam com *ventres* porque a diferença de pressão vindoura pode chegar até elas, sendo em seguida “refletida”. Existem figuras que mostram ventres e nós em posições trocadas em relação à figura 10.5, com nós nas extremidades fechadas. Nesse caso, não é pressão do ar que está sendo representado, mas o deslocamento médio do ar em relação à sua posição de equilíbrio.

**Figura 10.3:** Ilustração do som propagando-se em frentes esféricas, de alta e baixa pressão do ar alternadas



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro usando *LibreOffice*.

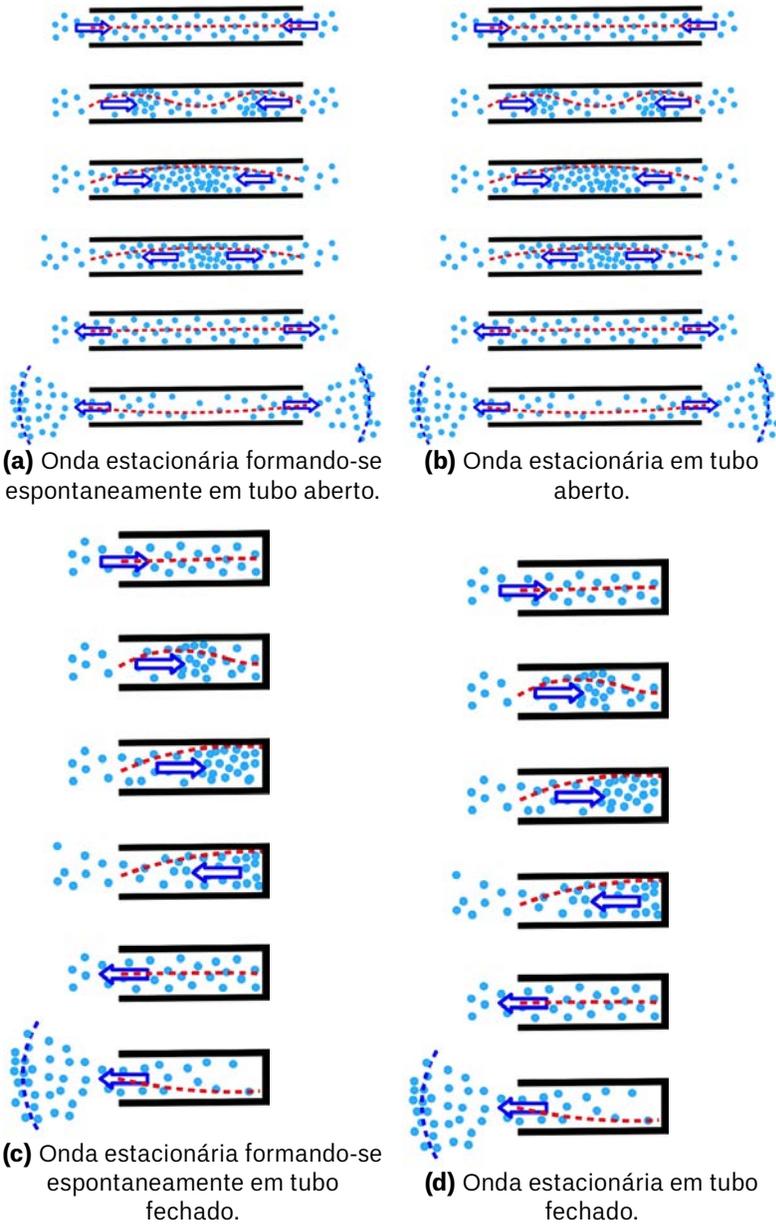
**Figura 10.4:** Representação de uma corda vibrando e gerando regiões de alta e baixa pressão no ar, configurando uma onda sonora



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

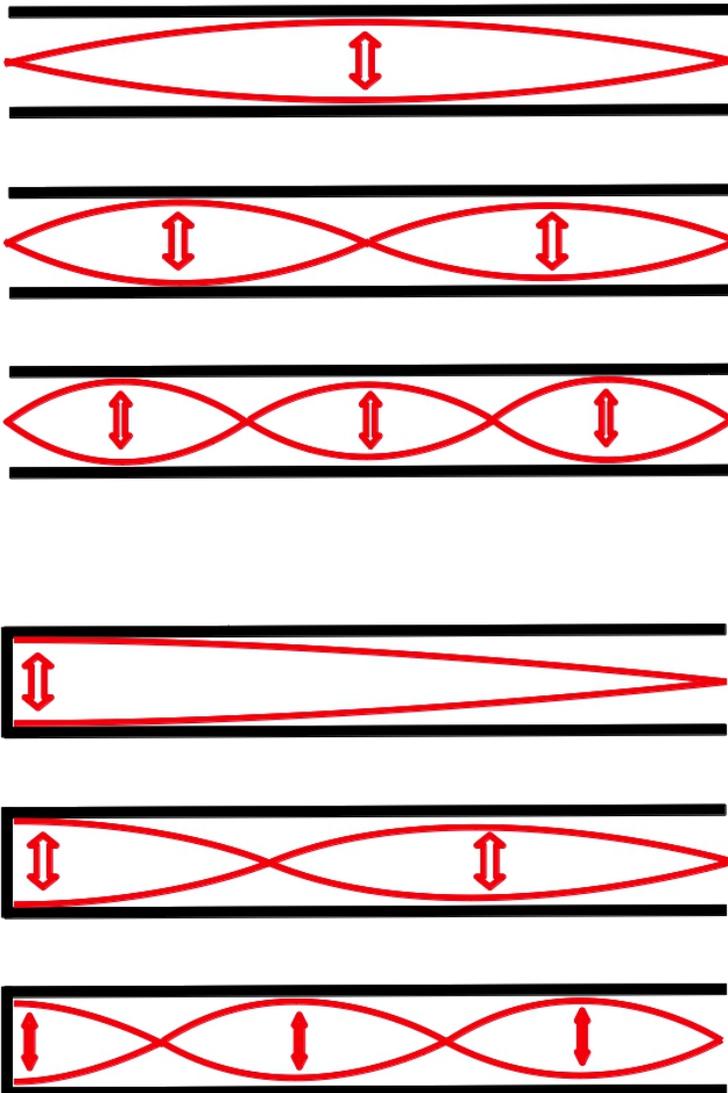
A figura 10.6 mostra diferentes tipos de vibração que podem ocorrer num mesmo tubo. Diz-se que os sons gerados assim são *harmônicos* entre si. Na prática, esse harmônicos coexistem num mesmo tubo, causando um *timbre* característico. Isso ocorre porque ondas podem passar uma pela outra ou coexistirem num mesmo espaço como se fosse independentes, embora (ou por isso mesmo) interferiram construtiva ou destrutivamente na pressão de cada ponto.

**Figura 10.5:** Representação de ondas sonoras em tubos



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Libre Office*.

**Figura 10.6:** Representação de harmônicos em tubos abertos e fechados



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Libre Office*.

## O decibel

É fato bem conhecido que o nível de ruído é geralmente informado em *decibéis*. No entanto, o **decibel** não é apenas uma unidade de medida de intensidade sonora, mas expressa uma proporção entre dois valores de uma grandeza qualquer, uma medida e uma referência. A intensidade sonora, quando apresentada em decibéis, refere-se à quantidade

$$\mathcal{J}_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right),$$

onde  $\mathcal{J}$  é a intensidade sonora medida (por exemplo, em  $\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ) e  $\mathcal{J}_0$  é uma intensidade sonora de referência. Convencionalmente, usa-se

$$\mathcal{J}_0 = 1 \times 10^{-12} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}.$$

A unidade “decibel” (dB) é derivada da unidade “bel” (B), embora essa última seja raramente usada.

O uso do logaritmo serve para que intensidades de diversas ordens de grandeza sejam mais facilmente apresentadas. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 1 \text{ dB} &\text{ é igual a } 1 \times 10^{-11} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \\ \text{e } 100 \text{ dB} &\text{ é igual a } 1 \times 10^{-9} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$

**Problema 10.4.** Que formas são mais convenientes para serem ditas no jornal? Em dB ou em  $\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$ ?

## Eco e reverberação

Quando um som é recebido pelo nosso sistema auditivo, ele é percebido por um intervalo de tempo chamado *persistência acústica*, tipicamente 0,1 s.

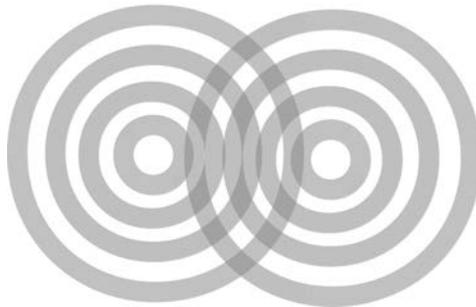
Quando uma frente de onda sonora é produzida e propagada pelo espaço, o som percorre vários caminhos até nossos ouvidos, refletido por várias paredes do ambiente. Quando um som direto (que chega aos ouvidos sem ser antes refletido) e um som refletido pertencentes à mesma frente chegam a um ouvido separados por um intervalo de tempo maior que a persistência acústica, eles são percebidos como dois sons distintos. Ou seja, o som refletido é o **eco** do som direto. Se, ao contrário, esse intervalo de tempo for menor que a persistência acústica, o som refletido será percebido como uma prolongação um tanto difusa do som direto, fenômeno conhecido como **reverberação**.

## Interferência construtiva e destrutiva em ondas sonoras

Quando uma onda sonora é refletida nas paredes de um recinto, ela volta e interfere consigo mesma, podendo reforçar sua própria intensidade em alguns pontos, onde as frentes de alta pressão sempre chegam juntas (assim como as de baixa pressão). Esse fenômeno é a *interferência construtiva*. Em pontos aos quais, ao contrário, frentes de alta pressão sempre chegam juntamente com frentes de baixa pressão, o efeito das frentes tende a anular-se mutuamente, em *interferência destrutiva*.

De forma geral, num recinto, não se deseja que existam regiões nas quais o som é ouvido muito fortemente e outras nas quais o som quase não é ouvido. Para evitar que isso aconteça, as paredes e o teto são às vezes construídos em superfícies irregulares, para que as frentes percorram caminhos com os mais diferentes comprimentos até chegar à mesma região, chegando assim, em cada ponto, a fases que provavelmente não serão nem muito reforçadas nem muito enfraquecidas mutuamente.

**Figura 10.7:** Representação de frentes de ondas vindas de dois pontos, interferindo construtiva e destrutivamente



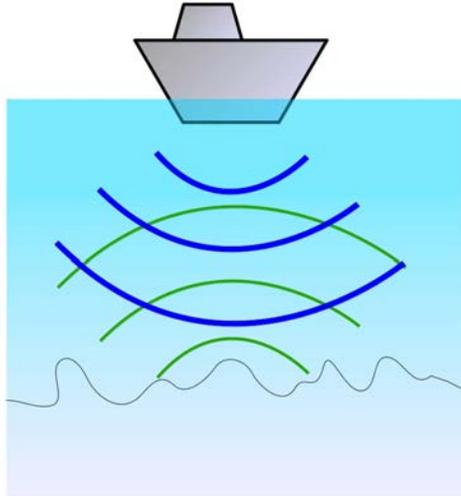
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*

## 10.4 Uso de sonar para medida de profundidade das águas

Medir a profundidade de um riacho num certo ponto pode ser fácil usando uma vareta. Talvez mesmo alguns rios de profundidade média usando linha de anzol amarrada a algo que afunde.

Todavia, quando se quer medir grandes profundidades, ou mesmo médias profundidades em muitos pontos, pode ser conveniente usar um *sonar*, aparelho que emite ondas sonoras que refletem no fundo do rio e são captadas novamente ao voltarem ao ponto de origem.

**Figura 10.8:** Representação de um sonar de um barco sendo usado para mapeamento do leito do rio



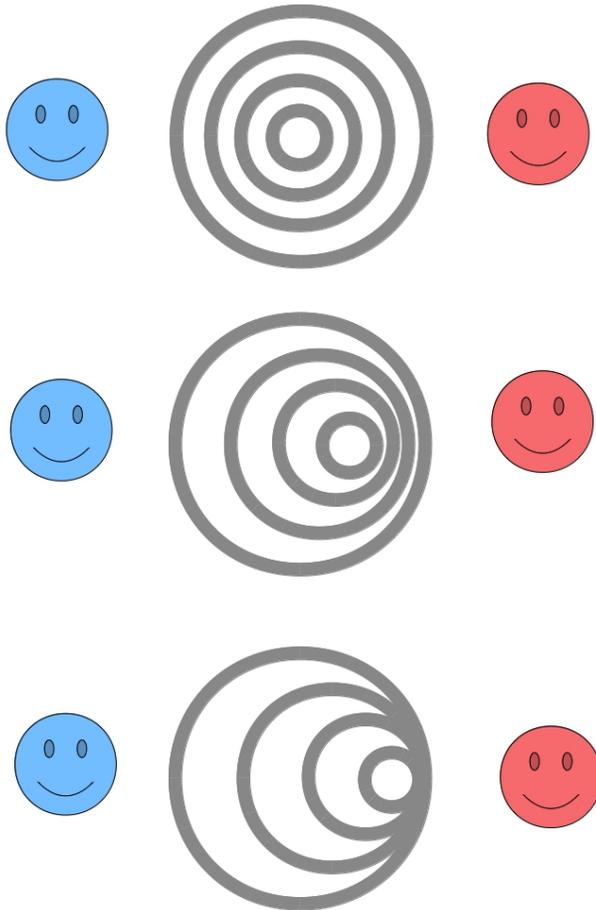
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*

Isso permite não só medir a profundidade em alguns pontos, mas *mapear* o fundo de rios e mares.

Técnica semelhante é usada na medicina, em *ultrassonografias* (ultrassom é apenas um som cuja frequência o tímpano humano não detecta).

Algumas técnicas permitem até mesmo detectar movimento devido ao *Efeito Doppler*, pelo qual o som refletido por uma superfície e parece aumentar sua frequência quando essa superfície se aproxima e diminuí-la quando ela se afasta. Isso vale não só para reflexão, mas é mais observado na emissão primária, como no caso da ambulância cuja sirene parece ter som diferente ao aproximar-se e ao afastar-se.

**Figura 10.9:** Ilustração do efeito Doppler



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*

## 10.5 Óptica

A Óptica é a parte da Física que trata da luz e da visão. A luz, *stricto sensu*, é a radiação eletromagnética visível, mas os efeitos estudados na Óptica normalmente ocorrem para radiações eletromagnéticas de todas as frequências.<sup>1</sup>

Como não há relação entre a Óptica geométrica e determinada faixa de frequência, devemos considerar que a mesma trata de qualquer faixa de frequência, desde que a situação permita identificar a propagação da onda eletromagnética com um raio. Assim, certamente, a Óptica geométrica não se preocupa se a onda considerada é ou não visível ao olho humano. Assim seus resultados se aplicam igualmente a animais que enxergam partes do *espectro luminoso* que humanos não enxergam. Na verdade, a maioria dos animais enxerga *menos* cores que humanos. Primatas em geral, incluindo humanos, são bem desenvolvidos na percepção de cores em comparação com outros animais. Entretanto, existem animais que enxergam faixas de frequência que não enxergamos: aves de rapina enxergam faixas de luz ultravioleta; algumas cobras, peixes e insetos enxergam partes de luz infravermelha. Um objeto que seja visto como negro por um ser humano pode apresentar outras cores para um animal desses.

Pelo mesmo raciocínio, a Óptica física trata de quaisquer ondas eletromagnéticas (e mecânicas também) tais que seus comprimentos de onda, na relação que estabelecem com anteparos, fendas, etc, sejam da mesma ordem de magnitude – quando aparecem fenômenos como a interferência e a difração.

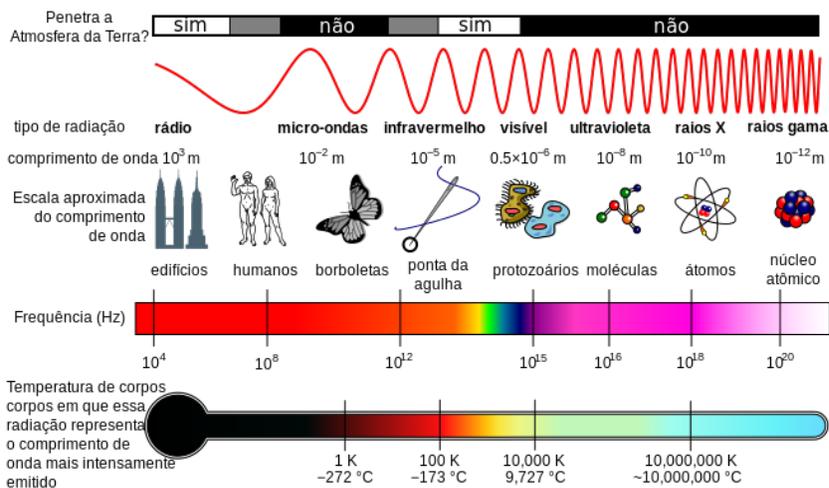
## 10.6 Óptica física: a equação de onda

Como foi dito, a Óptica Física estuda situações nas quais as frequências, comprimentos de onda e amplitudes da radiação eletromagnética são descritores essenciais para a compreensão dos fenômenos. Assim, uma descrição matemática desse ramo da Física deverá, certamente, envolver tais descritores. O espectro eletromagnético está apresentado na figura 10.10, na figura 10.11 e na figura 10.12, com diferentes informações acerca de frequências, comprimentos de onda, cores etc.

---

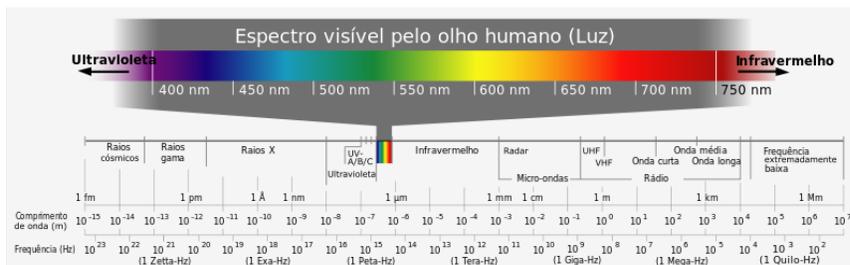
<sup>1</sup>De fato, há uma divisão dentro da própria Óptica. Há a *Óptica geométrica* e a chamada *Óptica física*. Na Óptica geométrica, a radiação eletromagnética é estudada em situações em que sua propagação pode ser tratada como um raio – uma linha reta em um mesmo meio. Assim, a frequência e o comprimento de onda, nesse contexto, não são importantes. Já a Óptica física está interessada exatamente nos fenômenos decorrentes desses descritores, frequência e comprimento de onda, na relação que estabelecem com as dimensões físicas de obstáculos ou recipientes.

**Figura 10.10:** Espectro luminoso explicado



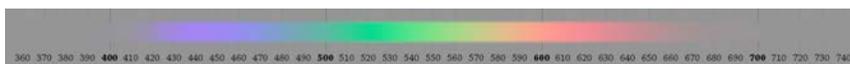
Fonte: Wikimedia Commons (2015).

**Figura 10.11:** Espectro luminoso explicado



Fonte: Wikimedia Commons (2005b).

**Figura 10.12:** Espectro em fundo cinza



Fonte: Wikimedia Commons (2010).

Assim, matematicamente, uma onda é representada como sendo a solução de uma equação do tipo

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = K(x, t),$$

em que  $f(x, t)$  representa a amplitude da onda ao longo do espaço e do tempo,  $v$  é a velocidade da onda (assumida como constante) e  $K(x, t)$  é a fonte responsável pelo surgimento da onda. Na expressão acima representamos uma onda que varia apenas com  $x$  e  $t$ , de modo que a consideramos como sendo uma onda *unidimensional*.

Como, mesmo assim, a amplitude da onda  $f(x, t)$  depende de *duas* variáveis, as derivadas que aparecem na equação são *derivadas parciais*.

Como o leitor deve saber, a derivada é uma operação *local* (veja sua definição usando-se limites). Assim, em regiões em que não estão presentes as fontes causadoras das ondas, a equação anterior se simplifica para uma *equação diferencial parcial homogênea*, dada por

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad 10.2$$

Note que qualquer função do tipo  $f(x \pm vt)$  satisfaz a equação 10.2, o que pode ser provado simplesmente usando-se a regra da cadeia para derivadas. As soluções com  $-vt$  representam ondas que se propagam na direção *positiva* do eixo  $x$  enquanto que soluções com  $vt$  representam ondas que se propagam na direção *negativa* do eixo  $x$ .

Como já comentamos e aqui quantificamos, Uma solução particularmente importante é aquela de *onda plana*, que pode ser escrita como

$$f(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}. \quad 10.3$$

em que  $A$  é uma constante (a amplitude constante da onda),  $k$  é o chamado número de onda e  $\omega$  é a frequência da onda. Substituindo  $f(x, t)$  da equação 10.3 na equação 10.2, teremos uma solução se

$$v = \frac{\omega}{k}.$$

Para ondas eletromagnéticas, que sabemos que se propagam no vácuo com velocidade  $c$ , teremos (no vácuo)

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

em que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Quando a luz se propaga em um material, devemos substituir a equação 10.6 por

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

em que  $n$  é o chamado *índice de refração*. Assim, a velocidade da onda no meio material considerado deve ser escrita como

$$v = \frac{c}{n}.$$

Lembrando que, no caso das radiações eletromagnéticas, o que oscila são os campos elétrico e magnético, então  $f(x, t)$  deve, de fato, ser um vetor, representando o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ . Como a onda eletromagnética é uma onda *transversal*, se a direção de propagação da onda é na direção  $x$ ,  $f(x, t)$ , deve ser representado por um vetor na direção  $z$ , por exemplo. Assim, teríamos, de fato

$$\vec{f}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = E_0 \hat{z} e^{i(kx - \omega t)}.$$

### Exercício 10.3 ONDA REPRESENTADA POR FUNÇÃO VETORIAL

Já que a equação 10.2 pode representar tanto ondas transversais, como ondas eletromagnéticas, ondas longitudinais e ondas sonoras, escreva, na forma vetorial, a amplitude  $\vec{f}$  de uma onda longitudinal que se propaga na direção  $x$ .

Neste caso, a onda eletromagnética estaria *polarizada linearmente*, já que o campo elétrico só varia na direção  $\hat{z}$ . Considerada em três dimensões, essa onda eletromagnética seria uma onda plana, na qual os planos são aqueles perpendiculares à direção de propagação, ou seja, à direção  $\hat{x}$ , de modo que são os planos  $yz$ .<sup>2</sup> Entretanto, uma vez que tenhamos todas essas informações em mente, podemos continuar a representar a amplitude  $f(x, t)$  na forma escalar, como faremos daqui em diante.

Note agora que uma solução de onda plana deve ser escrita como

$$f(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)},$$

em que

$$n = \left( \frac{ck}{\omega} \right),$$

<sup>2</sup>Nesse caso, as equações fundamentais do Eletromagnetismo, chamadas *Equações de Maxwell*, informam que os vetores  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{k}$  formam um triedro fundamental, ou seja, são mutuamente ortogonais. Para a escolha que fizemos para a direção do campo elétrico – a direção  $\hat{z}$  –, e a direção de propagação –  $\vec{k} = k\hat{x}$  –, teríamos  $\vec{B} = -B\hat{y}$ .

de modo que o índice de refração é, em geral, uma função da frequência: a relação funcional entre o índice de refração e a frequência,  $n(\omega)$ , é chamada de *equação de dispersão da onda* (equação que explica o experimento de dispersão da luz por um prisma feito por Newton – em que ondas de comprimentos de onda diferentes e, portanto, frequências diferentes, eram desviadas por ângulos diferentes pelo prisma, como veremos mais adiante).

Outro fenômeno importante relacionado ao comportamento do índice de refração é aquele que surge no contexto de materiais que *absorvem* a luz em determinadas frequências, refletindo-as em todas as outras. O fenômeno de absorção da luz pode ser facilmente modelado por um índice de refração complexo.

De fato, a um índice de refração complexo teremos associado um valor complexo do número de onda, ou seja,

$$k = (n_r + in_i) \frac{\omega}{c},$$

em que  $n_r$  é a parte real do índice de refração e  $n_i$  é sua parte imaginária ( $i = \sqrt{-1}$  como de costume) e a solução de onda plana 10.6 fica

$$f(x, t) = A e^{-n_i \omega x / c} e^{i \frac{\omega}{c} (n_r x - ct)},$$

indicando que a amplitude da onda decai à medida que essa onda se propaga na direção  $x$  positiva, ou seja, é absorvida pelo meio. Temos *ondas planas amortecidas*.

Podemos usar essas soluções para definir o conceito de *transmitância*, que mede a capacidade intrínseca de um material de transmitir radiação em determinada frequência. A intensidade de uma onda plana dada pela solução de ondas planas amortecidas é

$$\mathcal{J} = |f(x, t)^* f(x, t)| = \mathcal{J}_0 e^{-2n_i \omega / c},$$

em que  $\mathcal{J}_0 = A^2$  é a intensidade com que a onda eletromagnética é emitida, e  $\mathcal{J}$  é a intensidade da onda que sai do material, ou seja, a onda transmitida por ele.

Definimos, portanto, a transmitância como sendo

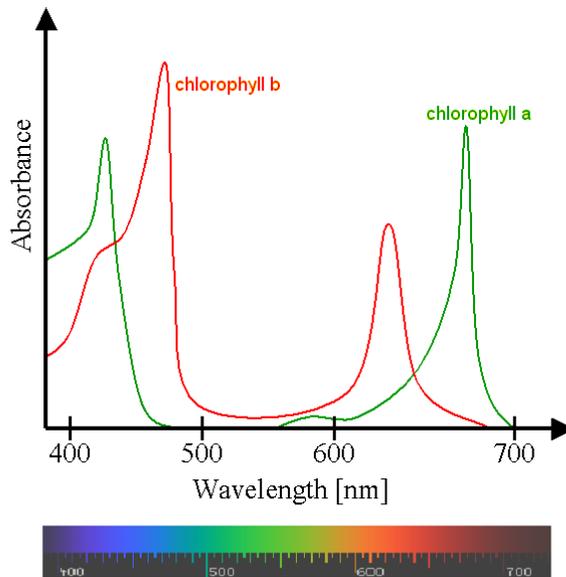
$$\mathcal{T} = -\ln \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0}$$

que, para ondas planas, fica

$$\mathcal{T} = 2 \frac{\omega}{c} n_i.$$

Também podemos definir a *absorvância*  $\mathcal{A}$  (ou *absorbância*) como a razão entre a intensidade *absorvida* pelo material e a intensidade incidente. A *reflectância*  $\mathcal{R}$  é, de modo análogo, definida como sendo a razão entre a intensidade *refletida* por um material com relação à intensidade incidente nele. Evidentemente, devemos ter, por conservação da energia:  $\mathcal{T} + \mathcal{A} + \mathcal{R} = 1$ .

**Figura 10.13:** Espectro de absorvância das clorofilas A e B



Fonte: Wikimedia Commons (2008).

#### **Exercício 10.4** ABSORVÂNCIA DA CLOROFILA

Na figura 10.13 apresentamos um gráfico da absorvância da clorofila. A clorofila é constituída, entre outros elementos, da *clorofila A* e da *clorofila B*. Esses elementos absorvem a luz em diferentes frequências ou comprimentos de onda.

- (a) Considerando a figura, escreva uma forma aproximada para o índice de refração de ambas as clorofilas.

(b) Considerando apenas os picos de absorvância da figura, faça um *diagrama de energia* da seguinte maneira: desenhe uma linha vertical e marque nela, para cada uma das frequências associadas aos picos de absorvância das clorofilas A e B, uma linha horizontal. O diagrama de energia resultante mostra um *esquema de níveis de energia* associados à clorofila como um todo.

