

EDITORA



UnB

# Equações diferenciais ordinárias e séries de potências

Lucas Seco e Mauro Patrão



# **Equações diferenciais ordinárias e séries de potências**



**Universidade de Brasília**

**Reitora**  
**Vice-Reitor**

Márcia Abrahão Moura  
Enrique Huelva

EDITORA



**UnB**

**Diretora**

Germana Henriques Pereira

**Conselho editorial**

Germana Henriques Pereira  
Fernando César Lima Leite  
Beatriz Vargas Ramos Gonçalves de Rezende  
Carlos José Souza de Alvarenga  
Estevão Chaves de Rezende Martins  
Flávia Millena Biroli Tokarski  
Izabela Costa Brochado  
Jorge Madeira Nogueira  
Maria Lidia Bueno Fernandes  
Rafael Sanzio Araújo dos Anjos  
Verônica Moreira Amado



# Equações diferenciais ordinárias e séries de potências

Lucas Seco e Mauro Patrão



**Coordenação de produção editorial**  
**Preparação e revisão**  
**Diagramação**

**Equipe editorial**

Luciana Lins Camello Galvão  
Tiago de Aguiar Rodrigues  
Lucas Seco e Mauro Patrão

© 2018 Editora Universidade de Brasília

Direitos exclusivos para esta edição:  
Editora Universidade de Brasília  
SCS, quadra 2, bloco C, nº 78, edifício OK,  
2º andar, CEP 70302-907, Brasília, DF  
Telefone: (61) 3035-4200  
Site: [www.editora.unb.br](http://www.editora.unb.br)  
E-mail: [contatoeditora@unb.br](mailto:contatoeditora@unb.br)

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser armazenada ou reproduzida por qualquer meio sem a autorização por escrito da Editora.



Edital  
Livros Didáticos

Esta obra foi publicada com recursos provenientes do Edital DEG/UnB nº 13/2017.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília

---

S445

Seco, Lucas.

Equações diferenciais ordinárias e séries de potências / Lucas Seco e Mauro Patrão. – Brasília : Editora Universidade de Brasília, 2018.

354 p. : il. ; 23 cm. – (Série Ensino de Graduação)

ISBN 978-85-230-1016-4.

1. Equações diferenciais. 2. Séries de potências. 3. Transformada de Laplace. 4. Sistemas de equações diferenciais. I. Patrão, Mauro. II. Título.

CDU 517.91

---

# SUMÁRIO