## Geolocalização e sensoriamento remoto

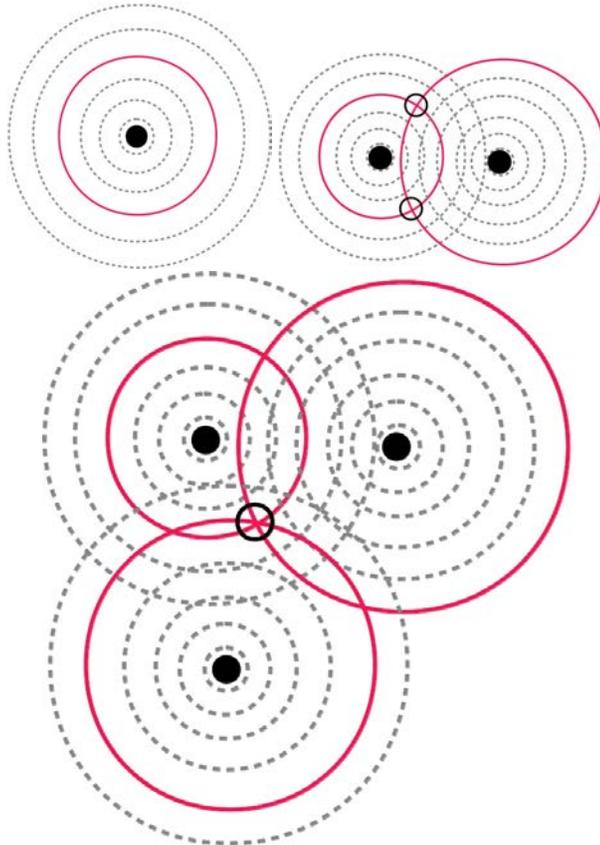
A *geolocalização*, ou *georreferenciamento*, é o processo de localização de um objeto na superfície terrestre por meio de coordenadas, geralmente a *latitude* e a *longitude*. O sistema *GPS*, dos Estados Unidos, é o sistema mais conhecido de geolocalização por satélites, mas existe também o *GLONASS*, da Rússia, ao qual recentemente a Universidade de Brasília se juntou em convênio (CDT UnB, 2014). Esses sistemas baseiam-se em detecção mútua de radiações emitidas e reemitidas entre vários satélites em órbitas ao redor da Terra e receptores-reemissores na superfície (que pode ser um simples telefone celular, por exemplo).

Pelo tempo que um sinal eletromagnético gasta para se mover entre um satélite e um celular, sabe-se a distância entre eles. No entanto, essa distância apenas informa ao satélite que o celular está num certo círculo ao redor dele. Para ter informação mais precisa, é necessário haver mais outros dois satélites, como mostra a figura 10.14, fazendo assim uma *triangulação*. Em certos casos de rastreamento, essa técnica também é utilizada com antenas ao invés de satélites. Ao contrário do que possa parecer, a triangulação não exige que o objeto rastreado/localizado esteja no triângulo formado pelas três antenas, pois também funcionaria num caso como o representado na figura 10.15.

O *sensoriamento remoto* é realizado através do mapeamento da superfície pela radiação por ela emitida naturalmente, em seguida captada e analisada por satélite. O resultado pode ser imagens convencionais, que são fotografias feitas pela captação da luz visível, mas também podem ser mapas especiais, como mapas de temperatura feitos através da captação específica de *radiação infravermelha*. Técnicas computacionais de *processamento de imagens* são importantes nesse contexto. A *NASA* é uma referência mundial no sensoriamento remoto. No Brasil, o principal órgão nessa área é o *INPE*, *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*, também responsável pela previsão do tempo.

Técnicas de sensoriamento remoto (SR) desempenham um papel importante no campo em diagnósticos como a estimativa da produtividade, avaliação nutricional, detecção de pragas e doenças, previsão do tempo e avaliação da necessidade hídrica das plantas etc. Esse tipo de técnica se enquadra no contexto da agricultura de precisão, que já abordamos em capítulo anterior.

**Figura 10.14:** Ilustração da técnica da triangulação  
Um receptor detecta uma região circular, dois restringem a região a dois pontos possíveis e três receptores definem um só ponto.

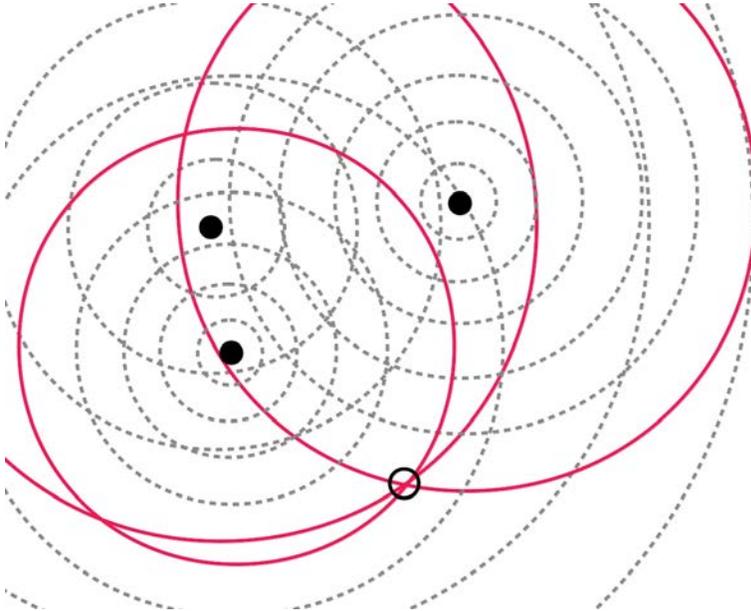


Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Libre Office Draw*.

Um uso particularmente importante do SR está na detecção das diferenças de reflectância relacionadas à densidade de cobertura vegetal. Trata-se da *radiometria espectral*, que identifica a intensidade com que cada material reflete a radiação eletromagnética em diferentes frequências ou comprimentos de onda. Por essa técnica, dados de reflectância de determinada área são associados a características das plantas como a fração de radiação interceptada fotossinteticamente. Para fazer essa associação, foram construídas fórmulas matemáticas

de caráter empírico que combinam reflectâncias em diferentes faixas do espectro eletromagnético – em especial as bandas de frequência do visível e do infravermelho próximo. As associações propriamente ditas são chamadas de *índices de vegetação (IV)*.

**Figura 10.15:** Representação da técnica da triangulação com três detectores



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Libre Office Draw*.

Essa técnica de associação se baseia na forma como a vegetação responde à iluminação em cada faixa de frequência. O elemento mais importante nessa análise é a clorofila, cuja análise da resposta espectral está apresentada na figura 10.13 e que repetimos aqui, com a figura 10.16, pela apresentação conjunta da curva de reflectância e do espectro de absorvância.

Notamos, pela figura, que há baixa reflectância na parte visível do espectro e alta reflectância no infravermelho. De fato, plantas verdes vivas absorvem a radiação solar na região fotossinteticamente ativa, que elas usam como fonte de energia no processo de fotossíntese. As células das plantas evoluíram para reemitir a radiação solar na região próxima do infravermelho pelo fato de que as radiações com comprimento de onda maior do que aproximadamente  $700 \text{ nm}$  não são capazes de sintetizar moléculas orgânicas. Assim, uma absorção alta nessa região de comprimento de onda iria apenas servir para sobreaquecer as plantas, danificando tecidos etc.

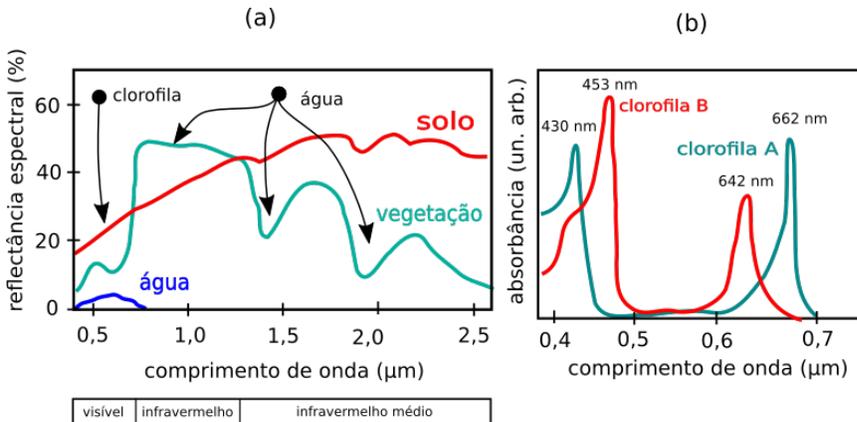
Desse modo, plantas verdes vivas aparecem relativamente escuras na região fotossinteticamente ativa e relativamente brilhantes no vermelho e no infravermelho próximo. Ao contrário, nuvens e neve tendem a ser muito brilhantes no vermelho e em outras frequências do visível, mas consideravelmente escuras no infravermelho próximo. Quanto mais plantas houver, mais radiação será afetada.

Diferentes IVs já foram propostos na literatura para lidar com diferentes aspectos das características do solo. Cada um deles foi otimizado para a análise de determinada característica, por exemplo, selecionando o intervalo espectral mais adequado para o estabelecimento da correlação entre as reflectâncias medidas e as características do solo.

**Figura 10.16:** Curvas características da reflectância do solo e comprimentos de onda de absorvância das clorofilas A e B

(a) Curvas características da reflectância da água, solo e vegetação verde, apresentando faixas espectrais de absorção da radiação eletromagnética associadas a pigmentos e água.

(b) Comprimentos de onda de absorvância das clorofilas A e B.



Fonte: elaboração dos autores, com base no capítulo 4 do livro *Agricultura de Precisão: resultados de um novo olhar*, distribuído gratuitamente pela Embrapa (SHIRATSUCHI, 2014).

Um IV muito utilizado na agricultura é o NDVI,<sup>3</sup> uma vez que apresenta forte correlação linear com o crescimento das culturas.

O NDVI é calculado pela expressão

$$NDVI = \frac{\mathcal{R}_{NIR} - \mathcal{R}_R}{\mathcal{R}_{NIR} + \mathcal{R}_R},$$

<sup>3</sup>Normalized Difference Vegetation Index, comumente traduzido como “Índice de Vegetação por Diferença Normalizada”.

em que  $\mathcal{R}_{\text{NIR}}$  é a reflectância no infravermelho próximo e  $\mathcal{R}_{\text{R}}$  é a reflectância no vermelho. Como as reflectâncias  $\mathcal{R}$  apresentam valor no intervalo  $[0, 1]$ , o NDVI assume valores no intervalo  $[-1, 1]$ . Tipicamente, valores negativos próximos de  $-1$  correspondem à água; valores próximos de zero  $[-0.1, 0.1]$  correspondem a áreas com pedra, areia ou neve; e valores positivos relativamente pequenos ( $[0.2, 0.4]$ ) representam grama; enquanto que valores altos e positivos (próximos a 1) indicam florestas tropicais.

Assim, a técnica de cálculo da diferença de reflectância recebe do elemento que faz o sensoriamento uma matriz de pixels, associando a cada um deles valores da reflectância no infravermelho próximo e no vermelho. Para cada pixel, então, se calcula o NDVI. Atribuindo-se uma cor a cada intervalo significativo do NDVI (como os referidos no parágrafo anterior), obtém-se uma imagem extremamente representativa da distribuição de vegetação no solo considerado.

De modo geral, se aparece mais radiação refletida no infravermelho próximo do que nas frequências do visível, então a vegetação naquele pixel é provavelmente densa e deve conter algum tipo de floresta.

## 10.7 Óptica geométrica

No contexto da Óptica Geométrica, feixes de luz viajam em linha reta por meios transparentes e homogêneos. No entanto, quando um feixe de luz encontra uma *superfície refletora*, sua direção de propagação muda. Se a velocidade de incidência for decomposta numa coordenada paralela e outra perpendicular à superfície, a coordenada paralela fica inalterada e a coordenada perpendicular tem a sua polaridade ( $\pm$ ) invertida. Disso, decorre uma das leis mais úteis da Óptica: o **ângulo de incidência** ( $\theta_i$ ) é igual ao **ângulo de reflexão** ( $\theta_f$ ):

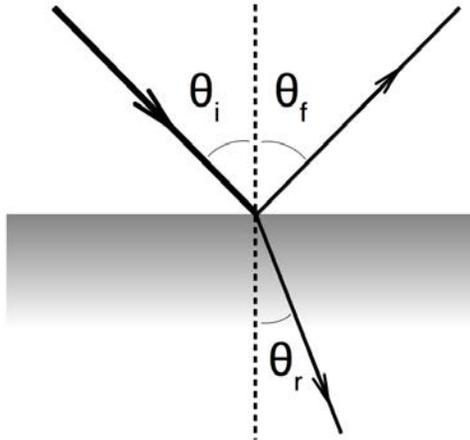
$$\theta_i = \theta_f,$$

onde  $\theta_i$  e  $\theta_f$  são medidos em relação à *normal*, ou seja, à direção perpendicular ao plano de separação entre os meios.

A figura 10.17 ilustra a luz vindo de um meio de menor índice de refração (o ar) e incidindo sobre outro de maior índice de refração (a água ou o vidro). Certa fração da luz é refletida a um ângulo de reflexão ( $\theta_f$ ) igual ao ângulo de incidência ( $\theta_i$ ). A fração restante é refratada, ou seja, entra no meio mais refrativo numa direção determinada pelo **ângulo de refração** ( $\theta_r$ ), medido em relação à direção perpendicular ao plano da interface entre os meios.

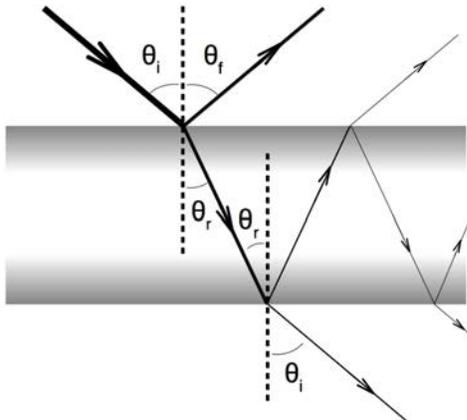
A figura 10.18 mostra raios que refletem no interior da lente. Em *fibras ópticas*, a luz no interior do fio é praticamente toda refletida para dentro novamente, de modo que *sinais* podem ser transmitidos através de feixes de luz. Esse é o princípio de funcionamento das fibras ópticas que transmitem sinais digitais a longas distâncias, com pouca perda de informação, por meio da reflexão interna da luz na fibra.

**Figura 10.17:** Ângulo de incidência, de reflexão e de refração



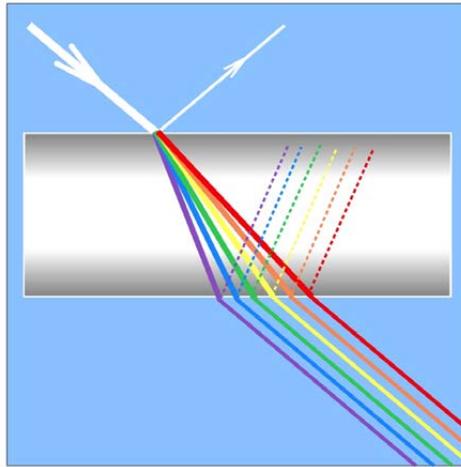
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*

**Figura 10.18:** Múltipla reflexão e refração sobre uma lente



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*

**Figura 10.19:** Prisma divide a luz branca em cores



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*

A figura 10.19 mostra que o índice de refração depende dos meios mas também da frequência da luz incidente, o que permite que a luz branca seja dividida em feixes de várias cores, correspondentes a várias frequências. Devido a esse fenômeno, a luz solar pode ser dividida numa espécie de miniarco-íris por meio de um prisma. Esse fenômeno impressionou os antigos, que usaram a palavra *spectrum*, que significa “aparição”, para designar uma faixa luminosa que muda de cor continuamente. Hoje, a palavra “espectro” é usada de forma mais geral, para se referir a qualquer grandeza ou qualidade que possa ser representada como uma distribuição contínua.

Na verdade, como explicado pela Teoria da Relatividade, a trajetória da luz é curvada pela gravidade, mas essa curvatura é desprezível na maioria dos fenômenos ópticos, de modo que a consideramos reta em meio transparente e homogêneo. Todavia, a luz também pode ser curvada quando passa por um meio não homogêneo. Por exemplo, quando passa por um meio com diferentes densidades. Um interessante vídeo da produtora *Manual do Mundo Comunicação* mostra como se pode curvar um feixe de luz *laser* fazendo-o passar por um aquário com uma mistura de água e açúcar (MANUAL DO MUNDO COMUNICAÇÃO, 2015). Isso ocorre porque a densidade daquele meio torna-se variável devido a diferentes concentrações de açúcar a diferentes alturas.

Para simplificar a descrição desse fenômeno, inicialmente considera-se a luz passando de um meio homogêneo A a um outro meio homogêneo B, para analisar o que ocorre na fronteira entre esses meios. Se um feixe de luz, no meio A, incide na fronteira AB ao longo de uma reta que faz um ângulo  $\theta_i$  com a normal, ele entrará no meio B numa outra direção que faz um ângulo  $\theta_r$  com a normal. Ou seja, sofrerá um desvio. A relação entre esses ângulos é dada pela equação

$$\eta_{A(i)}\theta_i = \eta_{B(r)}\theta_r, \quad 10.4$$

onde  $\eta_{A(i)}$  e  $\eta_{B(r)}$  são os *índices de refração* do meios A (pelo qual a luz incide) e do meio B (no qual a luz refratada penetra). **Refração** é o nome que se dá a esse desvio. E o índice de refração ( $\eta$ ) é uma propriedade dependente da composição físico-química do meio que descreve.

**Problema 10.5.** RAZÃO ENTRE ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA E REFRAÇÃO

Reescreva a equação 10.4 de modo a mostrar que a razão entre o ângulo de incidência e o ângulo refração dependem apenas do *índice de refração relativo* entre os meios A e B, dado por  $\eta_{AB} = \frac{\eta_A}{\eta_B}$ .

Como vimos, o índice de refração de um meio pode ser medido através da razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz neste meio, ou seja,

$$\eta_A = \frac{c}{v_A},$$

onde  $\eta_A$  é o índice de refração do meio A,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $v_A$  é a velocidade da luz no meio A. A velocidade da luz no vácuo é uma **constante fundamental**, dada por

$$c = 299.792.458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

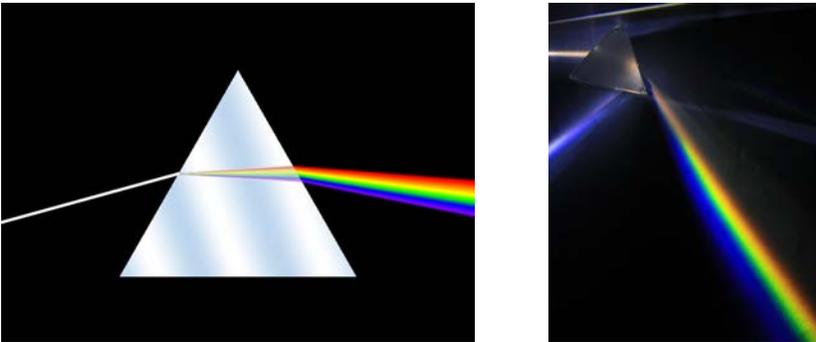
Como a velocidade da luz é maior no vácuo que em qualquer outro meio, o índice de refração de qualquer meio material é sempre maior que 1 (mas lembre-se do que dissemos sobre absorção de radiação eletromagnética - ela pode assumir valores complexos também). Se um meio tem índice de refração igual a 2, por exemplo, a luz viaja duas vezes mais rápido no vácuo que nesse meio. Ou seja, a velocidade da luz é reduzida em 50% nesse meio em relação a  $c$ .

**Problema 10.6.** Se a velocidade da luz é sempre a mesma, como ela pode ser menor no interior de algum material? O que faz com que ela seja menor? Pesquise e elabore uma resposta.

Assim, a refração está relacionada tanto a uma variação de velocidade quando a uma variação de direção da luz que muda de meio de propagação. Outro fato importante é que o índice de refração, além de depender das propriedades dos meios, depende também da frequência da onda luminosa que propaga por ele, como já salientamos ao mencionar o conceito de *relação de dispersão*.

É isso que faz com que a luz branca, composta de luzes de todas as cores, seja decomposta ao passar por um *prisma*, nome dado a um cristal que decompõe a luz,<sup>4</sup> como mostrado na figura 10.20.

**Figura 10.20:** Decomposição da luz branca em luzes de diversas cores



Fonte: Wikimedia Commons (2005a, 2009)

## Objetos e imagens

De longe, o sentido humano de maior alcance é a visão. Também é possivelmente o sentido mais utilizado para perceber o mundo ao redor. Assim, é através de sua *imagem* que um *objeto* é mais frequentemente percebido. Podemos observar um objeto através da luz que sai de sua superfície, difundida ou refletida. A luz pode sair do objeto e seguir diretamente ao olho, ou pode antes ser refletida por um *espelho*. Por isso, ao olharmos em direção a um espelho, é como se estivéssemos vendo os objetos refletidos por ele. Na Física, dizemos que vemos a *imagem* de um objeto mesmo se o vemos através do espelho.

<sup>4</sup>Os conceitos de “prisma” na Óptica e na Geometria são diferentes, embora relacionados.

Isso significa que o espelho reflete a luz de uma forma coerente que nos permite receber a informação visual transmitida pelo objeto. Para estudar como isso ocorre, é útil estudar como *pontos* individuais dos objetos são refletidos. Se soubermos, por exemplo, como o ponto mais baixo e o ponto mais alto de um objeto são refletidos por um espelho, e como chegam a um observador, poderemos saber se sua altura, vista através do espelho, se apresentará maior, menor ou igual relativamente à altura real.

**Definição 10.3.** SISTEMA ÓPTICO: sistema que reemite feixes de luz que nele incide, de maneira que conserve a informação visual neles contida, embora possivelmente deformada.

Um *sistema óptico* é formado por *componentes ópticos*, como lentes, espelhos ou prismas, que desviam os feixes de luz que nele incidem, reemitindo-os em seguida. Assim, um sistema óptico é intermediário entre o *objeto* e o *observador*. O que sai do sistema óptico e chega ao observador é o que chamamos de “imagem”. Por isso, no vocabulário da Óptica, associa-se a palavra “objeto” aos feixes de luz *incidentes* no sistema óptico e a palavra “imagem” aos feixes de luz *emergentes*, reemitidos pelo sistema óptico.

**Definição 10.4.** PONTO OBJETO: em relação a um sistema óptico, o ponto formado pela intersecção das retas ao longo das quais os raios incidentes nesse sistema óptico viajam.

**Definição 10.5.** PONTO IMAGEM: em relação a um sistema óptico, o ponto formado pela intersecção das retas ao longo das quais os raios emergentes desse sistema óptico viajam.

Imagine um pequeno círculo pintado num objeto que seja grande o suficiente para ser percebido visualmente, mas pequeno suficiente para ser considerado um ponto. Os raios de luz que saem desse ponto são divergentes, pois o ponto pode ser visto de diversos lugares, de modo que todos os observadores concordem onde o ponto está, o que indica que todos aqueles raios divergem a partir de um ponto. Ao olhar para o mesmo objeto através de um espelho, todos também concordariam que aquele ponto parece estar num mesmo lugar atrás do espelho, o que indica que os raios de luz refletidos também parecem vir de um mesmo ponto.

**Definição 10.6.** FEIXE DIVERGENTE: conjunto de raios de luz que viajam *afastando-se*, um do outro, numa frente circular ou esférica, em caminhos retos vindos de um só ponto.

**Definição 10.7.** FEIXE CONVERGENTE: conjunto de raios de luz que viajam *aproximando-se*, um do outro, numa frente circular ou esférica, em direção a um único ponto.

**Definição 10.8.** FEIXE PARALELO: conjunto de raios de luz que viajam *paralelamente*, um ao outro.

Quando um feixe de luz incide sobre um espelho, ele é *refletido*. Quando um feixe paralelo incide sobre um **espelho côncavo**, ele é refletido como um feixe convergente. Quando um feixe paralelo incide sobre um **espelho convexo**, ele é refletido como um feixe divergente.

Quando um feixe de luz incide sobre uma lente, ele é *refratado*. Quando um feixe paralelo incide sobre uma **lente convergente**, ele atravessa a lente e sai do lado oposto ao que entrou como um feixe convergente. Quando um feixe paralelo incide sobre uma **lente divergente**, ele atravessa a lente e sai do lado oposto ao que entrou como um feixe divergente.

**Definição 10.9.** Foco: ponto no qual coincidem as retas sobre as quais viajam os raios de luz de um feixe refletido por um espelho ou refratado por uma lente.

Um *espelho esférico* é uma superfície refletora com forma de um dos hemisférios de uma *casca esférica*. Se a superfície refletora equivale à parte externa de uma esfera, o espelho é convexo; se a superfície refletora é a interna, o espelho é côncavo. A distância entre a superfície de um espelho e seu foco é a *distância focal* ( $d_f$ ). A distância focal de um espelho esférico é dada por

$$d_f = \frac{R}{2},$$

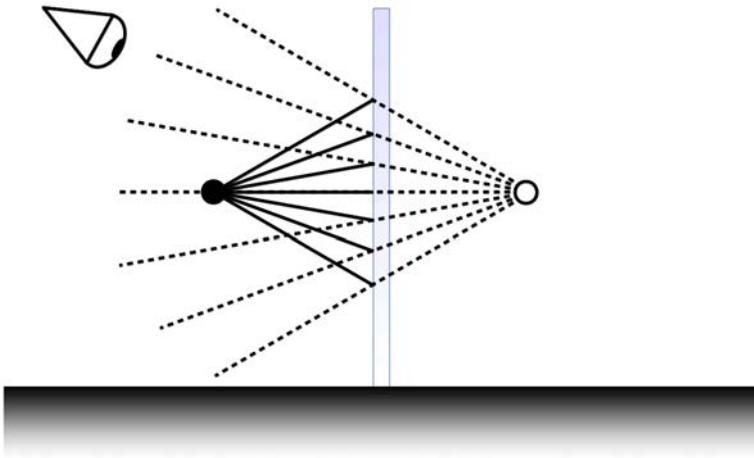
onde  $R$  é o raio da esfera imaginária em cuja superfície está contida a superfície do espelho esférico.

Quando nos olhamos num espelho plano, nossa imagem parece estar dentro do espelho. Quanto mais perto estivermos do espelho, mais perto dele parecerá a nossa imagem pelo lado “de dentro”. O mesmo acontece com qualquer objeto refletido pelo espelho: a distância do objeto ao espelho é sempre igual à distância de sua imagem *virtual* ao espelho. Ou seja,

$$d_o = d_i,$$

onde  $d_o$  é a distância do objeto ao espelho e  $d_i$  é a distância da imagem virtual desse objeto ao espelho.

**Figura 10.21:** Representação da imagem real e da imagem virtual de um objeto refletido  
As imagens parecem estar à mesma distância do espelho.



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

Para um espelho esférico, não existe uma relação tão simples, mas sim

$$\frac{1}{d_f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i},$$

onde  $d_f$  é a distância focal.

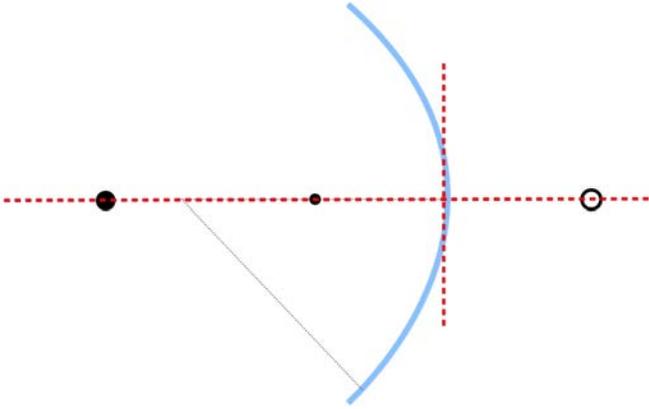
Quando visto através de um espelho ou uma lente, a razão entre a altura da imagem ( $h_i$ ) e a altura do objeto ( $h_o$ ) é sua *magnificação*  $M$  (também chamada de “ampliação”), dada por

$$M = \frac{h_i}{h_o}.$$

Cada tipo de sistema óptico tem uma fórmula própria para o cálculo da magnificação. Para uma máquina fotográfica, temos

$$M = \frac{d_f}{d_o - d_f} = \frac{d_i - d_f}{d_f}.$$

**Figura 10.22:** Da esquerda para a direita: imagem real, foco, espelho e imagem virtual



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

Para um telescópio,

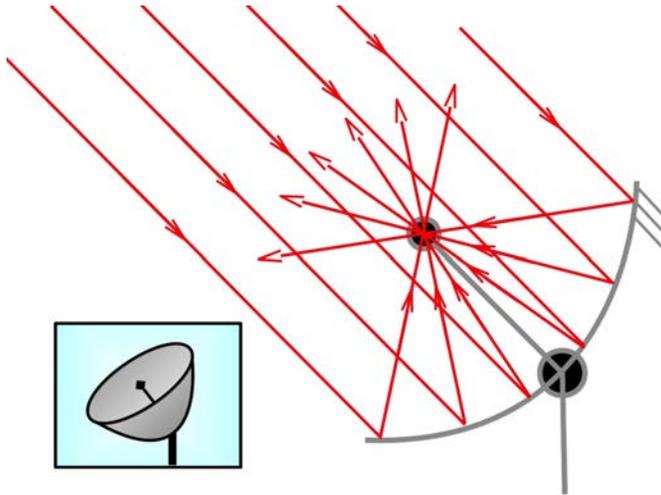
$$M = \frac{d_f^{\text{obj}}}{d_f^{\text{ocl}}},$$

onde  $d_f^{\text{obj}}$  é a distância focal da *lente objetiva* e  $d_f^{\text{ocl}}$  é a distância focal da *lente ocular*.

**Definição 10.10.** LENTE OBJETIVA: lente que, num instrumento óptico de duas lentes, está mais próxima do objeto observado, e sobre a qual incidem raios de luz provenientes desse objeto.

**Definição 10.11.** LENTE OCULAR: lente que, num instrumento óptico de duas lentes, está mais próxima do olho do observador, e da qual emergem os raios de luz que chegam a esse olho.

**Figura 10.23:** Ilustração de uma antena parabólica, com raios incidindo paralelamente, uns aos outros, e sendo refletidos pela superfície da antena de modo a convergir ao foco



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

## 10.8 Refletores parabólicos e usinas de energia solar

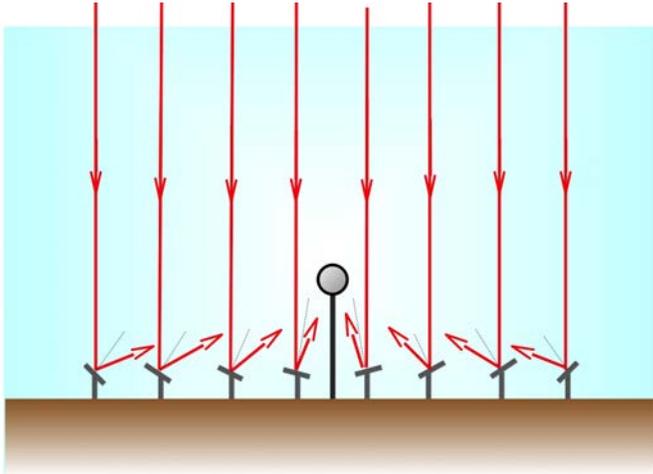
Espelhos esféricos não convergem perfeitamente raios que chegam paralelos ao foco. Essa é uma característica do *paraboloide de revolução*, uma versão 3D da *parábola* criada pela rotação (“revolução”) dessa curva em torno de um eixo.

Esse é o caso dos *espelhos parabólicos*, que permitem formação de imagens menos distorcidas que as formadas pelos espelhos esféricos. Também é o caso das *antenas parabólicas*, cujo receptor é colocado no foco do paraboloide formado por sua superfície.

Numa usina solar, busca-se desviar raios de uma região para um único ponto. No entanto, devido à enorme área que tais usinas ocupam, não é viável construir espelhos parabólicos, que deveriam ser demasiadamente grandes. Nesse caso, usa-se múltiplos espelhos planos, cada um alinhado de modo a desviar os raios que nele chegam para o foco escolhido.

O *Ivanpah* é uma enorme usina solar no deserto *Mojave*, na Califórnia, patrocinado pela *NRG Energy* e pelo *Google*. Centenas de espelhos são orientados para refletirem a luz solar a captadores que usam o calor transmitido pela luz para aquecer água e mover turbinas que geram eletricidade.

**Figura 10.24:** Ilustração de um conjunto de espelhos especialmente orientados para direcionar raios ao mesmo ponto de captação de energia



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

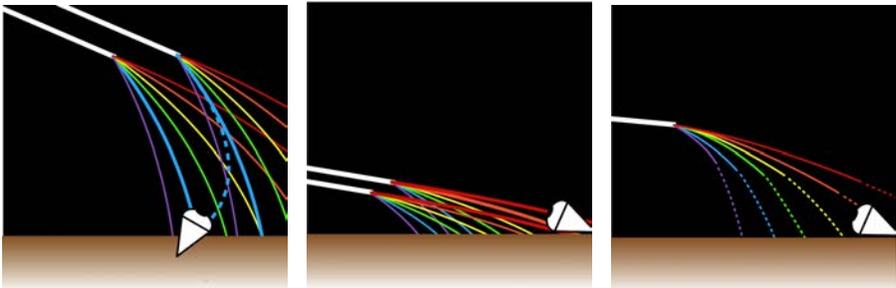
Nesse tipo de construção, os planos dos espelhos devem ser orientados considerando-se que o ângulo de incidência é sempre igual ao ângulo de reflexão, e que os raios do Sol chegam praticamente paralelos entre si (pois o Sol está muito longe da Terra e apenas um ângulo mínimo de raios chega aqui). Como a posição relativa do Sol no céu muda durante o dia, o ideal é que os espelhos sejam também movidos durante o dia, eletronicamente. Casos não seja possível, talvez seria conveniente fazer os cálculos com base na inclinação com que os raios chegam na hora de maior incidência solar do dia. Os raios do Sol não chegam sempre perpendiculares ao solo ao meio-dia em toda a Terra. Depende da latitude. Existem regiões da Terra nas quais o Sol *nunca* passa exatamente no centro do céu.

## 10.9 A luz e a atmosfera

Por que o céu é azul? Quando olhamos para o céu azul, o que estamos vendo é a luz do Sol, só que não diretamente. A luz do Sol é desviada por uma miríade de moléculas do ar, percorrendo diversos caminhos até chegar aos nossos olhos. A esse fenômeno dá-se o nome de “dispersão Rayleigh”. O que acontece é que a luz azul é a que está mais sujeita a esse tipo de desvio, o que faz com que mais luz azul chegue aos nossos olhos, vinda de todas as direções. O mesmo fenômeno explica por que a cor do céu tende ao vermelho no nascer e no pôr do

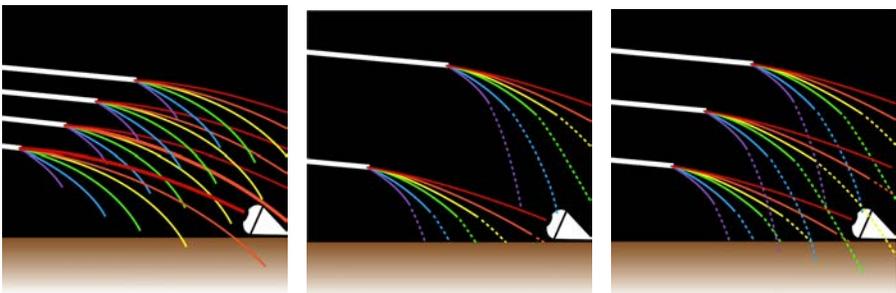
Sol. Quando o Sol está próximo do horizonte, o caminho que deve percorrer até nossos olhos torna-se mais longo: a luz deve passar quase tangencialmente à superfície da Terra por um longo caminho. Como a luz azul é a mais susceptível a ser desviada, a maioria dos raios de luz azul são desviados para outros pontos da atmosfera ou para o espaço antes que possam chegar. A luz vermelha, nessa situação, passa a ter vantagem por se desviar menos, seguindo um caminho mais reto até chegar a nossos olhos. De um modo ou de outro, toda luz que vemos no céu veio do Sol. Uma explicação mais detalhada, com um experimento que simula a dispersão Rayleigh, é encontrada no artigo *O azul do céu e o vermelho do pôr do sol* (ROCHA, 2010).

**Figura 10.25:** Por que o céu é azul durante o dia e avermelhado ao nascer e ao pôr do sol?



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

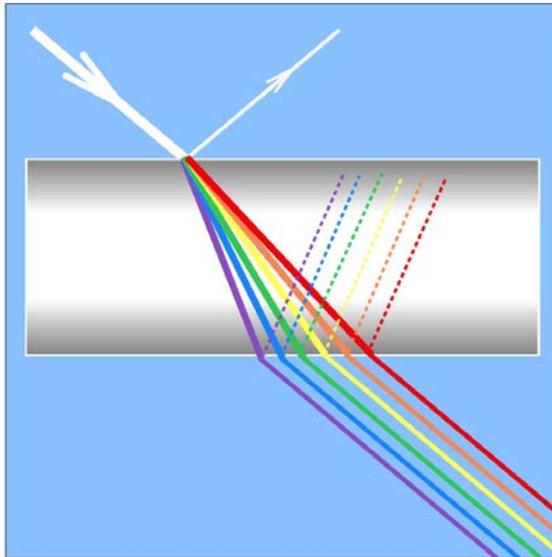
**Figura 10.26:** Por que o céu fica colorido ao amanhecer ou anoitecer?



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

O arco-íris (figura 10.28) também é uma manifestação da refração da atmosfera, dessa vez causada pelas gotículas de água que funcionam como milhares de cristais atuando em conjunto. O desvio causado pelas gotículas de água após uma chuva é muito mais intenso que o causado pelas moléculas de ar em situação normal.

**Figura 10.27:** Divisão da luz branca em luzes coloridas ao passar por uma região de mais alto índice de refração, como o vidro ou a água



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Libre-Office*.

Ao comparar a figura 10.27 e a figura 10.28, é fácil confundir-se e achar que o arco-íris represente o caminho ao longo do qual os feixes de luz viajam. Na verdade, num dado instante, um feixe de luz diferente passa em cada ponto de um arco-íris que vemos, em direção aos nossos olhos. É como se estivéssemos no final de um dos feixes multicolores da figura 10.20.

Pode-se notar a ocorrência de arco-íris duplo na figura 10.28, um fenômeno raro. Note que as cores nos dois arco-íris aparecem em ordens opostas.

O surgimento de dois arco-íris de cores na ordem contrária é representada na figura 10.29: parte da luz que entra é refletida internamente na gota, antes de sair dela. Na realidade, um feixe de luz pode passar por múltiplas gotas durante o seu caminho, desviando-se gradualmente da direção inicial. Na verdade, o primeiro feixe a sair da gota é mais difícil de ser visto: é visto como um arco-íris circular em volta do Sol. O arco-íris mais frequentemente observado é

formado por feixes que foram refletidos internamente, com as cores invertidas. O interessante é que, ao olhar um arco-íris desse, a pessoa terá a impressão de que as cores não estão invertidas, pois o vermelho parecerá ter se afastado menos do Sol. Isso acontece porque o arco-íris que vemos é formado por raios de luz vindos de posições levemente diferentes, como mostrado na figura 10.30, o que faz com que a ordem *aparente* das cores seja invertida em relação à ordem das cores dividida inicialmente quando a luz branca atinge a gota.

**Figura 10.28:** Fotografia de um arco-íris

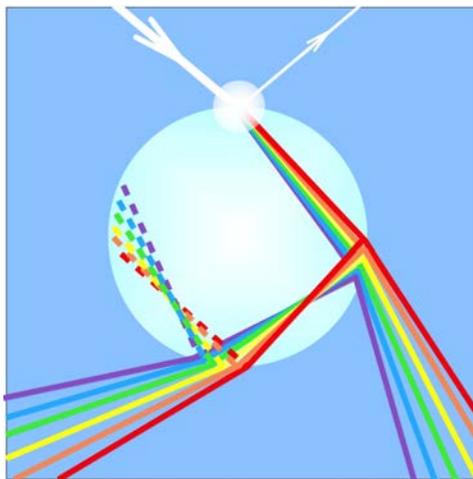


Fonte: Wikimedia Commons (2011).

Pode-se dizer que houve uma “inversão real” na gota e uma “inversão aparente” devido aos múltiplos raios, fazendo a ordem observada coincidir com a ordem da divisão original. O segundo arco-íris, da figura 10.28, aparentemente invertido, na verdade teve suas cores invertidas por duas gotículas, antes de chegar ao observador, tendo sido assim duplamente invertida em gotas (mais a inversão aparente).

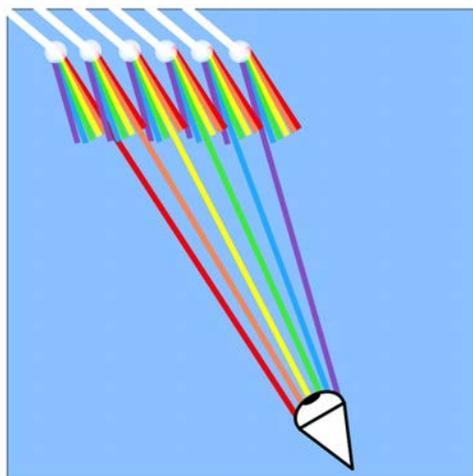
É interessante que um astronauta na superfície da Lua não tem o privilégio de ver o céu azul. Na verdade, não o vê de cor alguma além do preto. Mesmo quando o Sol está visível da superfície lunar (ou seja, quando “está de dia” lá), o céu permanece todo preto. É possível ver o Sol amarelo e brilhante, a Terra iluminada por ele, o solo da própria lua iluminado, mas o céu continua preto como se fosse noite. Só vemos o céu colorido porque temos uma **atmosfera** na Terra.

**Figura 10.29:** Ilustração da separação das cores da luz de uma gotícula de água no ar



Fonte: Wikimedia Commons (2011).

**Figura 10.30:** Ilustração de raios de luz colorida vindos de gotículas de água diversas, causando inversão aparente das cores do arco-íris



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *LibreOffice*.

## 10.10 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 10.1

- $0,74 \frac{1}{\text{m}} = 7,4 \times 10^{-1} \frac{1}{\text{m}}$
- $0,0296 \frac{1}{\text{m}} = 2,96 \times 10^{-2} \frac{1}{\text{m}}$
- $0,0016 \frac{1}{\text{Å}} = 1,6 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}}$
- $6,24 \frac{1}{\text{Å}} = 6,24 \times 10^{10} \frac{1}{\text{m}}$

### Solução 10.2

- 6,28 Hz
- $4,8 \times 10^{15}$  Hz
- $20,9 \times 10^{18}$  Hz

### Solução 10.3

Nesse caso, teremos simplesmente  $\vec{f}(x, t) = \hat{x}Ae^{i(kx - \omega t)}$ , em que a referência ao eixo  $x$ , de propagação, é feita tanto no vetor unitário, quanto no produto escalar  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx$ .

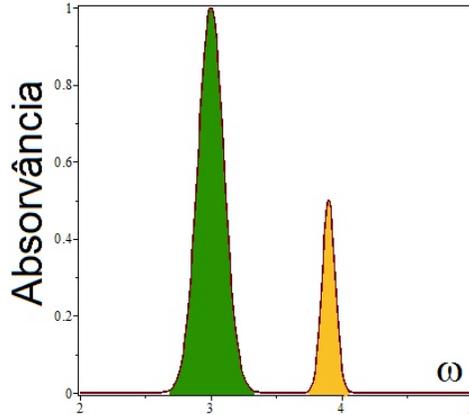
### Solução 10.4

- (a) Matematicamente devemos considerar a parte imaginária do índice de refração como fornecendo os picos de absorvância. Para a clorofila B, temos um pico em aproximadamente o comprimento de onda igual a  $\lambda_1 = 630 \text{ nm}$  e outro pico em aproximadamente o comprimento de onda igual a  $\lambda_2 = 480 \text{ nm}$ . Como sabemos que  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , concluímos que os picos estão, em termos das frequências, em torno de  $\omega_1 = 3,0 \times 10^{15} \text{ Hz}$  e  $\omega_2 = 3,9 \times 10^{15} \text{ Hz}$ . Supondo tais picos como tendo um formato aproximadamente gaussiano (aproximação muito mais adequada para o pico mais à direita para a clorofila B), podemos escrever a parte imaginária do índice de refração como sendo dada pela função (as frequências estão em ordens de  $10^{15}$ )

$$n_i(\omega) = A_{b1}e^{\frac{(\omega-3,0)^2}{2\alpha^2}} + A_{b2}e^{\frac{(\omega-3,9)^2}{2\beta^2}},$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  fornecem a largura dos respectivos picos e  $A_{b1}$  e  $A_{b2}$  fornecem suas alturas. Os valores  $A_{b1} = 1$ ,  $A_{b2} = 0,5$ ,  $\alpha = 0,1$  e  $\beta = 0,05$  geram o resultado mostrado na Figura 10.31.

**Figura 10.31:** Resultado do modelo teórico para a parte imaginária do índice de refração da clorofila B

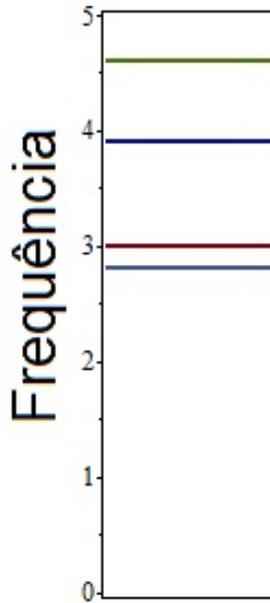


Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

O resultado da figura 10.31 deve ser comparado com a figura 10.13 para uma compreensão do que significa modelar matematicamente determinada situação física.

- (b) No item anterior encontramos as frequências associadas aos picos de absorvância da clorofila B. Encontramos as frequências  $\omega_1 = 3,0$  e  $\omega_2 = 3,9$  aproximadamente (multiplicadas pelo fator  $10^{15}$ ). Para a clorofila A temos as frequências  $\omega_3 = 4,6$  e  $\omega_4 = 2,8$  (mesmo fator multiplicativo). Assim, o diagrama de energia fica como mostrado na figura 10.32.

**Figura 10.32:** Diagrama de energia  
energia  
(ou diagrama de frequência –  
ver o capítulo 11)



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

## Texto complementar 6

### ASPECTOS TERMODINÂMICOS DA FOTOSSÍNTESE

**Luiz Roncaratti**

*Núcleo de Física Atômica e Molecular  
Instituto de Física  
Universidade de Brasília*

## Introdução

A fotossíntese é uma das realizações mais fascinantes da evolução biológica na Terra. A vida implica uma diminuição da entropia – o que significa integrar materiais desordenados em unidades altamente organizadas que chamamos de organismos. Portanto, de acordo com a termodinâmica, a vida necessita de uma fonte externa de energia livre e a única fonte amplamente disponível na superfície da Terra é a energia radiante emitida pelo Sol. A realização incrível da evolução foi equipar os organismos fotossintetizantes com um aparato capaz de converter a energia da luz em energia química. Sem essa provisão, a vida na Terra seria restrita aos raros locais onde a energia livre na forma química se encontra prontamente disponível, por exemplo, ao redor das fontes vulcânicas no fundo dos oceanos.

A evolução da fotossíntese é um notável caso onde a vida usa um intrincado sistema de recorrências para se autodesenvolver. A fotossíntese depende de pigmentos orgânicos complexos – tais como as clorofilas e os carotenoides – assim como de diversos catalizadores orgânicos (enzimas), que são, eles próprios, produtos da vida. Até o presente momento não conhecemos nenhum outro mecanismo onde algumas enzimas são formadas além daqueles associados com a biossíntese em organismos vivos. Já os pigmentos podem ter sido formados inicialmente por meio de mecanismos pré-biológicos. De fato, derivados da porfirina (estrutura molecular base da clorofila) foram identificados entre os produtos de descargas elétricas por meios contendo amônia e compostos de carbono simples (é muito provável que uma atmosfera com estes compostos tenha existido no período pré-biológico). Nesse contexto, é notável que os primeiros organismos tenham não apenas incorporados esses compostos

formados acidentalmente, mas tenham, ao fim e ao cabo, “descoberto” que eles poderiam ser utilizados para sintetizar a matéria orgânica através da luz. Assim, podemos imaginar que, em alguns dos muitos planetas do universo, a evolução biológica parou no estágio da quimiossíntese, ou seja, com organismos que dependem da existência de ambientes que em geral são quimicamente instáveis. Além disso, considerando que o oxigênio hoje presente na atmosfera terrestre foi produzido pela fotossíntese, então, a vida pré-fotossíntese deve ter dependido de algum sistema químico instável sem oxigênio livre.

A incrível realização da evolução biológica envolvida no desenvolvimento da fotossíntese fica evidente quando consideramos que o quantum de energia de um fóton visível – com comprimento de onda entre 390 e 700 nanômetros – é muito menor do que a quantidade de energia utilizada pela fotossíntese no processo de redução de uma molécula de dióxido de carbono e na correspondente liberação de uma molécula de oxigênio. Ou seja, a contribuição de diversos fótons (provavelmente 8 fótons por molécula de oxigênio liberada) deve ser combinada em paralelo ou em processos sucessivos para que o processo elementar da fotossíntese



ocorra. Na expressão acima, o grupo  $(\text{CH}_2\text{O})$  representa a unidade básica de uma molécula de carboidrato simples  $[\text{C}(\text{H}_2\text{O})]_n$ , sendo que os carboidratos contêm aproximadamente 112 kcal de energia química por átomo-grama (12 g) de carbono. Esse processo é realizado em três etapas principais. Os detalhes dessas três etapas fogem do escopo principal deste texto, porém alguns dos seus aspectos básicos são dignos de nota. Na primeira, acontece a remoção dos átomos de hidrogênio da molécula de água e a liberação de uma molécula de oxigênio. Na segunda, os átomos de hidrogênio são transferidos de um composto intermediário da primeira etapa para outro composto intermediário da terceira etapa, na qual, finalmente, acontece a conversão do dióxido de carbono em carboidrato  $[\text{C}(\text{H}_2\text{O})]_n$ .

Em resumo, podemos dizer que os organismos fotossintetizantes evoluíram para se tornar sistemas capazes de armazenar a energia eletromagnética proveniente do sol na forma de ligações químicas nos carboidratos. Nesse contexto, a sutil relação entre fenômenos físicos, químicos e biológicos é de fundamental importância.

## Energia e entropia

Energia é um conceito básico da física que significa capacidade de produzir trabalho. A lei de conservação da energia estabelece que a quantidade de energia no universo é constante, ou seja, ela não pode ser criada ou destruída, ela apenas muda de forma. Diferentes formas de energia, tais como eletromagnética, química ou nuclear, são completamente interconvertíveis e todas podem ser convertidas em energia mecânica e utilizadas para realizar trabalho, i.e., acelerar corpos materiais.

A energia térmica é um caso especial. O que chamamos de energia térmica é a energia mecânica associada com o movimento caótico dos átomos e das moléculas. Chamamos o aumento dessa energia de aumento de temperatura. O caráter caótico da agitação térmica faz com que a conversibilidade entre energia térmica e outras formas de energia seja limitada. A lei da conservação da energia não seria violada se, por exemplo, toda energia térmica contida em um gás fosse convertida em energia cinética nas pás de um cata-vento: o gás iria esfriar e o cata-vento iria girar. Porém, para isso acontecer, seria necessário que o movimento caótico das moléculas do gás passasse a ser organizado numa dada direção específica. Nós sabemos, a partir da experiência, que isso não acontece e não esperamos que tal conversão de desordem em ordem aconteça espontaneamente. Essa convicção é expressa em um princípio fundamental que, em essência, diz que ordem não surge espontaneamente da desordem: para criar ordem da desordem, energia deve ser gasta. Essa é a segunda lei da termodinâmica. Em outras palavras, ela diz que, em um sistema fechado (um sistema que não troca energia com o meio ao seu redor), calor não pode ser convertido em trabalho sem que aconteça um aumento na desordem do sistema que balanceie a ordem associada com a conversão de calor em trabalho!

A medida quantitativa da desordem é chamada de entropia. A sua definição precisa tem a ver com o fato que todo estado ordenado de um sistema de muitos elementos é de certa forma único, enquanto que estados desordenados podem ser realizados de muitas maneiras diferentes. Considere por exemplo uma sala de aula onde todas as garotas estão sentadas do lado direito e todos os garotos do lado esquerdo. Podemos dizer que neste estado a sala é mais ordenada do que qualquer um dos muitos estados possíveis onde todos estivessem misturados aleatoriamente. A entropia  $S$  é definida como sendo proporcional ao logaritmo do número  $W$  de maneiras diferentes que um determinado estado pode ser alcançado, ou seja,

$$S = k \ln W, \quad 10.6$$

sendo  $k$  a constante de proporcionalidade conhecida como constante de Boltzmann. O estado termodinâmico de um sistema de muitas partículas é definido pela sua energia  $E$  e pela sua entropia  $S$ . Quanto maior for a quantidade de entropia, mais desordenado será o sistema, e menor será a quantidade de energia térmica disponível para conversão em formas usáveis de energia – mecânica, química ou elétrica. A parte usável – que pode realizar trabalho – da energia total  $E$  é chamada de energia livre  $F$ . A energia térmica (calor) é o único tipo de energia que é apenas parcialmente livre: uma mudança na energia livre ( $\Delta F$ ) de um determinado processo é relacionada com uma mudança na energia total ( $\Delta H$ , ou entalpia) e uma mudança na entropia ( $\Delta S$ ) por meio da equação

$$\Delta F = \Delta H - T\Delta S, \quad 10.7$$

onde  $T$  é a temperatura absoluta.

## Reações químicas

Em sistemas fechados, processos espontâneos não podem fazer com que a entropia diminua, pois isso não está de acordo com segunda lei da termodinâmica. Quando lidamos com sistemas que não são fechados, ou seja, sistemas que trocam energia com o meio ao seu redor, uma formulação mais complexa da segunda lei se faz necessária. Um caso importante é o de um sistema reativo que troca calor com um reservatório mantido a temperatura constante. Imagine, por exemplo, que, dentro da esfera  $A$ , acontece uma reação química. Além disso, a esfera está submersa em um reservatório de água  $R$ , grande o suficiente para que a reação que acontece dentro da esfera não altere a sua temperatura. Ou seja, o processo é isotérmico, mas considere que, devido à reação que acontece dentro da esfera, certa quantidade de energia  $\Delta H$  pode ser transmitida da esfera para o reservatório ou vice-versa. Se a esfera perde energia para o reservatório,  $\Delta H$  é negativo; se a esfera ganha energia do reservatório, temos  $\Delta H$  positivo. Sendo a entropia uma grandeza aditiva (por isso faz-se necessário o logaritmo na Eq. 10.6), a mudança na entropia total do sistema  $\Delta S$  pode ser dividida em dois termos: a mudança na entropia do reservatório  $\Delta S_R$  e a mudança na entropia da esfera  $\Delta S_A$ . Juntos, a esfera e o reservatório formam um sistema fechado e, portanto, de acordo com a segunda lei, a condição para que a reação ocorra é que

$$\Delta S = \Delta S_R + \Delta S_A > 0. \quad 10.8$$

Além disso, considerando o processo isotérmico, ou seja, a temperatura  $T$  do reservatório permanece constante ( $\Delta F = 0$ ), temos que

$$\Delta S_R = \frac{-\Delta H}{T},$$

e, portanto, a Eq. 10.7 e a Eq. 10.8 podem ser combinadas para obtermos

$$\Delta F = \Delta H - T\Delta S_A < 0, \quad 10.9$$

onde  $\Delta F$  é a energia livre associada à reação. Essa é a forma da segunda lei da termodinâmica que usualmente é aplicada nas reações químicas. Ela estabelece que, para uma reação acontecer espontaneamente, a mudança na sua energia livre deve ser negativa. Note que o valor absoluto de  $\Delta F$  é maior do que o de  $\Delta H$  se a reação envolve um aumento da desordem em  $A$  ( $\Delta S_A > 0$ ), e menor, se a reação envolve uma diminuição da desordem ( $\Delta S_A < 0$ ). Portanto, para uma reação isotérmica ( $T$  constante) acontecer espontaneamente, ela deve liberar muito calor ( $\Delta H \ll 0$ ) ou então, implicar o aumento suficiente da desordem ( $\Delta H \gg 0$ ) para que a soma  $\Delta F = \Delta H - T\Delta S$  seja negativa.

Isso explica por que algumas reações endotérmicas ( $\Delta H > 0$ ) acontecem espontaneamente. Por exemplo, alguns sais, ao se dissolverem na água consomem calor, fazendo com que o sistema (água salgada), se isolado, esfrie ( $\Delta F < 0$ ). Neste caso, o aumento da entropia causado pela transformação da estrutura cristalina (estrutura ordenada) do sal em íons livres (estrutura desordenada), ou seja,  $\Delta S > 0$ , excede o consumo de energia necessário para manter a temperatura constante ( $\Delta F = 0$ ).

## Fotossíntese

Considere que a esfera  $A$  da seção anterior é uma pequena microalga e a reação química em questão é a fotossíntese. A energia luminosa necessária para a síntese do processo descrito pela Eq. 10.5 é a energia livre  $\Delta F$  da reação e a energia armazenada é a variação da entalpia  $\Delta H = 112 \frac{\text{kcal}}{\text{mol}}$ . Nesse caso,  $\Delta S < 0$ , pois um sistema formado por grandes moléculas de açúcar e pequenas moléculas de oxigênio (lado direito da Eq. 10.5) é mais ordenado do que um sistema formado por pequenas moléculas de água e dióxido de carbono (lado esquerdo da Eq. 10.5). De acordo com a Eq. 10.9, isso significa que o valor absoluto da energia livre  $\Delta F$  deve ser maior do que o valor absoluto da energia armazenada  $\Delta H$ . Ou seja, parte da energia luminosa  $\Delta F$  utilizada pela microalga é trans-

formada em variação de entropia! A componente entrópica da energia  $T\Delta S$  pode ser estimada teoricamente a partir da Eq. 10.6, e experimentalmente a partir da diferença  $\Delta H - \Delta F$ . Uma estimativa razoável é que  $T\Delta S \approx 8 \frac{\text{kcal}}{\text{mol}}$ .

Para diminuir a entropia de um dado sistema, energia externa deve ser fornecida. Inversamente, energia pode ser extraída de um dado sistema se sua entropia aumentar. Quando a energia térmica passa de um corpo de maior temperatura para um de menor temperatura, equalizando assim a energia térmica média das moléculas e consequentemente destruindo a ordem inerente à separação entre moléculas rápidas e moléculas lentas, alguma energia livre pode ser obtida dessa passagem. Esse é o princípio de funcionamento das máquinas térmicas. O mesmo acontece na equalização de pressão ou concentração entre duas partes de um dado sistema.

Toda atividade de qualquer organismo envolve o consumo de energia livre. Em particular, a síntese de proteínas, gorduras etc. consome energia livre. Essas moléculas complexas podem ou não ter mais energia do que as suas componentes mais simples; porém, elas necessariamente têm menos entropia, pois seus átomos se encontram mais ordenados do que estariam nas suas componentes moleculares livres. Podemos dizer que sistemas moleculares ordenados e complexos têm uma grande quantidade de informação, que nesse contexto, equivale ao valor negativo da entropia.

Organismos vivos são como relógios mecânicos que, se não receberem corda, cedo ou tarde vão ficar sem energia (livre) e parar. A fotossíntese é o processo natural que dá corda ao relógio da vida. Nesse sentido, o tic-tac da vida é a respiração. Ela é um tipo de combustão lenta e regulada cujo resultado químico geral é o reverso da fotossíntese. Enquanto a fotossíntese é análoga ao acúmulo de energia potencial na mola do relógio, requerendo, para isso, uma certa quantidade de energia livre externa, a respiração, por sua vez, é análoga ao movimento dos ponteiros no qual essa energia acumulada é gasta.

A energia luminosa age na fotossíntese de maneira análoga à energia elétrica que age em uma bomba de água que bombeia água para um reservatório elevado. A energia química acumulada pela fotossíntese não se dissipa de maneira descontrolada devido à metaestabilidade do sistema formado pela matéria orgânica e oxigênio. Esse sistema, embora intrinsecamente instável, não reage espontaneamente – mesmo um pedaço de madeira precisa do fósforo para queimar! Nos organismos, essa reação acontece através de canais especiais que são controlados por enzimas. Essas proteínas catalizadoras permitem a liberação da energia acumulada em passos graduais, e não de uma só vez, o que seria

equivalente a uma combustão direta que, por mais que não fosse capaz de fazer o organismo arder em chamas, provavelmente iria danificá-lo localmente e desperdiçar a valiosa energia acumulada pela fotossíntese. Além disso, para as suas diferentes funções químicas e físicas, o organismo precisa de pequenas quantidades de energia. O mecanismo da respiração cumpre a tarefa de liberar a energia livre do sistema em doses adequadas.

Nos organismos, a unidade de energia mais importante é definida pela quantidade de energia armazenada nas ligações químicas presentes na molécula adenosina trifosfato (ATP). Essa molécula libera cerca de  $10 \frac{\text{kcal}}{\text{mol}}$  via hidrólise, resultando em uma molécula adenosina difosfato (ADP) e um íon de fosfato livre (Pi):



Ou seja, a energia liberada pela quebra da ligação fosfato é menos de 10 % da energia acumulada pelo processo elementar da fotossíntese (Eq. 10.5).

## Referência

A literatura disponível sobre a fotossíntese é vasta e crescente de tal modo que talvez seja impossível para alguém ler tudo em uma única vida. Porém, entre tantas referências possíveis, o livro *Photosynthesis*, publicado em 1969 pelos autores Eugene Rabinowitch e Govindjee (RABINOWITCH; GOVINDJEE, 1969), se destaca. Esse texto foi inspirado por essa obra e pelos seus incríveis autores.

# Capítulo 11

## Radiações

Dá-se o nome de radiação a certos entes pelos quais a energia se propaga. Mais frequentemente, costuma-se classificar a radiação em *radiação corpuscular*, formada por partículas, e *radiação eletromagnética* (OKUNO, 1986), formada por ondas eletromagnéticas.

### **Definição 11.1.** RADIAÇÃO, IRRADIAÇÃO, CONTAMINAÇÃO

As definições de “radiação” e “irradiação” divulgadas pela Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) (CARDOSO, 2015), órgão que regula a radioproteção e o uso da energia nuclear no Brasil, são:

- Radiação: propagação de energia, na forma de ondas eletromagnéticas ou de partículas.
- Irradiação: exposição de um objeto ou de um corpo à radiação, sem que haja contato direto com a fonte de radiação.

A CNEN também define “contaminação” para deixar claro que é diferente de “irradiação”:

- Contaminação: radioativa ou não, caracteriza-se pela presença indesejável de um material em determinado local, onde não deveria estar.

### **Exercício 11.1** TIPOS DE RADIAÇÃO

Pesquise sobre cada um dos seguintes tipos de radiação, informando o símbolo que representa cada um deles e qual é a sua composição.

- (a) Radiação alfa;

- (b) Radiação beta;
- (c) Radiação gama;
- (d) Raios X;
- (e) Radiação de nêutrons.

#### USO DA RADIAÇÃO NA AGROPECUÁRIA E CONTAMINAÇÃO RADIOATIVA

Existe um medo não pouco comum de que a exposição dos alimentos à radiação torne-os radioativos. Seria um caso de *contaminação*. No entanto, a radiação não se instala nos tecidos por onde passa. Se o emissor de radiação estiver bem separado do alimento irradiado, não haverá contaminação. Quando ocorre, a *contaminação radioativa* ocorre por *convecção*, pela qual o próprio átomo emissor de radiação se mistura ao material contaminado. Nos casos de vazamento, como o famoso caso de *Chernobyl*, na Ucrânia, e o mais recente em *Fukushima*, no Japão, a contaminação ocorre porque o material radioativo, não somente a radiação, é espalhado, por difusão no ar e correntes eólicas.

## 11.1 Radiação corpuscular

Qualquer corpo em movimento carrega energia relacionada ao movimento de sua própria massa. A radiação corpuscular é assim chamada porque é formada de minúsculos corpos, ou seja, “corpúsculos”, mais conhecidos como “partículas”.

Duas importantes grandezas relacionadas a partículas são

- Energia cinética ( $K$ ), dada por  $K = \frac{1}{2}mv^2$ ,
- Momento linear ( $p$ ), dado por  $p = mv$ ,

onde  $m$  é a massa da partícula e  $v$  é a sua velocidade (em módulo). Para ser mais exato, a fórmula para o momento linear dada acima vale apenas para o seu módulo; a equação vetorial é escrita assim:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

### Exercício 11.2 ELÉTRON E BOLA DE FUTEBOL

Calcule a energia cinética e o momento linear de um elétron com uma velocidade de  $5,0 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (um valor típico). A massa do elétron é  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . Compare os resultados com a energia cinética e o momento linear de uma bola de futebol de  $0,4 \text{ kg}$  a uma velocidade de  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

## 11.2 Radiação eletromagnética

Energia também pode ser propagada sem propagação de matéria. Esse é o caso das ondas em geral, como já vimos em capítulo anterior. O termo *radiação eletromagnética* é utilizado para se referir à propagação de energia por ondas eletromagnéticas, que são ondas de campos elétricos e magnéticos que se propagam à velocidade da luz.

De fato, a luz é uma radiação eletromagnética, e alguns usam a palavra “luz” para se referir a qualquer tipo de radiação eletromagnética, visível ou não, enquanto, para outros, “luz” é sempre radiação eletromagnética visível, de modo que “luz visível” seria redundante. Por não haver total concordância entre as duas interpretações, usaremos aqui o termo “luz visível” para nos referir à “radiação eletromagnética visível”, pois a redundância é preferível à ambiguidade.

Para ondas em geral, vale a relação

$$v = \lambda f,$$

onde  $v$  é a velocidade de propagação da onda,  $\lambda$  é o seu comprimento de onda e  $f$  é a sua frequência. Para ondas eletromagnéticas, que se movem à velocidade da luz, essa relação se torna

$$c = \lambda f, \quad 11.1$$

onde  $c$  é a velocidade da luz,  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

### Exercício 11.3 COMPRIMENTO DE ONDA DA LUZ VISÍVEL

Os comprimentos de onda da luz visível estão entre 370 nm (luz violeta) e 750 nm (luz vermelha). Calcule a faixa de frequência da radiação eletromagnética equivalente à luz visível.

## 11.3 Dualidade onda-partícula

O primeiro tipo de radiação eletromagnética estudada foi a luz visível. A natureza da luz sempre foi polêmica. Cientistas como Isaac Newton defendiam que era formada por partículas, enquanto outros, como Huygens e Young, defenderam que a luz era uma onda.

Os físicos Max Planck e Albert Einstein, entre 1901 e 1905, deram origem a uma teoria que estabelece que ondas podem se comportar como partículas. O caso mais ilustrativo é o *efeito fotoelétrico*, pelo qual um feixe de luz se choca com chapas metálicas, removendo elétrons de sua superfície.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Efeito aproveitado em células fotovoltaicas (células solares) para gerar energia elétrica, como no caso de algumas calculadoras eletrônicas, até algumas das mais simples e baratas.

Planck mostrou que a luz se propaga em pacotes de energia chamados *quanta*, no plural, ou *quantum*, no singular, que significa “quantidade” em Latim. Einstein mostrou que a luz apresentava propriedades de feixe de partículas na explicação do efeito fotoelétrico (principal motivo pelo qual Einstein ganhou o Prêmio Nobel). Por isso, posteriormente foi dado o nome de *fóton* ao *quantum de luz*, devido ao fato de que nomes de partículas tradicionalmente terminam em -on (elétron, próton, nêutron, pósitron, méson, glúon, píon etc.).

Mais tarde, o físico Louis de Broglie fez-se a seguinte pergunta: “Se ondas eletromagnéticas podem se comportar como partículas, será que partículas podem se comportar como ondas?” De Broglie assumiu que sim, e mais tarde foi mostrado experimentalmente que elétrons podem apresentar comportamento relativo à difração e à interferência, fenômenos típicos de ondas.

Entretanto, partículas de radiações corpusculares, como elétrons, prótons, pósitrons etc., não se comportam como ondas eletromagnéticas, mas sim como um novo tipo de onda: onda de matéria. Uma onda de matéria é uma onda de probabilidade. O tipo mais familiar para quem já estudou Química é o orbital, que é uma onda de matéria do tipo *estacionária*.

Todos esses conceitos fazem parte de um ramo da Física chamado Física Quântica (nome derivado de quantum). Uma aplicação disso é a microscopia eletrônica. A resolução máxima de um microscópio convencional é limitada pela ordem de grandeza do comprimento de onda da luz utilizada. No caso do microscópio eletrônico, troca-se a luz por elétrons, que se comportam como ondas com comprimento de onda bem menor.

Como mostrado, tanto radiações eletromagnéticas quanto corpusculares podem se comportar como partículas ou ondas. Assim, é necessário saber como grandezas de partículas se relacionam a grandezas de ondas nessas radiações. A primeira relação é

$$E = hf, \quad 11.2$$

que vale para fótons (quanta de radiação eletromagnética), onde  $E$  é a energia mecânica (cinética mais potencial, grandeza típica de partículas),  $h$  é a chamada constante de Planck, dada por

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s},$$

e  $f$  é a frequência da onda. A segunda relação é

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad 11.3$$

onde  $p$  é o momento linear e  $\lambda$  é o *comprimento de onda* para a onda de matéria ou eletromagnética em questão. No caso de uma onda de matéria,  $\lambda$  é chamada de *comprimento de onda de de Broglie*.

**Exercício 11.4** ENERGIA E COMPRIMENTO DE ONDA

Usando a equação 11.1 e a equação 11.2, escreva a energia em função do comprimento de onda.

**Exercício 11.5** COMPRIMENTO DE ONDA DE DE BROGLIE

Considere que um nêutron seja acelerado à velocidade de  $1,4 \times 10^7$  m/s. Qual é o comprimento de onda de de Broglie associado a ele quando está nessa velocidade? (A massa do nêutron é  $1,67 \times 10^{-27}$  kg.)

**Exercício 11.6** BOLA DE FUTEBOL COMO ONDA?

Segundo algumas interpretações da Física Quântica, até uma bola de futebol poderia se comportar como uma onda, se pudesse passar por uma fenda (ou um buraco) de diâmetro com mesma ordem de grandeza do comprimento de onda associado a ela.

- (a) Calcule o comprimento de onda associado a uma bola de 1 kg e velocidade de 1 m/s.
- (b) Seria possível uma bola de futebol passar por um buraco dessa largura?

A equação 11.2 e a equação 11.3 podem ser escritas de forma que fiquem mais parecidas entre si:

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega, \\ p &= \hbar k, \end{aligned} \tag{11.4}$$

onde  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $\omega$  é a “frequência angular”, definida por  $\omega = 2\pi f$ , e  $k$  é o “número de onda”, definido por  $k = 2\pi/\lambda$  (na forma vetorial  $\vec{k}$  ele é chamado “vetor de onda”).

Vamos interpretar as equações 11.4! A grandeza  $\omega$  é uma medida do quanto a onda vibra, em radianos (cada ciclo equivale a  $2\pi$  radianos), por unidade de tempo. Analogamente, a grandeza  $k$  é uma medida do quanto a onda vibra, também em radianos, mas por unidade de distância percorrida. De algum modo, então, a energia está para o tempo assim como o momento linear está para o espaço.

## 11.4 Aplicação de radiação na agricultura

Nas Ciências Agrárias, há diversos tipos de trabalho que envolvem uso de radiação. Além dos exemplos óbvios do uso da espectroscopia para identificar composição molecular, a radiação também é usada para induzir mutações em processos de melhoramento genético, na conservação de alimentos, na esterilização de sementes etc.

Em alguns casos, radiações são feitas incidir sobre plantas que passam a apresentar maior variedade fenotípica (OKUNO, 1986), como uma maior variação na altura e no tamanho dos frutos, maior resistência etc. Os cientistas agrários, então, selecionam os espécimes que mais lhes interessam e os reproduzem em maior quantidade.

A radiação é usada tanto para conservar quanto para desinfetar alimentos (POLIZEL, 2006). A melhora na conservação se dá porque a radiação elimina micro-organismos como as bactérias, que, caso contrário, proliferar-se-iam pelo alimento. Também é usada quando há suspeita de possível contaminação de alimentos, especialmente de carnes. Radiações são usadas nos casos de suspeita de contaminação por *Salmonella* ou febre aftosa em bovinos, problemas recorrentes, e também foram usadas nas epidemias de alcance mundial de gripe suína e gripe aviária.

Os produtores agrícolas normalmente usam produtos químicos para o controle de pragas. A despeito da simplicidade no uso, esses produtos, como o metilbromido, têm muitas desvantagens, como a redução da camada de ozônio.

O uso de ondas eletromagnéticas pode se apresentar como um método alternativo, tanto no processo de pós-colheita, como até mesmo uma metodologia a ser aplicada durante o plantio, seja no processo de prevenção de pragas, seja em outros problemas que afligem a agricultura.

As ondas eletromagnéticas podem ser usadas não apenas para aquecer insetos e vetores de pragas em geral, mas também pode interferir com as funcionalidades corporais de tais pragas com efeitos não térmicos.

Já vimos, em capítulo anterior, que uma equação de onda do tipo

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{n(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

pode implicar absorção de energia eletromagnética se o índice de refração  $n(\omega)$  tiver uma parte imaginária em determinada faixa de frequências  $\omega$ . Note que a velocidade da luz pode ser escrita como  $c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ , de modo que um índice de refração implica alteração da constante dielétrica (mais fortemente) e da permeabilidade magnética do vácuo pela existência de um meio. Uma parte imaginária do índice de refração implica, portanto, a existência de uma parte imaginária na constante dielétrica do material  $\epsilon$ .

Isso significa que a parte imaginária do índice de refração pode ser usada para aquecer remotamente um determinado material usando ondas de rádio. O mais interessante, entretanto, não é apenas aquecer determinado material remotamente, mas aquecer *apenas* esse material, sem aquecer outros materiais que lhe sejam vizinhos. Assim, por exemplo, pode-se usar ondas eletromagnéticas para intervir com o funcionamento de pragas, aquecendo seus corpos, sem que, com isso, as plantas que essas pragas infestam sejam afetadas. Levando-se em consideração que o índice de refração de cada material é dependente da frequência, pode existir uma frequência na qual a energia eletromagnética é absorvida pela praga, mas refletida pela planta. Isso implicará que o processo não irá afetar a qualidade do produto agrícola, em particular quando esse produto é sensível ao aumento de temperatura.

O aumento na temperatura de determinado material por absorção de ondas eletromagnéticas pode ser expresso como

$$\rho C \frac{\Delta T}{\Delta t} = 349,53 \times 10^{-12} \omega E^2 \epsilon_i$$

em que  $C$  é o calor específico do material (em  $J/kg^\circ C$ ),  $\rho$  é a densidade do material (em  $kg/m^3$ ),  $E$  é a intensidade do campo elétrico (em  $V/m$ ) e  $\omega$  é a frequência (em  $Hz$ ). O termo  $\epsilon_i$  é a parte imaginária da constante dielétrica do material (em  $farad/m$ ),  $\Delta t$  é o intervalo de tempo (em  $s$ ) que o material ficou exposto à radiação e  $\Delta T$  é o aumento da temperatura no material (em  $^\circ C$ ).

A parte imaginária da constante dielétrica da água, por exemplo, tem um pico em torno de uma frequência de 24 GHz. Assim, em princípio, essa frequência poderia ser usada para aumentar a temperatura dos corpos dos insetos, mas isso iria aquecer também todos os materiais nas vizinhanças que têm água em sua composição. Na verdade, a melhor estratégia é usar uma faixa de frequência que maximize a diferença no aumento de temperatura da praga, por um lado, e do produto agrícola, por outro.

Assim, procuramos uma frequência  $\omega$  para a qual

$$f(\omega) = \frac{\Delta T_{praga} - \Delta T_{planta}}{\Delta t}$$

seja um máximo (note que o tempo de exposição  $\Delta t$  é o mesmo na expressão). Ou seja, devemos maximizar a expressão

$$f(\omega) = \frac{\alpha\omega E_{praga}^2(\omega)\epsilon_{i,praga}(\omega)}{\rho_{praga}C_{praga}} - \frac{\alpha\omega E_{planta}^2(\omega)\epsilon_{i,planta}(\omega)}{\rho_{planta}C_{planta}}$$

em que  $\alpha = 349,53 \times 10^{-12}$ .

Se assumirmos que o calor específico e a densidade específica de ambos os materiais são os mesmos (aproximadamente), podemos simplificar a expressão anterior para

$$f(\omega) = \frac{\alpha\omega E^2}{\rho C} (\epsilon_{i,praga}(\omega) - \epsilon_{i,planta}(\omega)),$$

que pode ser considerada uma equação para a frequência  $\omega$ . Evidentemente, um vínculo importante na solução do problema é que a função  $f(\omega)$  deve ser maximizada desde que a diferença  $\Delta\epsilon_i(\omega) = (\epsilon_{i,praga}(\omega) - \epsilon_{i,planta}(\omega))$  seja suficientemente grande para que a planta ou fruto não sofra aumento significativo de temperatura, mas a praga sim.

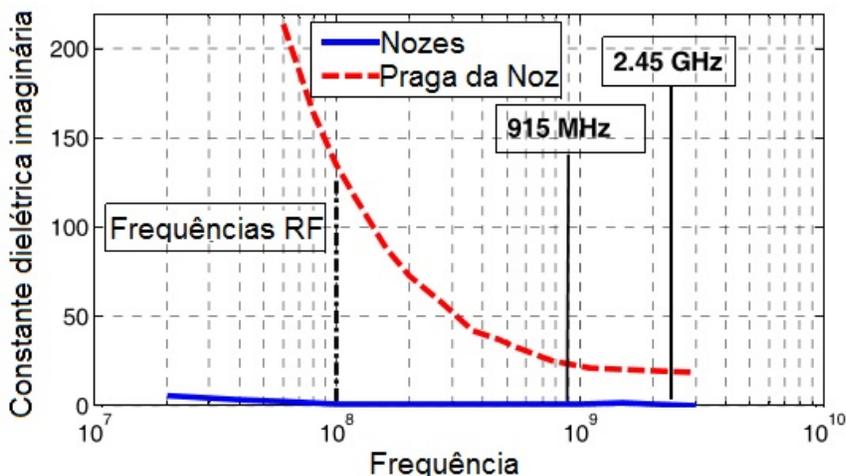
Vejamos um exemplo: a parte imaginária da constante dielétrica da praga da noz é muito maior do que a parte imaginária da constante dielétrica da noz, propriamente dita, no intervalo de frequências [100 MHz, 2, 45 GHz], como mostra a figura 11.1.

Com um tratamento de  $\Delta t = 3 \text{ min}$ , a praga da noz é eliminada pela alta absorção de energia eletromagnética, comparada com a absorção da noz. De fato, a casca da noz e o ar dentro dela agem como um isolante térmico e protegem a noz do aquecimento por convecção, enquanto que as ondas eletromagnéticas (pela diferença nas partes imaginárias das constantes dielétricas) selecionam a praga como a vítima da transferência de energia. Note que, no intervalo de 100 MHz a 2,5 MHz, a parte imaginária da constante dielétrica da noz é praticamente nula, implicando aumento mínimo de temperatura da noz.

### Exercício 11.7 PRAGA DA NOZ

[Usa cálculo diferencial e integral] Estime uma função para a parte imaginária da constante dielétrica da praga da noz, apresentada na figura 11.1 e encontre a melhor frequência a se usar para o aquecimento da praga da noz (Note que o gráfico apresentado na figura apresenta um dos eixos em escala logarítmica).

**Figura 11.1:** Gráfico que ilustra o comportamento da parte imaginária da constante dielétrica da noz e de uma de suas pragas em um intervalo de frequência



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho; adaptação de gráfico de Aliakbarian et al. (ALIAKBARIAN, 2010), por sua vez adaptado de Wang e Tang (WANG; TANG, 2001).

## 11.5 Proteção radiológica e dosimetria

Todo profissional que trabalha com radiação está sujeito a certos danos causados pela exposição prolongada a ela. Chama-se *proteção radiológica* às medidas utilizadas para proteger as pessoas desses danos. No Brasil, o órgão que regulamenta o uso da radiação é a **Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN)** que disponibiliza gratuitamente uma apostila de fácil leitura sobre a radiação e as suas aplicações (CARDOSO, 2015).

A distância que um dado tipo de radiação pode penetrar num objeto depende do tipo de material de que ele é feito. Quando se trata de radiação corpuscular, a penetração é geralmente expressa pela grandeza chamada *alcance*, que é a distância mais provável que a partícula percorrerá para dentro do corpo até perder toda a sua energia cinética por sucessivos choques com moléculas do material.

Quando se trata de radiação eletromagnética, cada fóton tem muito maior probabilidade de perder toda a sua energia em um único choque, portanto a abordagem de “choques sucessivos” perde o sentido. Entretanto, como geralmente há muitos fótons num feixe de radiação eletromagnética incidente, pode-se calcular a distância para dentro da superfície na qual aproximadamente 50% dos fótons já foram absorvidos pelo material; essa grandeza é denominada *camada semirredutora*.<sup>2</sup>

Quando um equipamento emite radiação nociva em seu funcionamento, pode-se apenas isolá-la dos seres humanos com algum material que a blindar eficientemente. A barreira, naturalmente, terá que ter espessura de ordem de magnitude maior que o alcance, no caso de radiação corpuscular, ou que a camada semirredutora, no caso de radiação eletromagnética.

### **Exercício 11.8** VALORES TÍPICOS DE ALCANCE E CAMADA SEMIRREDUTORA

Pesquise valores para as grandezas chamadas **alcance** ou **camada semirredutora**, em diferentes meios, para os seguintes tipos de radiação:

- (a) radiação  $\alpha$  (alfa);
- (b) radiação  $\beta$  (beta);
- (c) raios- $\gamma$  (gama);
- (d) nêutrons;
- (e) raios-X.

### **Exercício 11.9** QUE MATERIAL BLINDA CADA TIPO DE RADIAÇÃO?

Pesquise que tipos de materiais blindam cada um dos seguintes tipos de radiação e qual espessura deve ser usada para a barreira.

- a) radiação  $\alpha$  (alfa);
- b) radiação  $\beta$  (beta);
- c) nêutrons;
- d) raios- $\gamma$  (gama);
- e) raios-X.

<sup>2</sup>A grafia é “semi-redutora” em textos anteriores ao *Acordo Ortográfico de 1990*, implantado no Brasil entre 2008 e 2016.

Em alguns casos, porém, é inevitável que alguns funcionários trabalhem em ambientes expostos à radiação; neste caso, deve-se minimizar o dano à saúde do trabalhador limitando o tempo em que fica exposto à radiação. Quando se fala de proteção radiológica, fala-se muito de “dosagem”, que se refere a maneiras de estimar o quanto alguém ou algo foi exposto a certa radiação. Os limites legais de exposição à radiação no Brasil são estabelecidos pela CNEN no documento *NN 3.01 - Diretrizes Básicas de Proteção Radiológica*.

Uma grandeza muito utilizada é a **dose absorvida** ( $\mathfrak{D}$ ), definida como a energia absorvida dividida pela massa do absorvedor

$$\mathfrak{D} = \frac{E}{m}.$$

A unidade do SI para dose absorvida é o “gray” (Gy), definida por

$$1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

Existe também a unidade *rad* (*radiation absorbed dose*), relacionada ao gray como

$$1 \text{ Gy} = 100 \text{ rad}.$$

### Exercício 11.10 DOSE ABSORVIDA

Calcule a dose absorvida por um paciente de 70 kg no qual se injeta mercúrio-197 que emite radiação gama da qual  $5 \cdot 10^{-2}$  J de energia é absorvida pelo paciente durante o tratamento.

No caso de radiações ionizantes, ou seja, que ionizam o meio, pode-se calcular também a **exposição** (X), definida como a carga de um certo tipo (positiva ou negativa, considerando só um tipo quando se produzem pares) gerada por massa do meio:

$$\mathfrak{X} = \frac{q}{m}.$$

A unidade de exposição no SI é, naturalmente, C/kg, mas uma unidade muito comum é o *roentgen* (R), definido pela relação

$$1 \text{ R} = 2,58 \times 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

**Exercício 11.11** EXPOSIÇÃO

Uma exposição de 500 R por hora é considerada letal para o ser humano. Calcule a quantidade de carga, em coulombs (C), que seria absorvida a cada hora por uma pessoa de 50 kg sujeita a esse valor de exposição.

No entanto, uma mesma quantidade de energia absorvida causa efeitos diferentes dependendo do tipo de radiação. Por isso, existe também a grandeza **dose equivalente** (H), que é a dose absorvida multiplicada pelo "fator de qualidade" ( $Q$ ) da radiação, que expressa o dano específico que aquela radiação causa em seres vivos:

$$H = Q \times D. \quad 11.5$$

O valor numérico de  $Q$  é 1 para raios-X, raios gama e elétrons; igual a 10 para nêutrons e prótons; e igual a 20 para partículas alfa e de carga de módulo superior a 1e. Quando se expressa  $D$  em Gy na equação 11.5, o valor de H é prontamente obtido em unidades de *sievert* (Sv). Isso significa que a relação entre Sv e Gy depende do valor de  $Q$ . Se, por outro lado,  $D$  é expresso em *rad*, H é obtido em *rem* (*roentgen equivalent man*). Assim, a relação entre *rem* e *rad* é igual àquela entre Sv e Gy. Portanto, podemos dizer que a unidade implícita de  $Q$  é Sv/Gy ou *rem/rad*.

## REM

A unidade "rem" vem de "roentgen equivalent in man",<sup>a</sup> porque foi definida inicialmente por comparação aos efeitos biológicos da exposição a radiação ionizante, cuja unidade é o "roentgen". A unidade "rad" tem seu nome derivado de "radiação", e não deve ser confundida com "radiano", que é abreviada como "rad" também. Já a unidade "roentgen" vem do nome do descobridor dos raios-X, Wilhelm Conrad Röntgen, cuja letra  $\text{œ}$  é às vezes substituída por "oe".

<sup>a</sup>equivalente ao *roentgen* no homem.

**Exercício 11.12** DOSE EQUIVALENTE

Calcule a dose equivalente à dose absorvida calculada no Ex. 11.10, para os casos em que a radiação for dos seguintes tipos:

- |                               |               |
|-------------------------------|---------------|
| (a) radiação $\alpha$ (alfa); | (d) nêutrons; |
| (b) radiação $\beta$ (beta);  | (e) raios-X.  |
| (c) raios- $\gamma$ (gama);   |               |

## 11.6 Níveis de energia de átomos, absorção e emissão de fótons

A despeito de representar uma abordagem totalmente ultrapassada, o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio permite discutir, em nível razoável de simplicidade, muitos dos elementos fundamentais da moderna Mecânica Quântica, como o conceito de *níveis de energia* e os processos de *absorção* e *emissão* de fótons.

Historicamente, ao final do século XIX, os físicos já possuíam inúmeros resultados experimentais relativos a fenômenos de espectroscopia, em particular aqueles relativos a átomos e moléculas. A despeito dessa enorme massa de resultados experimentais, ainda não havia uma *teoria* que pudesse explicá-los adequadamente. No início do século XX, muitos modelos foram propostos para explicar tais resultados; dentre estes modelos estão o proposto por Max Planck, para o fenômeno do corpo negro, e aquele proposto por Einstein, para o efeito fotoelétrico.

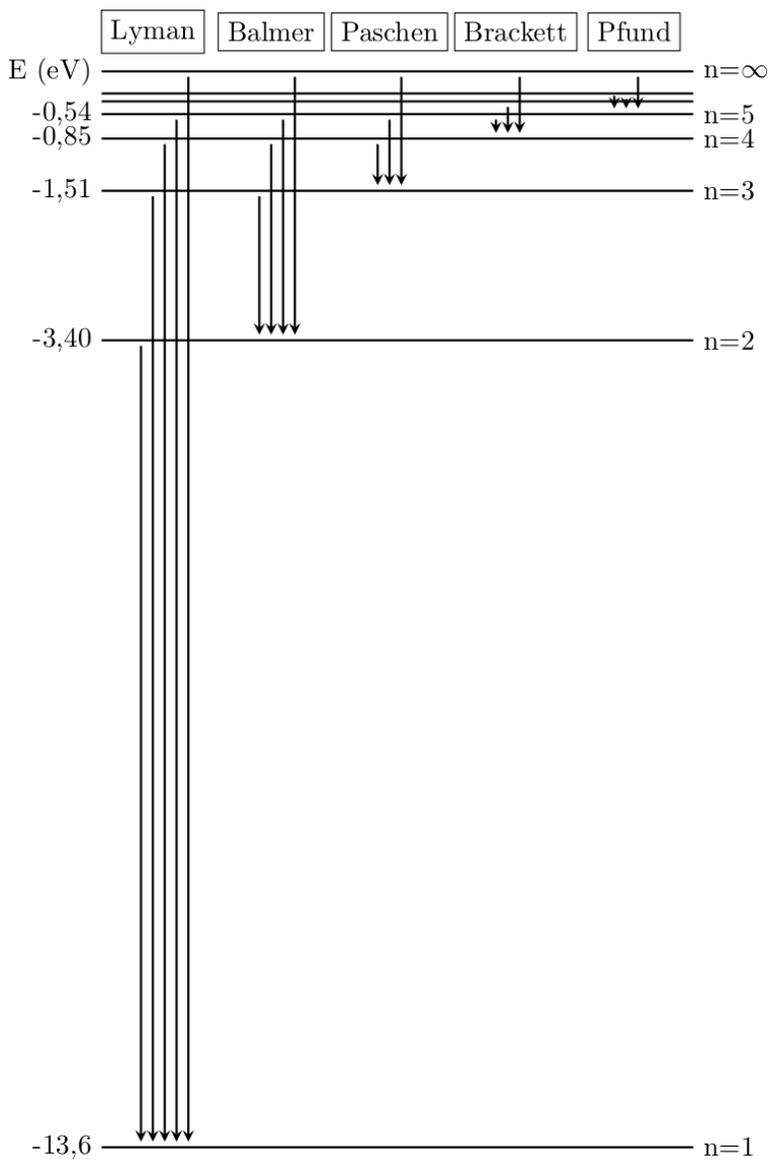
No contexto da espectroscopia de átomos, era conhecida uma fórmula empírica para as energias emitidas por átomos de hidrogênio, dada por

$$E = hcR_{ryd} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right),$$

em que  $h$  é a constante de Planck,  $c$  é a velocidade da luz e  $R_{ryd}$  é uma constante, chamada constante de Rydberg. Os físicos, ao fixar um valor para  $n_i$  e variar  $n_f$  no conjunto dos números naturais, obtinham as chamadas *séries espectrais*, que representavam, cada uma, um conjunto de maneiras de um átomo de hidrogênio emitir energia. Assim, foram obtidas as séries espectrais de Lyman ( $n_f = 1$ ), Balmer ( $n_f = 2$ ), e Paschen ( $n_f = 3$ ), entre outras (ver figura 11.2).

A obtenção de Bohr da constante Rydberg, assim como das linhas espectrais de Lyman, Balmer e Paschen, além da previsão teórica bem-sucedida de outras linhas ainda não observadas, foi uma das razões para o seu modelo teórico ser imediatamente aceito.

**Figura 11.2:** As séries de Lyman, Balmer e Paschen em um diagrama de energia de energia



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *TikZ*.

Para mostrar como o modelo de Bohr permitiu tal adequação teórica, vamos considerar as hipóteses que Bohr fez na construção deste modelo. Através das descrições quânticas da radiação eletromagnética propostas por Albert Einstein e Max Planck, o físico dinamarquês Niels Bohr desenvolveu seu modelo atômico a partir de três postulados:

1. Todas as partículas são como ondas (dualidade onda-partícula) e, assim, o comprimento de onda do elétron,  $\lambda$ , está relacionado à sua velocidade por

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

onde  $h$  é a constante de Planck e  $m$ , a massa do elétron (de fato, Bohr não tinha usado esta hipótese que só foi proposta mais tarde, mas ela está na base da próxima hipótese, que Bohr, de fato, fez);

2. A circunferência da órbita (circular) do elétron deve ser um múltiplo inteiro de seu comprimento de onda

$$2\pi r = n\lambda,$$

onde  $r$  é o raio da órbita do elétron e  $n$  é um número inteiro positivo;

3. O elétron mantém-se em órbita por forças eletrostáticas. Isto é, a força eletrostática é igual à força centrípeta

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Temos três equações e três incógnitas:  $v$ ,  $\lambda$  e  $r$ . Com a energia total dada por

$$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

que, pelo teorema do virial, simplifica-se para

$$E = -\frac{mv^2}{2}$$

obtém-se, para a energia,

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2},$$

ou, depois de substituídos os valores das constantes,

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} eV$$

Assim, o menor nível de energia do hidrogênio ( $n = 1$ ) é cerca de  $-13,6 \text{ eV}$ . O próximo nível de energia ( $n = 2$ ) é  $-3,4 \text{ eV}$ . O terceiro ( $n = 3$ ),  $-1,51 \text{ eV}$ , e assim por diante. Note que essas energias são menores que zero, o que significa que o elétron está em um *estado ligado* (preso ao átomo). Estados de *energia positiva* correspondem ao átomo *ionizado*, no qual o elétron não está mais ligado, mas em um estado *livre*.

Com esses resultados, as seguintes propriedades ficam imediatamente estabelecidas:

1. Os elétrons que circundam o núcleo atômico existem em órbitas que têm níveis de energia quantizados;
2. A energia total do elétron (cinética e potencial) não pode apresentar um valor qualquer, mas sim valores múltiplos de um quantum;
3. Quando ocorre o salto de um elétron entre órbitas, a diferença de energia é emitida (ou suprida) por um simples quantum de luz (o fóton), que tem energia exatamente igual à diferença de energia entre as órbitas em questão;
4. As órbitas permitidas dependem de valores quantizados (bem definidos) de momento angular orbital  $L$  de acordo com a equação

$$L = n\hbar,$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$  é chamado de número quântico principal e  $h$  é a constante de Planck.

Se assumirmos que a energia do fóton emitido por um átomo de hidrogênio é dada pela diferença entre a energia de dois níveis, a expressão para a energia do fóton emitido fica imediatamente derivada, pois

$$E = E_f - E_i = 13,6 \left( \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_f} \right),$$

em que já está dada a constante de Rydberg.

Quando o elétron é movido do nível de energia em que se encontra para um nível de energia maior, ele absorve energia (um foton com energia equivalente à energia em 11.6). Se, por outro lado, cai um nível, emite um fóton.

Usando a fórmula derivada para os diferentes níveis de energia de hidrogênio, determinam-se os comprimentos de onda da luz que um átomo de hidrogênio pode emitir. Uma vez que a energia de um fóton é dada por

$$E = \frac{hc}{\lambda},$$

o comprimento de onda do fóton emitido é dado por

$$\frac{1}{\lambda} = R_{ryd} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right),$$

que é conhecida, mais propriamente, como equação de Rydberg.

### Exercício 11.13 ÓRBITAS DE ÍONS

Considere o caso de um íon com a carga do núcleo sendo  $Ze$  e um elétron movendo-se com velocidade constante  $v$  ao longo de um círculo de raio  $r$  com centro no núcleo. Podemos usar as equações anteriores para obter os valores quantizados das órbitas e das velocidades. Encontre-as.

O cálculo dos níveis de energia dos elétrons dos outros átomos segue o feito para O átomo de hidrogênio como modelo,<sup>3</sup> acrescentando correções quando necessário: esse é um trabalho da Física Atômica e Molecular e da Química Quântica.

### Exercício 11.14 NÍVEIS DE ENERGIA DO ÁTOMO DE H

Calcule os valores dos cinco primeiros níveis de energia do elétron do átomo de hidrogênio e represente-os numa reta vertical ordenada.

A espectroscopia é a análise da radiação emitida ou absorvida por elétrons atômicos, e é muito útil para se descrever a estrutura físico-química de um material. Um espectro de emissão é um conjunto de linhas formadas pela emissão de fótons por um átomo. Um espectro de absorção é um conjunto de falhas no espectro contínuo devido à absorção de fótons por um átomo, como mostrado na figura 11.3.

### Exercício 11.15 COMO EXCITAR O ÁTOMO DE H?

Calcule o comprimento de onda que um fóton deve ter para excitar um elétron do átomo de hidrogênio

- (a) do primeiro para o segundo nível;
- (b) do primeiro para o terceiro nível;
- (c) do segundo para o terceiro nível.

<sup>3</sup>Mas usando a equação de *Schrödinger*, e não o modelo de Bohr, que, como dissemos, é uma abordagem ultrapassada.

**Figura 11.3:** Espectros de emissão e absorção para o hidrogênio

Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

**Exercício 11.16** COMO EXCITAR O ÁTOMO DE H?

Calcule os comprimentos de onda e frequências associados a três linhas da série de Lyman, três linhas da série de Balmer e três linhas das série de Paschen. Em seguida, represente todas essas num eixo de comprimento de onda ou de frequência.

**Exercício 11.17** DIAGRAMA DE ABSORBÂNCIA DA CLOROFILA

A partir de um diagrama de *absorbância* para a clorofila, crie um diagrama de absorção para ela.

## 11.7 Decaimento radioativo e meia-vida

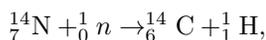
Um átomo de urânio tem 92 prótons: se o número de prótons muda, o átomo deixa de ser urânio. O número de nêutrons, no entanto, pode variar sem que o átomo deixe de ser urânio. Essas variações do mesmo tipo de átomo são chamadas de “isótopos”, nome que vem das palavras gregas para “mesmo lugar” porque são elementos que ocupam o mesmo lugar na tabela periódica, tendo assim o mesmo nome (urânio, potássio, carbono etc.).

Geralmente, isótopos são representados pelo nome do átomo (ou seu símbolo) e sua massa atômica separados por hífen: urânio-238 (U-238), urânio-235 (U-235), carbono-14 (C-14), carbono-12 (C-12) etc. Uma notação mais técnica utilizada pelos químicos consiste em colocar a massa atômica sobrescrita precedendo o símbolo do átomo:  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{12}\text{C}$  etc.

Alguns isótopos são instáveis e “decaem” emitindo partículas alfa, perdendo assim dois prótons e dois nêutrons. Assim, o seu número atômico (número de prótons) diminui em 2 e a sua massa atômica (número de prótons mais número de nêutrons) em 4. Esse fenômeno é chamado de **decaimento alfa**. Isótopos também podem decair emitindo um próton e um elétron (radiação beta), fenômeno chamado de **decaimento beta**. Isótopos que emitem radiação são chamados de **radioisótopos**. A definição CNEN é a seguinte (CNEN, 2015):

**Definição 11.2.** MEDIÇÃO, GRANDEZA E MEDIDA [radioisótopos]: São isótopos de elementos radioativos utilizados principalmente na medicina (diagnóstico e terapia), indústria e com finalidade de pesquisa. Isótopo instável de um elemento que decai ou se desintegra, emitindo radiação.

Radioisótopos podem ser gerados por processos naturais ou artificiais. Por exemplo, o carbono-14 é gerado em partes altas da atmosfera pelo bombardeamento de nêutrons vindos do espaço (*raios cósmicos*) sobre átomos de nitrogênio, segundo a reação



onde os números subscritos são números atômicos, os números sobrescritos são massas atômicas, e  $n$  representa o nêutron.

Se radioisótopos de fósforo  $^{33}\text{P}$  são gerados em duas amostras ao mesmo tempo, somente metade dos elementos radioativos de cada amostra restará após 25 minutos, pois a outra metade terá decaído. Isso significa que a **meia-vida** do fósforo-33 é igual a 25 minutos. O que ocorrerá após outros 25 minutos? A outra metade dos elementos radioativos decairá de modo que as amostras deixarão de ser radioativas? NÃO! Após esse segundo período de 25 minutos, metade dos elementos radioativos no início desse período é que decairão, ou seja, *metade da metade* dos elementos inicialmente radioativos. Depois de um terceiro período de 25 minutos, *metade da metade da metade* dos elementos que eram inicialmente radioativos decairão, e assim por diante. Isso é o que se chama de *decaimento exponencial* na matemática e é mais bem entendido na tabela 11.1.

Como a meia-vida de diversos elementos radioativos varia muito, diferentes elementos radioativos são utilizados para *datação radiométrica* em diferentes escalas de tempo (veja a tabela 11.2).

**Tabela 11.1:** Exemplo de decaimento radioativo exponencial

Tempo desde a geração do $^{33}\text{P}$ (min)	Quantidade de elementos radioativos
0	$N_0$
25	$N_0/2$
50	$N_0/4$
75	$N_0/8$
100	$N_0/16$

Fonte: elaboração dos autores.

**Tabela 11.2:** Alguns isótopos utilizados para datação radiométrica, com suas respectivas meias-vidas  
 Sm: samário; Nd: neodímio; Rb: rubídio; Sr: estrôncio; Th: tório; U: urânio; K: potássio; Ar: argônio; Re: rênio; Os: ósmio; Lu: lutécio; Hf: háfnio; C: carbono; N: nitrogênio.

Isótopo-pai	Isótopo-filho	Meia-vida (anos)
$^{147}\text{Sm}$	$^{143}\text{Nd}$	$106,0 \times 10^9$
$^{87}\text{Rb}$	$^{87}\text{Sr}$	$48,8 \times 10^9$
$^{232}\text{Th}$	$^{208}\text{Pb}$	$14,0 \times 10^9$
$^{238}\text{U}$	$^{206}\text{Pb}$	$4,5 \times 10^9$
$^{40}\text{K}$	$^{40}\text{Ar}$	$1,25 \times 10^9$
$^{235}\text{U}$	$^{207}\text{Pb}$	$0,70 \times 10^9$
$^{187}\text{Re}$	$^{187}\text{Os}$	$43,0 \times 10^9$
$^{176}\text{Lu}$	$^{176}\text{Hf}$	$43,0 \times 10^9$
$^{14}\text{C}$	$^{14}\text{N}$	0–50.000

Fonte: elaboração dos autores, com base em dados de Carneiro et al. (CARNEIRO, 2005).

## 11.8 Meteorologia, Climatologia e o aquecimento global

Só vemos o céu azul, o pôr do sol vermelho e os arco-íris após a chuva porque a Terra tem uma *atmosfera* que divide a luz branca vinda do Sol em múltiplas cores e espalha essa luz colorida de diversas formas pelo ar. Mais importante que isso é que só podemos respirar porque temos essa atmosfera. A atmosfera possibilita a vida de plantas e animais pela *respiração*, bloqueia radiações nocivas como os *raios ultravioleta*, distribui a água através de ventos e chuvas, desintegra pequenos meteoros que de outro modo poderiam nos machucar e mantém a superfície da Terra aquecida através do *efeito estufa*. Duas ciências têm a atmosfera como o principal objeto de estudo: a **Meteorologia** e a **Climatologia**.

Colocado de forma simples, *Meteorologia* é a ciência que trata do *tempo* e *Climatologia* é a ciência que trata do *clima*. Assim, para entender a diferença entre elas, é preciso entender a diferença entre tempo e clima. O chamado “tempo meteorológico” é o estado momentâneo da atmosfera, enquanto “clima” se refere às características da atmosfera numa certa região a longo prazo. Pergunta-se

“Como **está** o tempo *em* Brasília?”,

mas

“Como **é** o clima *de* Brasília”.

A principal aplicação da Meteorologia é a **previsão do tempo**. Saber se haverá chuva nos próximos dias pode ser apenas um capricho para quem quer ir ao clube, mas pode ser questão de “vida ou morte” para um pequeno agricultor do *semiárido* ou para habitantes do *Golfo do México*, região ameaçada por furacões recorrentes.

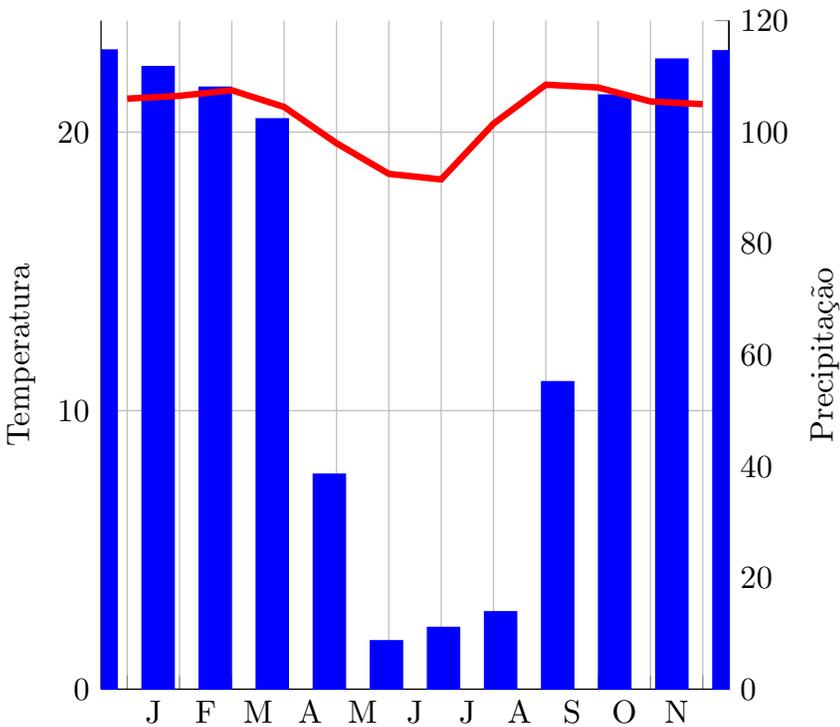
Infelizmente, prever o tempo é muito difícil, devido à complexidade dos fenômenos atmosféricos. Assim, a previsão do tempo é *imprecisa*, como todos os que acompanham a previsão do tempo podem eventualmente perceber. Em 1972, Edward Lorenz deu uma palestra com o título “Poderia a batida das asas de uma borboleta no Brasil provocar um tornado no Texas?” (LORENZ, 1972). Essa frase refere-se, de maneira figurada, ao fenômeno que ficou conhecido como “efeito borboleta”:

**Pequenas diferenças nas condições iniciais de um sistema podem causar grandes diferenças no seu estado final.**

Essa ideia fundou a *Teoria do Caos*, desenvolvida por esse mesmo Edward Lorenz (entre outros), matemático e meteorologista, no contexto de seu estudo da previsão do tempo. A Teoria do Caos é hoje considerada um ramo da Matemática. A propósito, *Artur Ávila*, primeiro brasileiro a ganhar a *Medalha Fields*, prêmio da Matemática chamado de “o Nobel da Matemática” (porque o *Prêmio Nobel* mesmo não tem a categoria “Matemática”), estuda o caos em *sistemas dinâmicos* (“Teoria de Sistemas Dinâmicos” é às vezes tomado como sinônimo de “Teoria do Caos”).

Embora difícil, a previsão do tempo tem se tornado cada vez mais precisa, como mostram dados sobre o sucesso das previsões feitas desde anos por volta de 1970. Mesmo assim, *Nate Silver* diz em seu livro “O sinal e o ruído: por que tantas previsões falham e outras não” (SILVER, 2013) que, para previsões com 10 ou mais dias de antecedência, as previsões de tempo comerciais são piores que a Climatologia para prever a temperatura. Por que isso é ruim? Por que usar climatologia para prever o tempo é simplesmente tomar dados médios dos últimos anos e supor que tudo será igual no ano presente. A Meteorologia só tem razão de existir porque se propõe a ser mais precisa, no curto prazo, que os dados climatológicos.

**Figura 11.4:** Climograma de Brasília



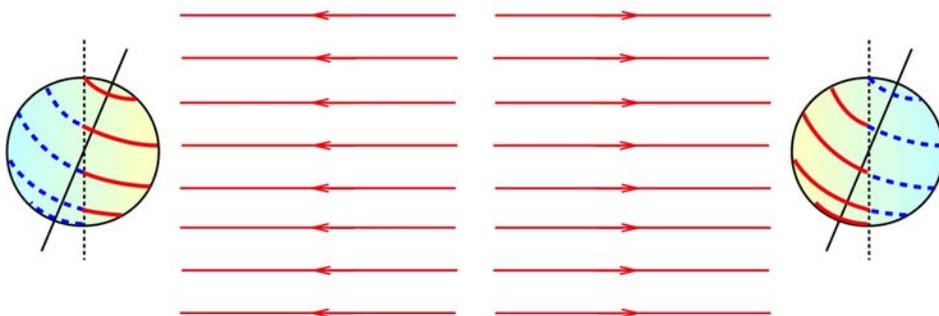
Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *PGF Plots*, com base em dados do Instituto Nacional de Meteorologia (INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA, 2018).

Um dos formatos mais utilizados para informar o clima de uma cidade é o **climograma** (veja figura 11.4, que mostra a *temperatura média* e a *precipitação média* —uma medida de volume de chuva por área da superfície— para cada um dos meses do ano). Espera-se que, não havendo *mudança climática*, o clima

do mês de janeiro, por exemplo, seja aproximadamente o mesmo todos os anos. Isso é assim porque o mês define uma certa posição relativa entre a Terra e o Sol. Como a Terra gasta um ano para dar uma volta completa ao redor do Sol, espera-se que estará na mesma posição em relação a ele todos os janeiros.

Um erro comum é pensar que o inverno é mais frio porque a Terra fica mais longe do Sol nessa época. Se assim fosse, o que explicaria que o **Verão do Hemisfério Sul** ocorre na mesma época que o **Inverno do Hemisfério Norte** (e vice-versa)? O que *realmente* explica a diferença entre as estações é a **inclinação do eixo de rotação da Terra**. Muitos imaginam que o eixo Norte-Sul (de rotação da Terra em torno de si mesma) seja perpendicular à reta Sol-Terra (que liga o centro do Sol ao centro da Terra). Na verdade, o eixo Norte-Sul da Terra faz um ângulo de 23° com o eixo perpendicular. Por isso, há uma época do ano em que o Hemisfério Norte recebe mais incidência solar que o Hemisfério Sul, e outra época em que o inverso se verifica, como ilustra a figura 11.5. Quanto mais perto de um dos polos, Norte ou Sul, maior a diferença de temperatura entre Inverno e Verão.

**Figura 11.5:** Ilustração da posição da Terra em relação aos raios solares durante o verão do Hemisfério Norte (esquerda) e durante o verão do Hemisfério Sul (direita)



Fonte: elaboração de Leonardo Luiz e Castro, usando *Libre Office Draw*.

Qualquer ponto sobre a *Linha do Equador* tem, durante todo o ano, exatamente 12 horas de incidência solar (“dia”) e 12 horas sem ela (noite). Ao nos afastar dessa linha em direção a um dos polos, perceberemos um período diurno mais longo se for verão (naquele hemisfério) ou mais curto se for inverno. Tanto que, perto de um dos pólos, temos os *círculos polares*, regiões que experimentam *6 meses de incidência solar contínua* (um “dia” de seis meses) e *6 meses de sombra contínua* (uma “noite” de seis meses).

O **horário de verão** foi criado por causa desse efeito: como os dias são mais longos durante o verão, com o nascer do sol mais cedo e o por do sol mais tarde, atrasa-se uma hora no relógio para que as pessoas acordem e durmam mais cedo, aproveitando melhor as horas de *iluminação natural*, economizando energia

elétrica. Por outro lado, numa cidade como Brasília, relativamente próxima à Linha do Equador, a adoção do horário de verão é mais polêmica, porque muitas pessoas, principalmente as que trabalham longe e usam transporte público, saem de casa ainda no escuro para trabalhar, algo considerado perigoso. Isso não é problema numa cidade como Paris, na qual o nascer do sol chega a ser antes das 5:00 e o pôr do sol por volta das 21:00, nos dias próximos ao **solstício de verão**, correspondente ao dia mais longo do ano.<sup>4</sup> Nas regiões *Norte* e *Nordeste* do Brasil, por outro lado, o horário de verão não é adotado, em nenhuma época do ano, porque a duração do dia e da noite pouco mudam. Brasília encontra-se numa “zona crítica” em que os prós e contras desse artifício ficam mais evidentes. Existem ainda aqueles que acreditam que a mudança de horário acarreta malefícios à saúde em qualquer região do mundo, devido à necessidade de se adaptar a uma nova rotina.

Resta-nos aqui comentar o **aquecimento global**, um dos assuntos mais discutidos na atualidade. O seu estudo é feito pela Climatologia, mas o tema em si envolve tentativa de previsão por meio de *simulações computacionais*, sendo por isso similar à Meteorologia em seus métodos. É fácil perceber que, se a Meteorologia já tem dificuldades para prever mudanças de tempo com nove dias de antecedência, muito mais terá a climatologia para prever *mudanças climáticas* em décadas.

O livro *O Sinal e o Ruído* conta sobre a discordância entre *Scott Armstrong*, professor da Universidade da Pensilvânia que se inclui entre os “céticos do aquecimento global”, e *Al Gore*, jornalista, ecologista e político, tendo sido candidato à presidência dos *Estados Unidos da América*. Em 2007, Armstrong propôs uma “aposta” a Al Gore: acompanhariam medidas de temperatura média ao longo dos próximos anos. Caso ela não aumentasse, Armstrong ganharia. Al Gore não aceitou a aposta, mas Armstrong acompanhou as medidas mesmo assim. Até 2012, a hipótese da “mudança zero” parecia estar ganhando a aposta, mas os gráficos sugeriam que havia muito mais “ruído” (variações aleatórias, flutuações) que “sinal” (comportamento coerente) nos dados. Armstrong, com seu colega Kesten Green, submeteu os dados a uma “auditoria”, que concluiu que o modelo usado para o aumento da temperatura não estava totalmente adequado por cumprir apenas 72 de 89 princípios de previsão. Esse modelo era do próprio *Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas*, organismo criado em 1988 pela ONU, muito conhecido pela sigla *IPCC*, do nome em inglês: *Intergovernmental Panel on Climate Change* (INTERGOVERNMENTAL PANEL ON CLIMATE CHANGE, 2018).

Enfim, Armstrong e Green concluíram que o problema do aquecimento global é tão complexo e incerto que previsões são inúteis. E embora a “mudança zero” parecesse mais próxima das medidas que as previsões do IPCC, Armstrong admitiu que “houve, de fato, um pequeno acontecimento, mas ninguém

<sup>4</sup>A palavra “dia”, naturalmente, está sendo usada como “período de incidência solar”, não como o “período de 24 horas” que junta dia e noite.

está dizendo que isso não aconteceu ao longo dos últimos 150 anos” (SILVER, 2013) Uma análise da média das temperaturas globais anuais entre 1990 e 2010 mostrou um aumento, mas apenas  $0,015^{\circ}\text{C}$  por *ano* (equivalente a  $1,4^{\circ}\text{C}$  por *século*) que corresponde a *metade* do *cenário mais provável* previsto pelo IPCC. Além do cenário mais provável, o IPCC havia divulgado retas equivalentes aos dois extremos da previsão: o “cenário mais otimista”, com menor aumento de temperatura, e o “mais pessimista”, com aumento maior. O aumento real medido foi até um pouco menor que o cenário mais otimista.

Isso remete a outra questão do debate. Embora alguns céticos acreditem que haja um presente aumento de temperatura, discordam que seja causado principalmente pelo homem. Segundo o IPCC, a ação humana que contribui decisivamente para o aquecimento é o lançamento de gás carbônico ( $\text{CO}_2$ ) na atmosfera. Através de estudos geológicos, consegue-se inferir a concentração da  $\text{CO}_2$  e a temperatura por um período de séculos e, de fato, nota-se alta correlação entre os dois dados. Alguns céticos alegam que a concentração de  $\text{CO}_2$  é muito baixa se comparada a outros gases da atmosfera, sendo assim desprezível para aumentar a temperatura, e que foi justamente o oposto: aumentos de temperatura naturais, cíclicos, que ocorreram no passado, é que teriam aumentado a concentração de  $\text{CO}_2$  devido a processos naturais.

No entanto, pode ser que mesmo um pequeno aumento na concentração de  $\text{CO}_2$  aumente um pouco a temperatura e, de acordo com a *Relação de Clausius-Clapeyron*, a atmosfera retém mais vapor d'água a temperaturas maiores. Assim, ocorreria um ciclo: pequeno aumento de gás carbônico aumenta a temperatura que aumenta a concentração de vapor d'água que aumenta a temperatura, que aumenta a concentração de vapor d'água outra vez, e assim por diante. De forma geral, Nate Silver, em seu livro, parece concordar que o efeito da ação humana seja real e aceita o IPCC como uma organização competente para se manifestar a respeito da mudança climática, por envolver muitos cientistas discutindo por muito tempo. Quanto aos erros de previsão, ele relativiza. O próprio IPCC admitiu ter sido “agressivo demais” em suas previsões iniciais. Além disso, Nate Silver afirma que o IPCC “mereceu uma nota baixa, mas não baixa demais”, pois quem entende de previsões sabe o quanto é difícil fazê-las e como a história está cheia de fracassos de previsões, que vão melhorando com o tempo. Ele propõe também que a *Estatística de Bayes* poderia ser uma ferramenta matemática mais apropriada, pois estima probabilidades que vão sendo corrigidas seguindo uma regra matemática, à medida que o tempo vai passando e novas medidas sendo feitas.

## 11.9 Soluções dos exercícios deste capítulo

### Solução 11.1

Seguem algumas informações, mas faça uma pesquisa mais aprofundada:

- (a) Radiação alfa ( $\alpha$ ): cada partícula é formada por dois prótons e dois nêutrons.
- (b) Radiação beta ( $\beta$ ): cada partícula é formada por um elétron ( $\beta^-$ ) ou um pósitron ( $\beta^+$ ).
- (c) Radiação gama ( $\gamma$ ): ondas eletromagnéticas.
- (d) Raios-X: ondas eletromagnéticas.
- (e) Radiação de nêutrons: formada por nêutrons ( $n$ ).

### Solução 11.2

Calcule a energia cinética pela fórmula  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Para a bola de futebol, será  $\frac{1}{2}0,4 \text{ kg} \cdot (10 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 20 \text{ J}$ .

Para o elétron, dará um valor de ordem bem menor ( $\approx 10^{-53}$ , calcule o valor exato).

O momento linear é calculado pela fórmula  $p = mv$ , resultando em  $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5,0 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4,5 \times 10^{-23} \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$  para o elétron e  $0,4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$ .

Portanto, o momento linear desse elétron num movimento típico é 23 ordens de grandeza menor que o momento linear da bola de futebol.

### Solução 11.3

A faixa de luz visível tem frequência entre 400 e 810 terahertz. Confira:

$$\begin{aligned}
 c &= \lambda f \\
 \rightarrow f &= \frac{c}{\lambda} \\
 f_1 &= 3,0 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} / 370 \times 10^{-9} \text{ m} \\
 &= 0,0081 \times 10^{17} \frac{1}{\text{s}} = 810 \times 10^{12} \text{ Hz} = 810 \text{ THz} \\
 f_2 &= 3,0 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} / 750 \times 10^{-9} \text{ m} \\
 &= 0,0040 \times 10^{17} \frac{1}{\text{s}} = 400 \times 10^{12} \text{ Hz} = 400 \text{ THz}
 \end{aligned}$$

**Solução 11.4**

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

**Solução 11.5**

$$2,84 \times 10^{-14} \text{ m}$$

**Solução 11.6**

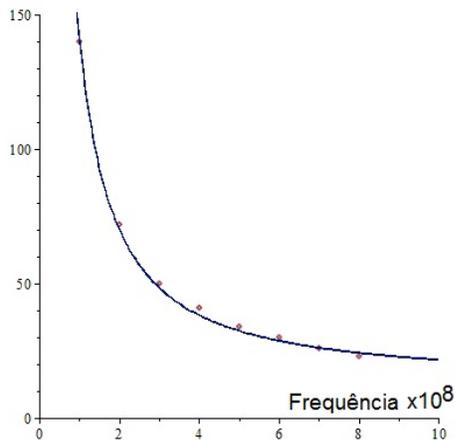
(a)  $6,63 \times 10^{-34} \text{ m}$

- (b) Não. Uma bola tem dimensões de muitas ordens de grandeza maiores que isso. Pela chamada *interpretação de Copenhague*, objetos macroscópicos nunca apresentam comportamentos ondulatórios perceptíveis porque têm dimensões muito maiores que seu comprimento de onda de *de Broglie*.

**Solução 11.7**

Com algum cuidado, podemos obter alguns pontos significativos do gráfico da figura 11.1, como os mostrados como pontos na figura 11.6.

**Figura 11.6:** Aproximação do comportamento funcional da parte imaginária da constante dielétrica da praga da noz



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho.

Assim, uma função que permite obter aproximadamente o mesmo gráfico é dada por

$$\epsilon_i(\omega) = \frac{120}{\omega^{1,2}} + \frac{10}{\omega} + 13,$$

como mostrado na figura 11.6 com a linha contínua ( $\omega$  em unidades de  $10^8$  Hz).

Com isso a função a ser otimizada fica

$$f(\omega) = \frac{\alpha\omega E^2}{\rho C} \frac{120}{\omega^{1,2}} + \frac{10}{\omega} + 13,$$

Derivando a função  $f(\omega)$  com relação a  $\omega$  e igualando a zero, ficamos com a equação

$$\frac{-24 + 13\omega^{6/5}}{\omega^{6/5}} = 0,$$

cuja solução é  $\omega = \frac{10}{6} \times 10^8$  Hz. Essa é a melhor frequência para se aplicar a onda eletromagnética às nozes.

### Solução 11.8

- (a) partículas  $\alpha$  com energia de 1,0 MeV: alcance de 0,55 cm no ar,  $0,33 \times 10^{-2}$  cm no tecido humano,  $0,32 \times 10^{-3}$  cm no alumínio (OKUNO, 1986)
- (b) radiação  $\beta$  com energia de 1,0 MeV: alcance de 420 cm no ar, 0,50 cm no tecido humano, 0,15 cm no alumínio (OKUNO, 1986)
- (c) radiação  $\gamma$  com energia de 1,0 MeV: camada semirredutora de 0,13 cm no ar,  $4,5 \times 10^{-4}$  cm no chumbo.
- (d) nêutrons: deixamos para sua investigação.
- (e) raios-X: deixamos para sua investigação.

### Solução 11.9

Para blindar um certo tipo de radiação, é necessário usar uma parede com espessura de ordem de magnitude maior que o alcance ou a camada semirredutora daquela radiação naquele material. Assim, os melhores materiais para blindar uma radiação são aqueles nos quais o alcance ou a camada semirredutora da radiação são os menores.

- (a) partículas  $\alpha$ : papel, alumínio etc. Folhas finas geralmente são suficientes.
- (b) radiação  $\beta$ : alumínio, plástico etc. em folhas finas geralmente são suficientes.
- (c) nêutrons: deixamos para sua investigação.

(d) radiação  $\gamma$ : chumbo, concreto etc. Geralmente, paredes espessas são necessárias.

(e) raios-X: deixamos para sua investigação.

**ATENÇÃO:** para ter segurança ao se trabalhar com certa radiação, é necessário consultar um especialista, como um técnico em radiologia, um físico com especialização em física médica, ou outro profissional certificado pelo CNEN.

### Solução 11.10

$$7,14 \times 10^{-4} \text{ Gy}$$

### Solução 11.11

$6,45 \text{ C}$ , que é, portanto, a carga que provavelmente causaria a morte de uma pessoa de  $50 \text{ kg}$  se fosse absorvida por seu corpo em uma hora.

### Solução 11.12

Basta multiplicar o valor calculado no Ex. 11.10 pelo fator de qualidade ( $\mathcal{Q}$ ) de cada tipo de radiação. Após essa multiplicação, a unidade passa de Gy de Sv.

(a) radiação  $\alpha$ :  $1,43 \times 10^{-2} \text{ Sv}$  ( $\mathcal{Q} = 20$ )

(b) radiação  $\beta$ :  $7,14 \times 10^{-4} \text{ Sv}$  ( $\mathcal{Q} = 1$ )

(c) raios- $\gamma$ :  $7,14 \times 10^{-4} \text{ Sv}$  ( $\mathcal{Q} = 1$ )

(d) nêutrons:  $7,14 \times 10^{-3} \text{ Sv}$  ( $\mathcal{Q} = 10$ )

(e) raios-X:  $7,14 \times 10^{-4} \text{ Sv}$  ( $\mathcal{Q} = 1$ )

### Solução 11.13

O raio fica

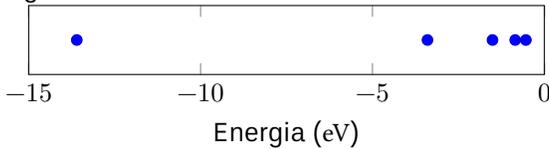
$$r_n = \frac{\epsilon_0 \eta^2 h^2}{\pi m Z e^2},$$

e a velocidade do elétron na  $n$ -ésima órbita

$$v_n = \frac{Z e^2}{2 \epsilon_0 h} \frac{1}{n}$$

**Solução 11.14**

As energias são calculadas pela fórmula  $E_n = \frac{-13,6 \text{ eV}}{n^2}$  para  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$  etc., resultando nos valores  $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ ,  $E_2 = -3,4 \text{ eV}$ ,  $E_3 = -1,51 \text{ eV}$  etc. O gráfico com esses valores ordenados fica assim:

**Solução 11.15**

Para o comprimento de onda, é o mesmo cálculo do exercício anterior para as transições  $n = 1 \rightarrow 2$ ,  $n = 1 \rightarrow 3$  e  $n = 1 \rightarrow 4$  (série de Lyman);  $n = 2 \rightarrow 3$ ,  $n = 2 \rightarrow 4$  e  $n = 2 \rightarrow 5$  (série de Balmer);  $n = 3 \rightarrow 4$ ,  $n = 3 \rightarrow 5$  e  $n = 3 \rightarrow n = 6$  (série de Balmer). Calcule as frequências também.

**Solução 11.16**

A energia do fóton emitido ou absorvido numa transição de um elétron do nível  $n$  para o nível  $m$  é a diferença entre as energias desses níveis ( $|E_m - E_n|$ ), então seu comprimento de onda pode ser calculado como

$$\lambda = \frac{hc}{|E_m - E_n|}$$

Para  $n = 1$  e  $m = 2$ , o cálculo fica assim:

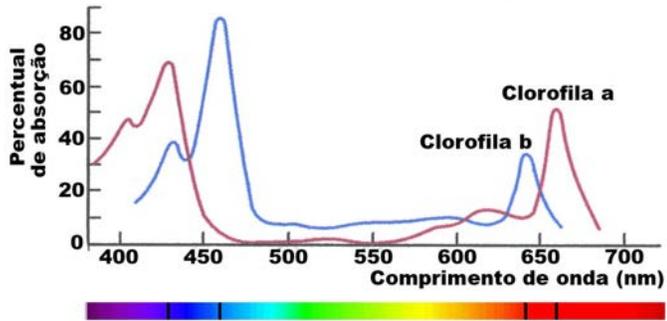
$$\lambda = \frac{4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot 3,0 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{|(-3,4 \text{ eV}) - (-13,6 \text{ eV})|} = 122 \text{ nm}$$

Assim, as respostas são

- (a) 122 nm;
- (b) 103 nm;
- (c) 657 nm.

**Solução 11.17**

O diagrama fica mais ou menos como o mostrado na figura a seguir.



Fonte: elaboração de Olavo Leopoldino da Silva Filho

## Texto complementar 7

### NANOTECNOLOGIAS AMBIENTAIS: OPORTUNIDADES E DESAFIOS

**Alex Fabiano Cortez Campos**

*Laboratório de Nanociência Ambiental e Aplicada  
Faculdade UnB Planaltina, Universidade de Brasília*

Um dos maiores propósitos da tecnologia é oferecer perspectivas para avanços significativos na qualidade de vida da humanidade. É inegável que os progressos alcançados nessa área possibilitaram o surgimento das sociedades industriais modernas, com altos padrões de consumo. Principalmente a partir da metade do século XX, melhorias alcançadas nos sistemas produtivos permitiram aumentar de forma significativa a produção de alimentos e a promoção da saúde, propiciando um elevado crescimento populacional. No entanto, a evolução contínua desse modelo de desenvolvimento impôs uma severa pressão sobre o ambiente, provocando efeitos danosos sobretudo resultantes da alta demanda da atividade industrial. Esses efeitos desestabilizadores materializaram-se especialmente na forma de poluição atmosférica, contaminação de recursos hídricos e grande geração de resíduos sólidos, implicando principalmente catástrofes climáticas e saturação do uso de recursos energéticos.

Ao mesmo tempo que o uso e o desenvolvimento da tecnologia geraram severos impactos ao ambiente, foi justamente por meio dela que a sociedade buscou alternativas para tentar solucionar esses traumas ambientais, em nome de um desenvolvimento sustentável. No contexto desse novo padrão de crescimento, surgiram as tecnologias ambientais, que têm como foco a geração de produtos, processos e serviços inovadores visando ao aumento constante da eficiência dos recursos produtivos, com preservação das matérias-primas naturais e redução tanto do consumo de substâncias nocivas quanto da geração e da emissão de poluentes.

Nesse cenário desafiador se insere a nanotecnologia, ferramenta essencial na proposição de soluções para a busca de um planeta sustentável. Mas por que “nano” e por que “tecnologia”? O prefixo “nano” se refere a um bilionésimo de alguma coisa. Em nosso contexto está associado à escala de tamanho de objetos que se encontram entre 1 e 100 nanômetros, ou seja, da ordem de 1 bilionésimo do metro ( $1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$ ). Para se ter uma ideia do tamanho diminuto desses objetos (ou nanopartículas), um simples átomo ou íon isolado é “apenas” uma ordem de grandeza

menor. Uma folha de papel, por exemplo, tem enormes 100000 nanômetros de espessura. É importante destacar, no entanto, que objetos com dimensões nanométricas não são apenas cópias em miniaturas dos objetos macroscópicos. O efeito de confinamento à escala nanométrica faz com que muitas propriedades fundamentais mudem radicalmente, tornando os “nano-objetos” extremamente atrativos para um vasto campo de aplicações... Sendo assim, pode-se dizer, de uma forma simplista, que nanotecnologia nada mais é que tecnologia feita nessa escala de tamanho.

A manipulação da matéria em nível nanométrico foi elemento de cobiça de grandes cientistas, como o norte-americano Richard Feynman, ganhador do prêmio Nobel de Física de 1965 e considerado o pai da nanotecnologia. Em sua célebre palestra “Há Muito Mais Espaço Lá Embaixo”, apresentada no Instituto de Tecnologia da Califórnia (CalTech) em 1959, ele descreveu um processo no qual cientistas seriam capazes de manipular e controlar átomos e moléculas individuais. Porém, foi apenas em 1981, com o desenvolvimento do microscópio de tunelamento com varredura, que permitiu se “enxergar” átomos individuais, que a nanotecnologia moderna de fato começou (NATIONAL..., 2018).

Os materiais em escala nanométrica, denominados nanomateriais, apresentam uma relação superfície/volume elevada, de modo que suas propriedades passam a ser dramaticamente governadas pela superfície e/ou pela interface com o meio em que se encontram. É por essa razão que, com frequência, os nanomateriais apresentam propriedades mecânicas, elétricas, térmicas, ópticas, magnéticas e químicas bastante distintas dos materiais em escala macroscópica, usualmente denominados materiais em escala maciça ou bulk. A nanotecnologia aproveita-se justamente dessas propriedades extraordinárias para aplicações em diferentes contextos, que se traduz em um alto potencial para enfrentamento dos desafios globais. Não é surpresa que a nanotecnologia tem sido considerada a base para a nova revolução industrial. Com efeito, os nanomateriais têm sido incorporados tanto nas linhas de produção quanto nos produtos desenvolvidos de variados setores produtivos como energia, saúde, agronegócio, eletroeletrônica, defesa, aeroespacial, automobilística, entre outras. Portanto, nanotecnologia é um grupo de tecnologias emergentes em escala nanométrica com o objetivo de produzir materiais, dispositivos e sistemas com propriedades e funções fundamentalmente novas (FILIPPONI; SUTHERLAND, 2012). Nesse sentido, é mais adequado usar a forma plural “nanotecnologias”, precisamente para destacar a variedade de materiais e métodos envolvidos.

No Brasil, o Programa Nacional de Nanotecnologia, lançado em 2005 pelo Ministério de Ciência Tecnologia e Inovação (MCTI), implementou ações focadas na geração de patentes, produtos e processos na área e assegurou o apoio à pesquisa básica e aplicada. Em 2012, o MCTI criou o Sistema Nacional de Laboratórios em Nanotecnologias (SisNANO), uma rede de laboratórios com o objetivo de fornecer infraestrutura e suporte acessíveis a pesquisadores, empresas e órgãos públicos de todo o país para o desenvolvimento e inovação em nanociências e nanotecnologias. Paralelamente, foi criado o Comitê Interministerial de Nanotecnologia (CIN), que aprovou a adesão do Brasil ao projeto europeu NanoReg, que trata da regulação internacional em nanotecnologia. Entre os objetivos do projeto está o de disponibilizar aos legisladores um conjunto de ferramentas para avaliação de risco e instrumentos de tomada de decisão, a curto e médio prazos.

Sem sombra de dúvidas, entre as muitas nanotecnologias disponíveis, aquelas associadas ao contexto ambiental são exemplos de tecnologias em rápida evolução, com benefícios reais, devidamente comprovados. As nanopartículas, devido ao seu tamanho reduzido e a sua grande área superficial, têm oferecido inúmeras oportunidades de prevenção, redução, remediação e detecção da contaminação ambiental.

## **Prevenção e redução da poluição ambiental**

Nessa área, as soluções nanotecnológicas atuais estão focadas na oferta de materiais avançados menos poluentes e na proposição de métodos inovadores para não apenas aumentar a eficiência de determinados processos industriais, mas também reduzir a quantidade de resíduos gerados e de substâncias químicas nocivas empregadas.

O aumento expressivo do uso de smartphones, tablets e outros dispositivos móveis nos últimos anos tem exigido da indústria o desenvolvimento de baterias recarregáveis mais eficientes e menos poluentes. O descarte incorreto desses materiais é extremamente prejudicial ao ambiente, devido à presença de metais pesados nocivos como mercúrio, chumbo, níquel e cádmio. Como alternativa promissora, materiais compósitos nanocristalinos condutores têm sido usados para substituir os eletrodos de lítio-grafite e de metais pesados. Esses novos eletrodos garantem ainda uma vida longa à bateria além de altas velocidades de recarga.

As nanotecnologias associadas à produção de materiais autolimpantes ou resistentes a sujidades permitem minimizar a necessidade de lavagem, reduzindo o consumo de água. Entre esses materiais estão os vidros especiais autolimpantes, feitos com uma lâmina superficial de nanocristais de dióxido de titânio ( $\text{TiO}_2$ ). Os depósitos de gordura impregnados no vidro são degradados espontaneamente na presença de luz solar devido às propriedades fotocatalíticas do  $\text{TiO}_2$ . Existem também os tecidos “super-hidrofóbicos”, feitos com fibras sintéticas nanoestruturadas. Quando expostos à água, as gotas, ao invés de encharcaram o tecido, escoam por sua superfície removendo a sujeira depositada (FILIPPONI; SUTHERLAND, 2012).

A indústria de tintas e vernizes vêm aos poucos substituindo as tradicionais tintas orgânicas, elaboradas à base de solventes, por tintas aquosas, com baixos teores de compostos orgânicos voláteis (COVs), como benzeno, tolueno, etilbenzeno e xileno. Para isso, tem-se empregado dispersões de nanopartículas poliméricas de látex, que originam filmes poliméricos com melhores propriedades mecânicas (PIÇARRA, 2014). Nessa mesma direção, indústrias de extração têm empregado microemulsões contendo agregados de surfactantes em nanoescala para a extração de óleo de motor e de óleo comestível de oleaginosas, no lugar dos solventes tradicionais à base de COVs.

Os programas de incentivo à geração de energia limpa têm as nanotecnologias como fortes aliadas. Catalisadores em nanoescala, conhecidos como nanocatalisadores, apresentam maior atividade catalítica quando comparados aos catalisadores tradicionais. Nesse contexto, a produção e o consumo de combustíveis sustentáveis como hidrogênio, dimetiléter e formaldeído tem recebido um forte impulso pelo uso de nanocatalisadores cerâmicos à base de nanopartículas de hexaaluminato (COLUSSI, 2012), óxidos de manganês (YU, 2008) e ferritas do tipo espinélio (BEJI, 2015). Com uma área superficial enorme, esses nanocatalisadores aumentam fortemente a eficiência dos processos de síntese e de queima dos combustíveis sustentáveis, gerando menos resíduos. Somando-se a isso, apresentam maior estabilidade, durabilidade e capacidade de recuperação.

Uma outra área na qual as nanotecnologias estão contribuindo densamente é no desenvolvimento de insumos agrícolas e veterinários mais estáveis e menos lixiviáveis no ambiente. Sistemas nanoparticulados à base de polímeros biodegradáveis têm sido usados para a liberação controlada de fertilizantes, herbicidas, inseticidas, fungicidas no solo e vacinas e fármacos em animais (JUNIOR; MATTOSO, 2007). Por um lado, o tamanho pequeno desses nanomateriais lhes assegura um alto

poder de penetração. Por outro lado, por estarem “presos” no interior das nanopartículas, tanto os biocidas quanto os fármacos estão muito menos suscetíveis à degradação aleatória e à lixiviação para os corpos hídricos no caso dos biocidas.

## Remediação e mitigação da poluição ambiental

Entre os problemas ambientais mais complexos e preocupantes está a contaminação do ar, do solo, das águas subterrâneas e dos corpos hídricos. As zonas de intensa atividade industrial naturalmente são muito mais afetadas devido ao despejo inadequado de efluentes contendo poluentes de alta periculosidade, que penetram no solo ou são liberados em rios e lagos próximos às instalações industriais. Vazamentos de tubulações e de tanques de armazenamento subterrâneos, assim como minas e aterros abandonados também introduzem diversos de poluentes no ambiente. Os poluentes mais comuns dessas atividades são os metais pesados (mercúrio, cromo, chumbo, arsênio, cádmio) e os compostos orgânicos (corantes químicos, pesticidas, solventes clorados, dioxinas, derivados de petróleo). Além das águas residuárias, outro tipo de poluição tem sido motivo de grande preocupação: a contaminação da água potável. Metais pesados, como arsênio e mercúrio em particular, além dos corantes químicos e solventes orgânicos, são extremamente tóxicos e representam sérios riscos à saúde humana. Em um cenário de redução mundial da disponibilidade de água para consumo, mostra-se urgente a busca de métodos de tratamento e remediação que permitam o tratamento rápido, econômico e eficaz da água poluída. Nesse contexto, novas nanotecnologias já estão sendo empregadas para o tratamento e purificação de água com poluentes e para a gestão de águas residuais e dessalinização (FILIPPONI; SUTHERLAND, 2012).

Nanopartículas de ferro metálico têm provado ser muito efetivas na degradação in situ de compostos orgânicos clorados em águas de lençóis freáticos contaminados (CAO, 2005). Nessa nanotecnologia, uma espécie de lama contendo as nanopartículas de ferro metálico é injetada no solo contaminado, difundindo-se pelo lençol freático. Por meio de reações de oxirredução, o ferro provoca redução eletroquímica dos compostos clorados, transformando-os em moléculas menos poluentes ou não poluentes. Outra importante vantagem desse método é que as nanopartículas não são alteradas pelas condições de pH do solo, temperatura ou níveis

de nutrientes, o que permite com que possam permanecer dispersas por longos períodos. Essa estratégia também tem se mostrado muito eficiente na descontaminação de lençóis freáticos poluídos com pesticidas, corantes químicos e derivados de petróleo (AMIN, 2014).

Assim como nos vidros autolimpantes, nanopartículas de  $\text{TiO}_2$  têm demonstrado um potencial promissor para a purificação de água (LI, 2008). A atividade fotocatalítica desse material permite a degradação, sob radiação ultravioleta, de compostos orgânicos presentes em águas residuais, gerando produtos menos tóxicos ou não tóxicos. No processo também podem ser produzidos radicais hidroxila (HO), fortemente oxidantes, que desinfectam a água matando microrganismos como fungos, algas, bactérias e protozoários.

O fato de os nanomateriais apresentarem uma grande área superficial faz com que sejam extremamente atraentes para adsorver poluentes. Indubitavelmente, essa é a principal aplicação das nanotecnologias para o controle da poluição hídrica. Diversos tipos de nanoadsorventes estão atualmente disponíveis para todos os tipos de poluentes de águas residuais. Nanotubos de carbono, nanozeólitas e dendrímeros, por exemplo, têm sido utilizados com frequência como nanoadsorventes para remoção de poluentes orgânicos e metais pesados de águas de rejeitos industriais (SAVAGE; DIALLO, 2005).

Aplicações mais atuais envolvem o uso de nanoadsorventes magnéticos, que tornam o processo muito mais eficiente (AMBASHTA; SILLANPÄÄ, 2010). Esses nanoadsorventes são sintetizados à base de nanopartículas de magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), maguemita ( $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ) ou outras ferritas tipo espinélio ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  ou  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$ ), que exibem altos valores de magnetização de saturação e susceptibilidade magnética. Esses nanoadsorventes magnéticos podem ainda ter sua superfície modificada com determinados ligantes como poldimetilsiloxano (PDMS) ou brometo de cetiltrimetilamônio (CTAB), que permitem adsorver poluentes orgânicos persistentes como corantes, pesticidas e solventes (RODOVALHO, 2016). No processo de separação química assistida magneticamente, os nanoadsorventes são dispersos no efluente poluído, onde a adsorção ocorre. Em seguida, o efluente passa por uma coluna ou filtro magnético, feito com ímãs permanentes ou com eletroímãs, de modo que as nanopartículas carregadas com os poluentes são retidas, permitindo se obter o efluente limpo. Os nanoadsorventes podem ser tratados, numa etapa subsequente, para se recuperar os poluentes e as nanopartículas visando ao reuso.

A remediação de efluentes contaminados com resíduos radioativos também tem sido auxiliada pelas nanotecnologias. Atualmente, nanofibras de titanato permitem a retenção de íons  $Ra^{2+}$  e  $Sr^{2+}$  radioativos por troca iônica, para sua posterior eliminação em condições seguras (YANG, 2008).

Uma das aplicações mais notáveis da atualidade com relação às nanotecnologias para a remediação da poluição hídrica é o uso de nanorobôs, conhecidos como nanobots. Trata-se de uma espécie de nanomáquinas autoalimentadas que podem capturar metais pesados de soluções contaminadas e transportá-los para locais desejados e até mesmo liberá-los (VILELA, 2016). Esses nanobots são revestidos com grafeno dopado com nanopartículas magnéticas e movidos a peróxido de hidrogênio ( $H_2O_2$ ). A decomposição do peróxido, com liberação de oxigênio, funciona como o motor no nanorobô, que tem seu movimento controlado por um campo magnético variável e muito preciso. Dessa forma, eles podem adsorver os poluentes, serem guiados para um ponto de coleta e continuarem sua “tarefa” de descontaminação. Não é extraordinário?

Com relação à água de consumo, o uso dos nanomateriais tem sido extremamente útil para o desenvolvimento de membranas mais eficientes e economicamente viáveis para tratamento de água e dessalinização. Membranas nanoestruturadas compostas de  $TiO_2$ ,  $SiO_2$  (óxido de silício) e  $Al_2O_3$  (óxido de alumínio) têm demonstrado excelentes características de rejeição iônica e permeabilidade à água, permitindo-se alcançar altos fluxos de água dessalinizada (FILIPPONI; SUTHERLAND, 2012).

## Monitoramento e detecção da poluição

Novamente, devido ao seu pequeno tamanho e à sua superfície extremamente reativa, os nanomateriais também têm sido empregados no desenvolvimento de dispositivos de monitoramento e detecção da poluição altamente miniaturizados, precisos, seletivos e sensíveis. Esses nanosensores estão atualmente disponíveis como dispositivos portáteis e como sensores remotos, e permitem o monitoramento em tempo real de grandes áreas (FILIPPONI; SUTHERLAND, 2012).

A detecção de gases tem sido bastante explorada com o uso de nanosensores de resposta rápida e alta sensibilidade. Alguns materiais como nanotubos de carbono e nanopartículas de óxido de zinco ( $ZnO$ ) e de dióxido de estanho ( $SnO_2$ ) têm sido utilizados para monitorar a presença e a concentração de gases poluentes como óxidos de nitrogênio ( $NO_2$  e  $NO$ ), amônia ( $NH_3$ ), monóxido de carbono ( $CO$ ), dióxido de carbono ( $CO_2$ ), metano ( $CH_4$ ), óxidos de enxofre ( $SO_2$  e  $SO_3$ ) e gás sulfídrico

(H<sub>2</sub>S) (FRANCIA, 2009). O princípio de funcionamento desses dispositivos se baseia na medição da condutividade elétrica de diversos tipos de gases, em diferentes proporções, quando são adsorvidos na superfície do nanomaterial. Uma vez que cada gás apresenta uma resposta característica da variação da condutividade elétrica, pode-se identificá-lo e quantificá-lo. Essa nanotecnologia é especialmente importante na exploração de recursos como petróleo e gás natural, uma vez que permite detectar vazamento de gases durante o processo de extração.

No caso da detecção de metais pesados em água, novas nanotecnologias têm mostrado resultados muito promissores. Uma técnica inovadora para detecção rápida e seletiva de metais pesados em água usa membrana de alumina porosa, recoberta com nanotubos de carbono (SHABAN; HUSSEIN, 2012). O dispositivo permite a detecção instantânea *in situ*, baseada em espectroscopia de dispersão Raman amplificada por superfície. A amplificação Raman observada origina-se da excitação e da interferência de ondas de laser, que são altamente dependentes do tipo e concentração do metal pesado adsorvido no nanosensor. Existem também os nanosensores de contato para metais pesados, que são feitos a partir de uma matriz de pares de eletrodos inseridos num chip de silício e separados por alguns nanômetros (FILIPPONI; SUTHERLAND, 2012). Uma vez que o dispositivo é exposto a uma solução de água contendo os íons dos metais pesados, estes depositam-se no interior do “nano-espaço” entre os eletrodos, provocando uma variação brusca na condutância da solução. Os nanosensores também têm sido úteis na exploração mineral, pois permitem a detecção de íons de ouro (Au<sup>3+</sup>), por exemplo, em cursos d’água, indicando que algum depósito ou mina do metal encontra-se nas proximidades.

## Nanomateriais no ambiente: riscos ou desafios?

Ao mesmo tempo que as nanotecnologias representam uma revolução no contexto da produção das tecnologias limpas, introduzindo novos materiais e processos, também trazem uma preocupação crescente quanto aos riscos potenciais de danos ao ambiente. Justamente as mesmas características atraentes dos nanomateriais para as diversas aplicações é que podem trazer efeitos indesejáveis, caso sejam liberados de forma descontrolada no ambiente. Com tamanho nanométrico e superfície altamente reativa, as nanopartículas têm alto poder de se difundirem e se acumularem no solo, nos corpos hídricos, na atmosfera e em células vivas. Esses fenômenos são dinâmicos e difíceis de serem controlados,

podendo resultar na concentração de toxicantes no ambiente e seu acúmulo na cadeia alimentar, adsorção de biomoléculas com interferência em processos biológicos e, ainda, catálise de processos químicos nocivos ao ambiente (QUINA, 2004).

O maior problema é que, concretamente, ainda se sabe muito pouco sobre esses efeitos negativos e sua associação ao uso de nanopartículas e de nanotecnologias para aplicações comerciais e industriais. Dessa forma, não se deve encarar esses riscos potenciais como um entrave tecnológico, mas sim como um desafio e ser enfrentado. Não se pode simplesmente tratar as nanotecnologias como tecnologias de risco. Indubitavelmente, umas das principais armas para esse enfrentamento é a proposição de políticas de regulação e regulamentação das nanotecnologias. A União Europeia, com o NanoReg, vem realizando diversos estudos visando ao estabelecimento de normas e recomendações voltadas para a regulação e regulamentação dos nanomateriais (HANKIN; CABALLERO, 2014). No Brasil esse assunto também está em pauta e se materializa em projetos de lei na Câmara Federal, ainda em discussão. Além de um Marco Regulatório, o país precisa de uma legislação moderna e flexível, para se conciliar os interesses dos principais atores desse processo: indústria, pesquisadores e consumidores.

# Apêndice A

## Lista de Constantes e Unidades

### Constantes físicas e matemáticas

Variável		Valor aproximado
<i>símbolo</i>	<i>nome</i>	
$e$	carga fundamental	$1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
$\epsilon_0$	permissividade elétrica do vácuo <sup>(1)</sup>	$8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$
$h$	constante de Planck	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
$\hbar$	“agá cortado”	$h/(2\pi)$
$k_B$	constante de Boltzmann	$1,38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
$\kappa_0$	constante de Coulomb <sup>(2)</sup>	$8,98755 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$
$\pi$	pi	3,14
$mol$	mol	$6,022 \times 10^{23}$
R	constante universal dos gases perfeitos	$8,31 \frac{\text{Jmol}}{\text{K}}$

<sup>1</sup>Ou constante dielétrica do vácuo.

<sup>2</sup>Ou “constante eletrostática do vácuo”, ou ainda simplesmente “constante eletrostática”.

## Unidades de medida

<b>Símbolo</b>	<b>Unidade representada</b>	<b>Grandeza medida</b>
<i>a</i>	are	área
A	ampere (ou ampère)	corrente elétrica
Å	angstrom	distância de ordem de grandeza atômica
C	coulomb	carga elétrica
cd	candela	intensidade luminosa
°C	grau Celsius	temperatura
J	joule	energia
°F	grau Fahrenheit	temperatura
<i>ha</i>	hectare	área
F	farad	capacidade elétrica (capacitância)
g	grama	massa
Gy	gray	dose absorvida
K	kelvin	temperatura
m	metro	distância, comprimento
mol	mol	quantidade de moléculas
N	newton	força
Ω	ohm	resistência elétrica
Pa	pascal	pressão
°Rø	grau Rømer (ou Romer)	temperatura
rad	rad	dose absorvida
rem	rem	dose equivalente
s	segundo	tempo, período
Sv	sievert	dose equivalente
V	volt	tensão elétrica, voltagem, d.d.p.
W	watt	potência
Wb	weber	fluxo magnético

## Prefixos de unidades

Fator multiplicativo		Prefixo		Exemplo	
potência	decimal	por extenso	símbolo	por extenso	símbolo
$10^{12}$	1.000.000.000.000	tera	T	terabyte	TB
$10^9$	1.000.000.000	giga	G	gigabyte	GB
$10^6$	1.000.000	mega	M	megahertz	MHz
$10^3$	1.000	quilo	<i>k</i>	quilograma	<i>kg</i>
$10^2$	100	hecto	<i>h</i>	hectômetro	<i>hm</i>
$10^1$	10	deca	<i>da</i>	decâmetro	<i>dam</i>
$10^0$	1	<i>nenhum</i>	<i>nenhum</i>	metro	<i>m</i>
$10^{-1}$	0,1	deci	<i>d</i>	decilitro	<i>dL</i>
$10^{-2}$	0,01	centi	<i>c</i>	centímetro	<i>cm</i>
$10^{-3}$	0,001	mili	<i>m</i>	milímetro	<i>mm</i>
$10^{-6}$	0,000001	micro	$\mu$	micrômetro	$\mu m$
$10^{-9}$	0,000000001	nano	<i>n</i>	nanômetro	<i>nm</i>
$10^{-12}$	0,000000000001	pico	<i>p</i>	picossegundo	<i>ps</i>
$10^{-15}$	0,000000000000001	femto	<i>f</i>	femtosegundo	<i>fs</i>



## Apêndice B

# Lista de fatores de conversão

### Comprimento

- 1 mi (milha terrestre) =  $1,6 \times 10^3$  m = 1,6 km
- 1 in (polegada<sup>1</sup>) = 2,5 cm =  $2,5 \times 10^{-2}$  m

### Período de tempo

- 1 h = 60 min = 3600 s
- 1 ano-luz =  $9,5 \times 10^{15}$  m (distância que a luz percorre em um ano)

### Área

- 1 a (are) = 100 m<sup>2</sup>
- 1 ha (hectare) = 100 a = 10.000 m<sup>2</sup>
- o *alqueire* tem vários padrões regionais diferentes, com valores distintos. Em Minas Gerais, por exemplo, o alqueire pode valer 1,21 ha e 7,26 ha (vide Apêndice A). É mais fácil, portanto, perguntar para cada pessoa que fator de conversão ela utiliza.

---

<sup>1</sup>O símbolo internacional para “polegada” é “in”, que vem do inglês “inch”, mas às vezes usa-se “pol” como símbolo.

## Volume

- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

## Força

- $1 \text{ lb} = 0,45 \text{ kg}$
- $1 \text{ kgf} = 1 \text{ N} \cdot g$  (onde “g” é a aceleração da gravidade) = 9,81 N

## Pressão

- $1 \text{ atm} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- $1 \text{ mmHg} = 133 \text{ Pa}$
- $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$
- $1 \text{ PSI} = 1 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 6,7 \times 10^3 \text{ Pa}$   
Obs.: “PSI” significa “pounds per squared inch” (libras por polegada quadrada).

## Energia

- $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
- $1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$
- $1 \text{ Cal} = 1 \text{ kcal} = 1000 \text{ cal} = 4184 \text{ J}$
- $1 \text{ kWh} = 3,600 \times 10^6 \text{ J}$

## Temperatura

Para os valores numéricos apenas:

- $T_C = T_K - 273,15$
- $T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32)$

Fórmulas completas, com valores numéricos e unidades de medida:

- $T_C = T_K \left( \frac{^\circ\text{C}}{\text{K}} \right) - 273,15 \text{ } ^\circ\text{C}$
- $T_F = T_C \left( \frac{9^\circ\text{F}}{5^\circ\text{C}} \right) + 32 \text{ } ^\circ\text{F}$

## Dose de radiação

- $1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
- $1 \text{ Gy} = 100 \text{ rad}$
- $1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy}$  multiplicado pelo fator de qualidade da radiação
- $1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem}$

## Exposição

- $1 \text{ R} = 2,58 \times 10^{-4} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$



## **Anexo A**

# **Unidades de medida agrárias**

A tabela seguinte, retirada do Ministério do Desenvolvimento Agrário (BRASIL. Ministério do Desenvolvimento Agrário, 2016?), apresenta diversas unidades de medida utilizadas na prática agrária.

TABELA DE MEDIDAS AGRÁRIAS NÃO DECIMAIS

	DESIGNAÇÃO	BRAÇAS	METROS	HECTARES	ESTADOS
1	Aqueire	50 X 50	110 X 110	1,21	SP, MG
2	Aqueire	50 X 75	110 X 165	1,82	MG, MT
3	Aqueire	75 X 75	165 X 165	2,72	TODOS
4	Aqueire	75 X 80	165 X 175	2,90	MG
5	Aqueire	79 X 79	173,8 X 173,8	3,02	MG
6	Aqueire	80 X 80	176 X 176	3,19	ES, SP, MG
7	Aqueire	75 X 100	165 X 220	3,63	RJ, MG
8	Aqueire	100 X 150	220 X 330	7,26	MG
9	Aqueire	100 X 200	220 X 440	9,68	MG, MT
10	Aqueire	-	440 X 440	19,36	MG, BA, GO
11	Aqueire Paulista	50 X 100	110 X 220	2,42	MA, ES, RJ, SP, MG, PE, SC, RS, MT, GO e PB
12	Aqueire Mineiro	100x 100	220 x 220	4,84	AC, RN, BA, ES, RJ, SP, SC, RS, MT, GO, TO, MG
13	Braco Quadrado	200 X 200	220	-	TODOS
14	Braco de Sesmaria	-	2,20 X 2,20	0,000484	TODOS
15	Braco de Sesmaria	1 x 3.000	2,20 x 6.600	1,45	RS
16	Celamim	12,5 x 6,25	27,5 x 13,75	0,04	MT
17	Celamim	12,5 x 25	27,5 x 55	0,15	SP, PR, SC, RS, MG
18	Cento de Córados	30 x 30	66 x 66	0,44	BA
19	Cento Passos	30 x 30	66 x 66	0,44	CE
20	Cinquenta	50 X 50	110 X 110	1,21	AM, PA, MA, PI, CE, RN, PB, PE, AL, SP, SC, RS
21	Conta	4 x 25	8,8 x 55	0,05	PE, AL, SE
22	Conta	10 x 12	22 x 33	0,08	PE
23	Conta	5 x 25	11 x 55	0,06	SE
24	Conta	12 x 12	26,4 x 26,4	0,07	PE, AL, SE
25	Conta	10 x 15	22 x 33	0,07	PE
26	Corda	10 x 10	22 x 22	0,05	BA
27	Corda	12 x 12	26,4 x 26,4	0,07	BA
28	Corda	15 x 15	33 x 33	0,11	BA
29	Dala	-	20 x 20	0,04	GO, TO
30	Dala	8 x 20	17,6 x 44	0,08	SP
31	Dala	10 x 20	22 x 44	0,10	SP, PR, MG
32	Dala	-	25 x 50	0,12	SP, PR
33	Dala	-	44 x 44	0,19	GO, TO
34	Dala de Sesmaria	3.000 x 9.000	6.600 X 19.800	130.680,00	PI e TODOS até 1822
35	Dala de Campo	1.500 x 375	3.300 x 825	272,25	RS
36	Geira (Leira)	20 x 20	44 x 44	0,19	SP, SC
37	Léguas Linear	-	6000	-	PA, MA, PI, BA
38	Léguas Linear	3000	6000	-	RS, RJ, GO, TO
39	Léguas Linear	2400	5280	-	CE, RN
40	Léguas Linear	-	6000	-	TODOS
41	Léguas Quadrada	-	6000 x 6000	36000,00	TODOS
42	Léguas Quadrada	-	6.000 x 6.000	43560,00	PA, MA, PI, BA, RJ, RS, GO, TO
43	Quadra de Sesmaria	-	-	10890,00	MG
44	Linha	25 x 25	55 x 55	0,30	MA, PI, PE
45	Litro	-	-	0,05	SP
46	Litro	-	-	0,06	MG
47	Litro	5 x 25	11 x 55	0,06	SP, PR, SC, GO, MG
48	Litro	-	-	0,07	RJ
49	Litro	-	-	0,07	MG
50	Litro	-	-	0,07	MG

ANEXO A. UNIDADES DE MEDIDA AGRÁRIAS

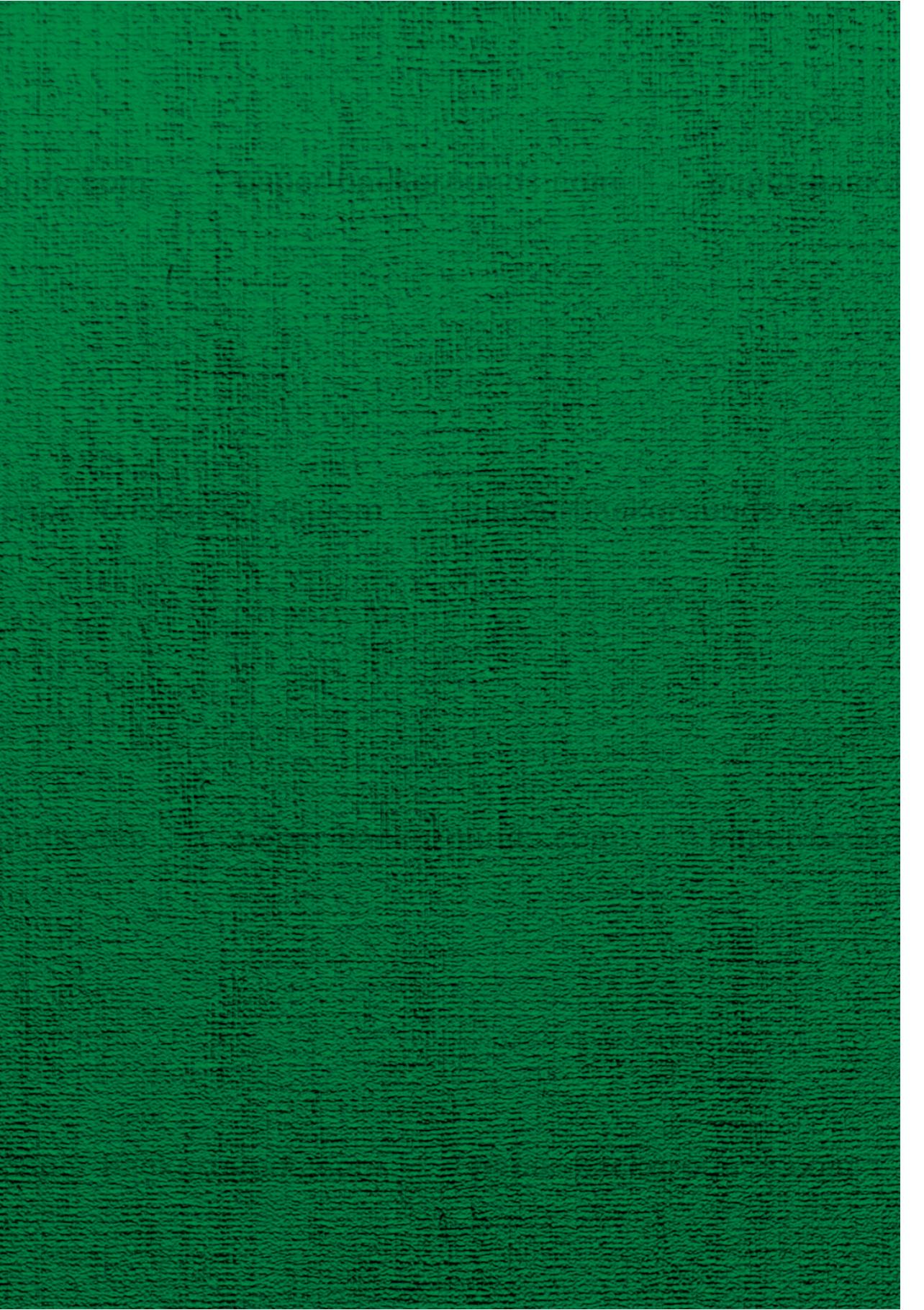
51	Litro	2,5 X 2,5	-	0,02	SP
52	Litro	10 x 10	22 x 22	0,05	-
53	Litro	4 x 25	8,8 x 55	0,05	SP, SC, PR, GO, TO, MG
54	Litro	-	-	0,06	SP, MG
55	Litro	5 x 25	11 x 55	-	SP, PR, SC, GO, TO
56	Litro	-	-	0,07	RJ, MG
57	Litro	-	-	0,12	MG, ES, RJ
58	Meia Cuia	10 x 10	22 x 22	0,05	-
59	Meia Dala	10 x 10	22 x 22	0,05	SP
60	Meia Linha	12,5 x 25	27,5 x 55	0,15	MA
61	Meia Quanta	5 x 100	110 x 220	2,42	MA
62	Meia Quanta	25 x 25	55 x 55	0,30	SP, RS
63	Meia Quanta	30 x 12,5	110 x 27,5	0,35	SP, RS
64	MIL Réis	50 x 100	110 x 220	2,42	-
65	Tarefa	-	4356	0,43	BA
66	Tarefa	-	3053	0,03	AL, SE
67	Tarefa	-	3630	0,36	CE
68	Tarefa	7 x 7	15,4 x 15,4	0,02	MG
69	Tarefa	8 x 8	17,6 x 17,6	0,03	MG
70	Tarefa	12 x 12	26,4 x 26,4	0,10	SP, MT, MG
71	Tarefa	12,5 x 12,5	27,5 x 27,5	0,08	SP, PR, MT, MG
72	Tarefa	14 x 14	30,8 x 30,8	0,09	MT, MG
73	Tarefa	15 x 15	33 x 33	0,11	SP, MT, MG
74	Tarefa	16 x 16	36,2 x 25,2	0,12	MT, MG
75	Tarefa	18 x 18	39,6 x 39,6	0,16	MG
76	Tarefa	20 x 20	44 x 44	0,19	MG
77	Tarefa	25 x 25	55 x 55	0,30	TODOS
78	Tarefa bahiana	30 x 30	66 x 66	0,44	PB, PE, BA, SP, GO, MG
79	Quadra	12 x 12	26,4 x 26,4	0,07	PE, SP, MG
80	Quadra	14 x 14	30,8 x 30,8	0,09	SP, MG
81	Quadra	60 x 60	132 x 132	1,74	AC, AM, PA, PI, CE, PE, AL, ES, RJ, SP, SC, RS, MT, MG
82	Quadra	100 x 100	220 x 220	4,84	AM, PA, PI, CE, PB, PE, AL, ES, MT, GO, MG
83	Quadra	50 x 25	110 x 55	0,61	SP, PR, SC, RS, MT, MG
84	Quadra	37,5 x 37,5	82,5 x 82,5	0,68	RJ, SP, RS, MG
85	Quadra	-	-	0,76	MG
86	Quadra	40 x 40	88 x 88	0,77	MG
87	Quadra	25 x 75	55 x 165	0,91	MG
88	Quadra	100 x 100	220 x 220	1,21	ES, RJ, RS, MT, GO, MG
89	Quadra	100 x 100	220 x 220	4,84	MG
90	Quarteirão	12,5 x 12,5	27,5 x 27,5	0,7560	AC, PE, SE, MG
91	Vara linear	-	2,2	-	AC, AM, MA, CE, PB, PE, SE, BA, PR, GO, MG
92	Vara quadrada	-	2,20 x 2,20	0,00484	AC, AM, MA, CE, PB, PE, SE, BA, PR, GO, MG

Fonte:

1) - Serviço de Estatística de Produção, Ministério Agricultura - setembro/94 (informação preparada em novembro de 1986 por Wilson Gonçalves Teixeira, Eng. Agrº - Dos Serviços Gerais de Planejamento e Coordenação do INDA)

2) - Fátima, Inocenc Marinho. Dicionário Agrário Brasileiro: doutrina, jargões, legislação e prática

3) - Agência Operacional - BMA/PR, MG, 2004



# Referências

ABBAGNANO, Nicola. *Dicionário de Filosofia*. Trad. 1. ed. bras. coord. e rev. por Alfredo Bosi; rev. da trad. e trad. dos novos textos por Ivone Castilho Benedetti. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ALIAKBARIAN, H.; ENAYATI, A.; SOLTANI, M. A.; MAHABADI, Hossein Ameri; MOGHAVVEM, Mahmoud. Electromagnetic solutions for the agricultural problems. *Advanced Microwave Circuits and Systems*, p. 471–490, 2010. Disponível em: <http://mpira.ub.uni-muenchen.de/46047/> – acesso em 11 jul. 2018.

ALTERIMA. *Rodas d'água*. 2018. Disponível em: <http://www.alterima.com.br/index.asp?InCdSecao=25> – acesso em 16 jul. 2018.

AMBASHTA, R. D.; SILLANPÄÄ, M. Water purification using magnetic assistance: a review. *Journal of Hazardous Materials*, v. 180, p. 38, 2010. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/20488616>. Acesso em: acesso em 20 nov. 2018.

AMIN, M. T.; ALAZBA, A. A.; MANZOOR, U. Review of removal of pollutants from water/wastewater using different types of nanomaterials. *Advances in Materials Science and Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, n. 825910, p. 1–24, 2014. Disponível em: <https://www.hindawi.com/journals/amse/2014/825910/> – acesso em 20 nov. 2018.

ANEEL. *Matriz de energia elétrica*. 2016. Disponível em: <http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/OperacaoCapacidadeBrasil.cfm> – acesso em 11 jul. 2018.

ANFAVEA. *Indústria Automobilística Brasileira*. 2007. Disponível em: <http://www.anfavea.com.br/anuario2007> – acesso em 08 mai. 2008.

APROSOJA BRASIL. *A história da soja*. 2018. Disponível em: <http://aprosojabrasil.com.br/2014/sobre-a-soja/a-historia-da-soja> – acesso em 11 jul. 2018.

APROSOJA MATO GROSSO. *A história do milho*. 2018. Disponível em: <http://www.aprosoja.com.br/soja-e-milho/a-historia-do-milho> – acesso em 11 jul. 2018.

ARDLEY, Neil. *Dicionário Temático de Ciências*. São Paulo: Scipione, 1996.

ARRUDA, Rinaldo. Populações tradicionais e a proteção dos recursos naturais em unidades de conservação. *Ambiente e Sociedade*, ANPPAS – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Ambiente e Sociedade, Campinas - SP, ano II, n. 5, 1999.

BARNES, Harry Elmer; FLETCHER, Ronald. Auguste comte. *Encyclopædia Britannica, Inc.*, 2016. Disponível em <https://global.britannica.com/biography/Auguste-Comte> – acesso em 24 nov. 2016.

BEJI, Z.; SUN, M.; SMIRI, L. S.; HERBST, F.; MANGENEY, C.; AMMAR, S. Polyol synthesis of non-stoichiometric mn-zn ferrite nanocrystals: structural/microstructural characterization and catalytic application. *RSC Adv.*, Royal Society of Chemistry, n. 5, 2015. Disponível em: <https://pubs.rsc.org/en/content/articlelanding/2015/ra/c5ra07562a> – acesso em 20 nov. 2018.

BIPM HOME PAGE. *International System of Units (SI)*. 2018. Disponível em: <https://www.bipm.org/en/measurement-units/> – acesso em 11 jul. 2018.

BRAGA, Carlos Augusto da Silva; ARMOND, Geraldo; MAZIERO, José V. G.; BERNARDI, José A.; FILHO, Afonso Peche; S. TANAKA, Maria A. de; ITO, Margarida F.; MESQUITA, Cezar M. Automatic solar heating system for control of pathogens in irrigation water. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 5, n. 2, p. 327–331, 2001. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1415-43662001000200025](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1415-43662001000200025). Acesso em: 20 nov. 2018.

BRASIL. Decreto n. 5.051, de 19 de abril de 2004. *Promulga a Convenção no 169 da Organização Internacional do Trabalho - OIT sobre Povos Indígenas e Tribais*. 2004. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2004-2006/2004/decreto/d5051.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/decreto/d5051.htm) – acesso em 20 nov. 2018.

BRASIL. Lei n. 12.651, de 25 de maio de 2012. *Dispõe sobre a proteção da vegetação nativa; altera as Leis nos 6.938, de 31 de agosto de 1981, 9.393, de 19 de dezembro de 1996, e 11.428, de 22 de dezembro de 2006; revoga as Leis nos 4.771, de 15 de setembro de 1965, e 7.754, de 14 de abril de 1989, e a Medida Provisória no 2.166-67, de 24 de agosto de 2001; e dá outras providências*. 2012. Código Florestal. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_Ato2011-2014/2012/Lei/L12651compilado.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2012/Lei/L12651compilado.htm) – acesso em 20 nov. 2018.

BRASIL. Ministério do Desenvolvimento Agrário. *Tabela de medidas agrárias não decimais*. 2016? Disponível em: [sistemas.mda.gov.br/arquivos/TABELA\\_MEDIDA\\_AGRARIA\\_NAO\\_DECIMAL.pdf](http://sistemas.mda.gov.br/arquivos/TABELA_MEDIDA_AGRARIA_NAO_DECIMAL.pdf) – acesso em 5 jan. 2016.

BUENO, Leda; ROSSI, Luiz A. Comparação entre tecnologias de climatização para criação de frangos quanto a energia, ambiência e produtividade. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, Campina Grande - PB, v. 10, n. 2, p. 497–504, 2006.

---

BUNGE, Mario. *Dicionário de filosofia*. Trad. de Gita K. Guinsburg. 1. ed. São Paulo: Perspectiva, 2006.

CAO, Jiasheng; ELLIOT, Daniel; ZHANG, Wei-Xian. Perchlorate reduction by nanoscale iron particles. *Journal of Nanoparticle Research*, v. 7, p. 499–506, 2005. Disponível em: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs11051-005-4412-x.pdf> – acesso em 20 nov. 2018.

CARDOSO, Eliezer de Moura. *Módulo Informação Técnica*. Rio de Janeiro: CNEN, 2015. (Programa de Integração CNEN (PIC)).

CARDOSO, Eliezer de Moura; ALVES, Ismar Pinto; BRAZ, Claudio; PESTANA, Sonia. *Aplicações da Energia Nuclear*. Rio de Janeiro: CNEN, 2015.

CARNEIRO, Celso Dal Ré; MIZUSAKI, Ana Maria Pimentel; ALMEIDA, Fernando Flávio Marques de. A determinação da idade das rochas. *TerræDidática*, v. 1, n. 1, p. 6–35, 2005.

CARVALHO, Nelson Moreira de. *A Secagem de Sementes*. Jaboticabal, São Paulo: FUNEP, 1994.

CARVALHO, Thiago Morato de. Técnicas de medição de vazão por meios convencionais e não convencionais. *RBGF – Revista Brasileira de Geografia Física*, Recife, Pernambuco, v. 1, n. 1, p. 73–85, mai/ago 2008.

CASSIANO, Tiago de Sousa Araujo; LIMA, Henrique Alves de; CASTRO, Leonardo Luiz e. *Miniusina que gera energia elétrica a partir de movimento de roda d'água*. Brasília - DF: Programa A3M - DEG - UnB, 2018.

CDT UnB. *Brasília ganha primeira estação de 'GPS russo' fora do gigante euroasiático*. 2014. Disponível em: <http://www.cdt.unb.br/noticias/index/detalhanoticia/filtro/1169/?menu-principal=noticias&menu-action=noticias> – acesso em 27 set. 2018.

CHAIB, João Paulo Martins de Castro; ASSIS, André Koch Torres. Distorção da obra eletromagnética de ampère nos livros didáticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, scielo, v. 29, n. 1, p. 65–70, 2007. ISSN 1806-1117. Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/060304.pdf> – acesso em 12 dez. 2018.

CNEN. *Perguntas Frequentes*. 2015. Disponível em: <http://www.cnen.gov.br/perguntas-frequentes> – acesso em 8 jul. 2015.

COLUSSI, S.; GAYEN, A.; LLORCA, J.; LEITENBURG, C. de; DOLCETTI, G.; TROVARELLI, A. Catalytic performance of solution combustion synthesized alumina- and ceria-supported pt and pd nanoparticles for combustion of propane and dimethyl ether (dme). *Industrial & Engineering Chemistry Research*, n. 51, p. 7510–7517, 2012.

COUTO, Luiz Mário Marques. *Elementos da Hidráulica*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2012.

CUNHA, Antônio Geraldo da. *Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Lexikon, 2010.

DELGADO, L. M. *El tractor agrícola: características y utilización*. Madri: Ministério de Agricultura, Pesca y Alimentación, 1991.

DICIONÁRIO PRIBERAM. *Alqueire*. 2018. Disponível em: <https://dicionario.priberam.org/alqueire> – acesso em 20 nov. 2018.

DICIONÁRIO PRIBERAM. *Fundamental*. 2018. Disponível em: : <https://dicionario.priberam.org/fundamental> – acesso em 20 nov. 2018.

DICTIONARY.COM. The American Heritage New Dictionary of Cultural Literacy, Third Edition. physics. 2015. Disponível em: <http://dictionary.reference.com/browse/physics>. Acesso em: 27 nov. 2015.

DUROZOI, Gérard; ROUSSEL, André. *Dicionário de Filosofia*. Tradução de Marina Appenzeller. Campinas: Papiros, 1993.

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. Heinrich hertz. *Encyclopædia Britannica, Inc.*, 2016. Disponível em <https://www.britannica.com/biography/Heinrich-Hertz> – acesso em 24 nov. 2016.

FELTRAN-BARBIERI, Rafael. *Biocombustíveis, controvérsia agrícola na economia do petróleo: o caso do etanol no cerrado*. 231 p. Tese (Doutorado em Ciência Ambiental) — Universidade de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Ciência Ambiental, São Paulo, 2009. Disponível em [http://www.iee.usp.br/producao/2009/Teses/Rafael\\_Feltran.pdf](http://www.iee.usp.br/producao/2009/Teses/Rafael_Feltran.pdf) – acesso em 11 jul. 2018.

FERNANDES, Haroldo C. Eng-338 mecânica e mecanização agrícola. apostila. Departamento de Engenharia Agrícola, Universidade Federal de Viçosa.

FILIPPONI, Luisa; SUTHERLAND, Duncan. *Nanotechnologies: Principles, Applications, Implications and Hands-on Activities: a compendium for educators*. Luxemburgo: European Commission, 2012.

DI FRANCIA, Girolamo; ALFANO, Brigida; LA FERRARA, Vera. Conductometric gas nonsensors. *Journal of Sensors*, n. Article ID 659275, p. 1–8, 2009.

FRAUTSCHI, Steven C.; OLENICK, Richard P.; APOSTOL, Tom M.; GOODSTEIN, David L. *The Mechanical Universe: Mechanics and heat, advanced edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

FRENCH, Anthony Philip. *Vibrações e ondas*. Tradução de Odimar Deusdará Rodrigues, Reva Garg e Vijayendra K. Garg. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2001.

---

FUNAI. *Terras Indígenas*. 2018. Disponível em: <http://www.funai.gov.br/index.php/indios-no-brasil/terras-indigenas> – acesso em 20 nov. 2018.

GILG, Juergen; LUQUE, Manuel; MEGRET, Patrice; VOß, Herbert. *pst-electricfield Electric field lines of charges*; v.0.13. [S.l.], 2010. Disponível em: <http://linorg.usp.br/CTAN/graphics/pstricks/contrib/pst-electricfield/pst-electricfield-docEN.pdf> – acesso em 27 set. 2018.

GRECO, Enio. Gurgel - aproveitando o vacilo. *Jornal Estado de Minas*, 2006. Disponível em: [http://estadodeminas.vrum.com.br/app/noticia/noticias/2006/09/05/interna\\_noticias,19929/gurgel-aproveitando-o-vacilo.shtml](http://estadodeminas.vrum.com.br/app/noticia/noticias/2006/09/05/interna_noticias,19929/gurgel-aproveitando-o-vacilo.shtml) – acesso em 13 dez. 2018.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física*. Rio de Janeiro: LTC, 1996. v. 2.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física*. Rio de Janeiro: LTC, 1996. v. 3.

HANKIN, Steve M.; DURÁN CABALLERO, Nelson Eduardo. Regulação da nanotecnologia no brasil e na união europeia. *DIÁLOGOS SETORIAIS UNIÃO EUROPEIA – BRASIL*, Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação, Brasília, Novembro 2014, p. 1–71, 2014.

HILTNER, Ken. *What else is pastoral?: renaissance literature and the environment*. Ithaca, Nova Iorque: Cornell University Press, 2011.

HOUAISS, Antônio. *Grande Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. 2001. CD-ROM.

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA. *Gráficos Climatológicos (1931-1960 e 1961-1990)*. 2018. Disponível em <http://www.inmet.gov.br/portal/index.php?r=clima/graficosclimaticos> – acesso em 27 set. 2018.

INTERGOVERNMENTAL PANEL ON CLIMATE CHANGE. *Special Report on Global Warming of 1.5°C (SR15)*. 2018. Disponível em: <http://www.ipcc.ch> – acesso em 20 nov. 2018.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. *Dicionário Básico de Filosofia*. 5. ed. Edição revista e ampliada. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2008.

JENG, Monwhea. *Can hot water freeze faster than cold water?* California: Department of Physics, University of California, 1998. Disponível em: [http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/hot\\_water.html](http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/hot_water.html) – acesso em 26 set. 2018.

HERRMANN JUNIOR, Paulo Sérgio de Paula; MATTOSO, Luiz Henrique Capparelli. A nanotecnologia no agronegócio, uma realidade na embrapa. *Anais do XXXVI Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola*, Bonito - MS, 2007. Disponível em <https://www.embrapa.br/busca-de-publicacoes/-/publicacao/30579/a-nanotecnologia-no-agronegocio-uma-realidade-na-embrapa> – acesso em 28 set. 2018.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. Oxford, Londres, Nova Iorque, Paris: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1960.

LANGLOIS, Cyril. *Example: Polarizing microscope*. 2010. Disponível em: <http://www.texample.net/tikz/examples/polarizing-microscope/>. Acesso em: 27 set. 2018.

LEA, Kathleen Marguerite; QUINTON, Anthony M.; QUINTON, Baron. Francis bacon, viscount saint alban. *Encyclopædia Britannica, Inc.*, 2018. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Francis-Bacon-Viscount-Saint-Alban>. Acesso em: 13 dez. 2018.

LI, Qilin; MAHENDRA, Shaily; LYON, Delina Y.; BRUNET, Lena; LIGA, Michael V.; LI, Dong; ALVAREZ, Pedro J. J. Antimicrobial nanomaterials for water disinfection and microbial control: Potential applications and implications. *Water Research*, n. 42, p. 4591–4602, 2008.

LOIOL, Mardônio L.; SOUZA, Francisco de. Estatísticas sobre irrigação no Brasil segundo o censo agropecuário 1995-1996. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, sciELO, v. 5, n. 1, p. 171 – 180, 04 2001. ISSN 1415-4366. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1415-43662001000100033&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1415-43662001000100033&nrm=iso). Acesso em: 20 nov. 2018.

LORENZ, Edward N. Predictability; does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?'. *American Association for the Advancement of Science, 139th Meeting*, 1972. Disponível em: [http://eaps4.mit.edu/research/Lorenz/Butterfly\\_1972.pdf](http://eaps4.mit.edu/research/Lorenz/Butterfly_1972.pdf). Acesso em: 14 dez. 2018.

MANUAL DO MUNDO COMUNICAÇÃO. *Como entortar raios de luz com açúcar*. 2015. Disponível em: <http://www.manualdomundo.com.br/2015/10/como-entortar-raios-de-luz-com-acucar/>. Acesso em: 20 nov. 2016.

MELO, Washington Luiz de Barros. *Irigador Solar: instruções de montagem e de funcionamento*. São Carlos, SP, 2016. Disponível em: <https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/151258/1/DOC58-2016-1.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2018.

MIALHE, Luiz Geraldo. *Máquinas agrícolas: ensaios & certificação*. Piracicaba - SP: Fundação de Estudos Agrários Luiz e Queiroz, 1936.

---

MIALHE, Luiz Geraldo. *Máquinas agrícolas para plantio*. Campinas - SP: Millennium Editora, 2012.

RODRIGO SARRUGE MOLINA, José Luís Sanfelice. A gênese da institucionalização do ensino agrícola no Brasil. *Educere & Educare: Revista da Educação*, v. 9, n. 7, p. 213–229, jan./jun. 2014.

MONTEIRO, Adriana. *Décadas de mudanças*. Globo Rural, 2015. Disponível em: [http://revistagloborural.globo.com/EditoraGlobo/componentes/article/edg\\_article\\_print/0,3916,383684-1641-1,00.html](http://revistagloborural.globo.com/EditoraGlobo/componentes/article/edg_article_print/0,3916,383684-1641-1,00.html). Acesso em: 13 dez. 2018.

MPEMBA, E B; OSBORNE, D G. Cool? *Physics Education*, v. 4, n. 3, p. 172–175, 1969. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0031-9120/4/i=3/a=312>. Acesso em: 20 nov. 2018.

NARLOCH, Leandro. *Guia politicamente incorreto do Brasil*. 2. ed. São Paulo: Leya, 2011.

NATIONAL NANOTECHNOLOGY INITIATIVE. 2018. Disponível em: <https://www.nano.gov/>. Acesso em: 13 dez. 2018.

NOGUEIRA, Ana Lúcia Figueiredo de Souza. *Uma adaptação curricular de Física para Ciências Agrárias*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: [http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat\\_NogueiraAL\\_1.pdf](http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_NogueiraAL_1.pdf); apresentação em slides disponível em <http://pt.slideshare.net/slic/uma-adapcao-curricular-de-fsica-para-ciencias-agrias>. Acesso em 20 nov. 2018.

NUSSENSVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica – v.1 (Mecânica)*. 4. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 2002.

OKUNO, Emico; CALDAS, Iberê L.; CHOW, Cecil. *Física para Ciências Biológicas e Biomédicas*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986.

ONLINE ETYMOLOGICAL DICTIONARY. *Physics (n.)*. 2015. Disponível em: <http://www.etymonline.com/word/physics>. Acesso em: 27 nov. 2015.

PIÇARRA, Susana; FIDALGO, Alexandra; FEDOROV, Aleksander; MARTINHO, José M. G.; S., Farinha José P. Smart polymer nanoparticles for high-performance water-borne coatings. *Langmuir*, v. 30, p. 12345–12353, 2014.

PIVETTA, Marcos. O lado esquisito da água. *Revista FAPESP*, edição 209, 2013. Disponível em: <http://revistapesquisa.fapesp.br/2013/07/12/o-lado-esquisito-da-agua/>. Acesso em: 25 set. 2018.

POLIZEL, Guadalupe Gonzalez. *O uso da radiação no controle microbiológico dos alimentos de origem animal*. Monografia do Curso de Especialização “Lato sensu” em Higiene e Inspeção de Produtos de Origem Animal e Vigilância Sanitária em Alimentos. São Paulo: [s.n.], 2006.

QUINA, Frank H. Nanotecnologia e o meio ambiente: perspectivas e riscos. *Química Nova*, v. 27, n. 6, p. 1028–1029, 2004.

RABELLO, Ladislau Marcelino. Condutividade elétrica do solo, tópicos e equipamentos. *Embrapa Instrumentação Agropecuária*, Embrapa, São Carlos, 2009.

RABINOWITCH, Eugene; GOVINDJEE, Govindjee. *Photosynthesis*. New York: Wiley, 1969.

ROCHA, M.N.; FUJIMOTO, T.G.; AZEVEDO, R.S.; MURAMATSU, M. O azul do céu e o vermelho do pôr-do-sol. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Sociedade Brasileira de Física, SciELO, v. 32, n. 3501, 2010. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v32n3/v32n3a13.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2018.

RODOVALHO, Fernanda L.; CAPISTRANO, Gustavo; GOMES, Juliano A.; SODRÉ, Fernando F.; CHAKER, Julaino A.; CAMPOS, Alex F. C.; BAKUZIS, Andris F.; SOUSA, Marcelo H. Elaboration of magneto-thermally recyclable nanosorbents for remote removal of toluene in contaminated water using magnetic hyperthermia. *Chemical Engineering Journal*, v. 302, p. 725–732, 2016.

SARAIVA, Kleiton Rocha; SOUZA, Francisco de. Estatísticas sobre irrigação nas regiões sul e sudeste do Brasil segundo o censo agropecuário 2005-2006. *IRRIGA - Brazilian Journal of Irrigation and Drainage*, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Botucatu - SP, v. 17, n. 2, p. 168–176, 04-06 2012. ISSN 1808-8546. Disponível em: <http://revistas.fca.unesp.br/index.php/irriga/article/view/175/268>. Acesso em: 20 nov. 2018.

SAVAGE, Nora; DIALLO, Mamadou S. Nanomaterials and water purification: opportunities and challenges. *Journal of Nanoparticle Research*, v. 7, p. 331–342, 2005.

SHABAN, Mohamed; HUSSEIN, Amin. Detection of heavy metal ions in water by paa/cnts nanosensor. *Journal of Chemica Acta*, v. 1, n. 1, p. 49–51, 2012. Disponível em: <http://www.jchemacta.com/index.php/jchemacta/article/view/35>. Acesso em: 13 dez. 2018.

---

SHIRATSUCHI, Luciano Shozo; BRANDÃO, Ziany Neiva; VICENTE, Luiz Eduardo; CASTRO VICTORIA, Daniel de; DUCATI, Jorge Ricardo; OLIVEIRA, Ronaldo Pereira de; FÁTIMA VILELA, Marina de. Sensoriamento remoto: conceitos básicos e aplicações na agricultura de precisão. In: C. BERNARDI, A. C. de; M. NAIME, J. de; RESENDE, A. V.; INAMASU, R. Y.; BASSOI, L. H. (Ed.). *Agricultura de precisão: resultados de um novo olhar*. Brasília: Embrapa, 2014. cap. 4, p. 58–73. Disponível em: <https://www.embrapa.br/instrumentacao/busca-de-publicacoes/-/publicacao/1002959/agricultura-de-precisao-resultados-de-um-novo-olhar>. Acesso em: 24 jul. 2018.

SILVA, Ennio Peres da. *Fontes renováveis de energia: produção de energia para um desenvolvimento sustentável*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

SILVER, Nate. *O sinal e o ruído* Tradução de: The signal and the noise. Tradutores: Ana Beatriz Rodrigues, Claudio Figueiredo: por que tantas previsões falham e outras não. 1. ed. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013.

SIMON, Pedro. *A diáspora do povo gaúcho*. Brasília: Senado Federal, 2009.

STUDENT. The probable error of a mean. *Biometrika*, v. 6, n. 1, p. 1–25, 1908.

TESTEZLAF, Roberto. *Irrigação por Pivô Central*. Faculdade de Engenharia Agrícola/UNICAMP, s.d. (Irrigação: Técnicas, Usos e Impactos). Notas de aula acessadas em 11 de julho de 2018. Disponível em: [https://www.agro.ufg.br/up/68/o/09\\_aula\\_Pivo.pdf](https://www.agro.ufg.br/up/68/o/09_aula_Pivo.pdf). Acesso em: 11 jul. 2018.

TITAN. *Uso de lastro*. 2018? Disponível em: <http://www.titanlat.com/pneus-agricolas/cuidando-pneu/uso-lastro/index.aspx>. Acesso em: 14 dez. 2018.

UVAROV, E. B.; CHAPMAN, D. R.; ISAACS, Alan. *Dicionário de Ciência*. Tradução, revisão e adaptação da versão de 1964 por Marieta da Silveira. Mem Martins (Portugal): Europa-America Pt, 1964.

VARELLA, Carlos Alberto Alves; KHOURY JUNIOR, Joseph Kalil. Estabilidade de tratores agrícolas de pneus. *Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro*, Departamento de Engenharia, Seropédica, Rio de Janeiro, 2008. Texto da disciplina IT 154 Motores e Tratores. Disponível em: [http://www.ufrj.br/institutos/it/deng/varella/Downloads/IT154\\_motores\\_e\\_tratores/Aulas/estabilidade%20de%20tratores%20agricolas.htm](http://www.ufrj.br/institutos/it/deng/varella/Downloads/IT154_motores_e_tratores/Aulas/estabilidade%20de%20tratores%20agricolas.htm). Acesso em: 21 nov. 2018.

VILELA, Diana; PARMAR, Jemish; ZENG, Yongfei; ZHAO, Yanli; SÁNCHEZ, Samuel. Graphene-based microbots for toxic heavy metal removal and recovery from water. *Nano Letters*, v. 16, p. 2860–2866, 2016.

WANG, S.; TANG, J. Radio frequency and microwaves alternative treatments for insect control in nuts. *Agricultural Engineering Journal*, v. 10, n. 3-4, p. 105–120, 2001.

YANG, Dong Jiang; ZHENG, Zhan Feng; ZHU, Huai Yong; LIU, Hong Wei; GAO, Xue Ping. Titanate nanofibers as intelligent absorbents for the removal of radioactive ions from water. *Advanced Materials*, v. 20, p. 2777–2781, 2008.

YU, Qian; YU, Lin; WANG, Yuanna; ZHANG, Qini; SUN, Ming; HUANG, Ying-min; LU, Yeyu; GE, Zaochuan. Effect of preparation methods on activation of catalysts  $\text{BaNi}_{0.2}\text{Mn}_{0.8}\text{Al}_{11}\text{O}_{19-\delta}$  for dimethyl ether combustion. *Chinese Journal of Chemical Engineering*, v. 16, p. 389–393, 2008.

# Índice remissivo

- área, 55
- átomos, 365
- água, 245
- alavanca, 139
- alcance, 361
- algarismos significativos, 47
- alqueire, 54
- altura de um som, 309
- Amazônia, 176
- aquecimento global, 373
- arco-íris, 340
- atmosfera, 338, 341
- átomos, 229
- biodigestor, 172
- biomassa, 176
- blindagem, 362
- braça, 54
- calor específico, 244
- calor latente, 245
- camada de ozônio, 358
- camada semirredutora, 362
- capítulos, 30
- carneiro hidráulico, 203
- centro de massa, 88, 109
- Climatologia, 373
- climatologia, 373
- climograma, 374
- CNEN, 361, 363
- combustível fóssil, 176
- Comissão Nacional de Energia Nuclear, 361, 363
- composição molecular, 358
- comprimento de onda, 356
- comprimento de onda de de Broglie, 356, 357
- concordância, 49
- conservação, 161
- conservação da energia, 161
- conservação de alimentos, 358
- constante de Planck, 356
- constante dielétrica, 275
- constante dos gases ideais, 229
- constante dos gases perfeitos, 229
- contaminação, 358
- contaminação radioativa, 354
- conversão de energia, 172
- conversão entre unidades, 55
- corpo rígido, 136, 140
- correia, 105
- cálculo diferencial e integral, 31, 109
- células fotovoltaicas, 355
- decibel, 314
- definição, 31
- demonstração, 31
- derivada, 31, 110
- desorganização, 250
- diagramas PV, 238
- dimensionalidade de propagação de ondas, 303
- direções de vibração e de propagação de ondas, 303

- discordância, 49  
discrepância, 49  
discreto, conjunto de partículas, 89  
dispersão Rayleigh, 338  
distância focal, 334  
dosagem, 363  
dose absorvida, 363  
dose equivalente, 364  
dosimetria, 361, 363, 364  
dualidade onda-partícula, 355
- eco, 314  
economia de energia elétrica, 376  
efeito estufa, 373  
eficiência, 237  
eficiência de um motor, 237  
eixo de rotação, 105  
eixo de rotação da Terra, 375  
elasticidade, 167  
energia, 161, 162, 226  
energia cinética, 229  
energia cinética rotacional, 164  
energia cinética translacional, 164  
energia elétrica, 176, 376  
energia eólica, 176  
energia interna, 226, 229  
energia mecânica, 170  
energia potencial, 166  
energia potencial elástica, 168  
energia potencial gravitacional, 166  
engrenagem, 104  
entropia, 241, 246, 250  
equação, 31  
equação de Bernoulli, 198  
equação de continuidade, 198  
equilíbrio, 136, 137, 140  
equilíbrio térmico, 221  
erro, 41  
escoamento, 206  
espectroscopia, 365  
espelho, 332  
espelho convexo, 334  
espelho côncavo, 334  
estações do ano, 375
- esterilização de sementes, 358  
exercícios, 30  
exposição, 363
- fator de qualidade, 364  
febre aftosa, 358  
feixe convergente, 334  
feixe divergente, 333  
feixe paralelo, 334  
figura, 31  
fluido ideal, 198  
fluidos reais, 205  
flutuador, 94  
fluxo, 94  
foco, 334  
fontes renováveis de energia, 176  
frequência angular, 357  
física, 34, 36  
fóton, 356, 362, 365
- gangorra, 139  
grandeza, 40  
grandeza física, 35  
gripe aviária, 358  
gripe suína, 358  
gráficos PV, 238  
gás ideal, 228
- harmônicos, 309  
hectare, 54  
hidrodinâmica, 197  
hidrostática, 186  
horário de Verão, 375
- imagem, 332  
índice de refração, 359  
integral, 31, 110  
intensidade sonora, 309  
irrigação, 102
- lançamento oblíquo, 99  
lastragem, 145  
lastreamento, 145  
Lei de Hooke, 167

---

Leis da Termodinâmica, 221, 225–227, 241, 243, 246  
luz, 355  
luz solar, 176  
légua, 54

macaco hidráulico, 195  
marés, 176  
medida, 40  
medição, 39, 40  
melhoramento genético, 358  
Meteorologia, 373  
meteorologia, 373  
microorganismos, 358  
microscopia eletrônica, 356  
mola, 167  
moléculas, 229, 358, 365  
momento de força, 137  
motor, 234, 237  
motor de Carnot, 241  
movimento circular uniforme, 93  
movimento linear uniforme, 90  
movimento retilíneo uniforme, 92  
movimento uniforme, 90  
mudança de estado, 245  
mutação, 358  
máquina, 234  
máquinas térmicas, 231, 234

notação científica, 48  
níveis de energia, 365  
número de onda, 357  
número de Reynolds, 206

objeto, 332  
ondas circulares, 307  
ondas esféricas, 307  
ondas planas, 307  
ondas transversais e longitudinais, 303  
ondas uni, bi e tridimensionais, 303  
organização deste livro, 30

padrão, 40  
partícula, 85, 229  
partículas, 356  
perda de carga, 207  
permissividade elétrica, 275  
persistência acústica, 314  
petróleo, 176  
pivô central de irrigação, 102  
polarização, 303  
polia, 104  
ponto imagem, 333  
ponto material, 85  
ponto objeto, 333  
ponto percentual, porcentagem, 42  
ponto triplo, 245  
ponto triplo da água, 245  
ponto tríplice, 245  
porcentagem, 41  
potência, 238  
pressão, 194, 198  
previsão do tempo, 373  
prisma, 332  
problemas, 30  
processos termodinâmicos, 231  
propagação de erros, 43  
proteção radiológica, 361

quanta, 356  
quantum, 356

rad, 364  
radiação, 354, 362, 364  
radiação corpuscular, 354, 356  
radiação eletromagnética, 355  
radiações ionizantes, 363  
reflexão, 332  
refração, 332, 359  
refrigerador, 234, 237  
rem, 364  
rendimento, 237  
rendimento de um refrigerador, 237  
resistência do ar, 100  
reverberação, 314  
rio, 94  
roda d'água, 172  
roda dentada, 104, 109

roldana, 104  
rotação, 137

Salmonella, 358  
secagem de sementes, 212  
semeadeira, 85, 86, 108, 109  
semeadora, 85, 86, 108  
seções, 30  
Sistema Internacional de Unidades - SI,  
50  
sistema óptico, 333  
solstício de verão, 376  
soluções dos exercícios, 30  
soma vetorial, 64

tabela, 31  
temperatura, 221, 229, 246, 359  
teorema, 31  
teorema trabalho-energia, 170  
texto complementar, 31, 80, 116, 153,  
182, 270, 346, 384  
timbre, 309  
tombamento de tratores, 144  
torque, 137  
trabalho, 162, 226  
translação, 136  
trator, 144  
turbulência, 206

unidade de medida, 40  
unidades de medida, 162  
usina eólica, 176

vazão, 94, 197  
velocidade, 198  
velocidade de fluxo, 94  
ventilação, 212  
ventos, 176  
vetor de onda, 357  
vetores, 64  
vibração, 358  
viscosidade, 206  
volume, 55



Este livro foi composto em UnB Pro e Liberation Serif,  
e impresso no sistema *offset*, sobre papel *offset* 75g/m<sup>2</sup>,  
com capa em papel-cartão supremo 250 g/m<sup>2</sup>.

# Física para Ciências Agrárias e Ambientais

O conceito de Ciências Agrárias e Ambientais inclui os estudos de vários cursos universitários, como Agronomia, Engenharia Florestal, Engenharia Agrícola e Ciências Ambientais. Os alunos desses cursos estudam Hidráulica, Máquinas Agrícolas, Agroclimatologia e Física dos Solos, entre outras disciplinas que dependem do entendimento de conceitos básicos de diversas áreas da Física. Para evitar que seus alunos tenham que cursar uma longa cadeia de disciplinas de Física pura, vários currículos de cursos de Ciências Agrárias e Ambientais condensam conceitos básicos de Física em disciplinas destinadas a apresentar a Física de maneira aplicada aos seus interesses. O problema é que os conceitos de Física úteis a essas ciências costumam estar espalhados em vários livros de Física 1, Física 2, Física 3, etc.; Mecânica, Teoria dos Fluidos, Eletromagnetismo, entre outros. Este livro supre essa necessidade ao apresentar conceitos de Física de forma direcionada a cursos de Ciências Agrárias e Ambientais. Esta obra é ainda um livro de Física básica, e não um livro de qualquer disciplina específica de Ciências Agrárias e Ambientais. No entanto, os conceitos são exemplificados em problemas típicos dessas ciências, de modo a permitir uma transição mais suave aos estudos das disciplinas mais específicas dessas áreas que fazem uso dos conceitos da Física.



EDITORA



UnB

ISBN 978-85-230-0957-1



9 788523 009571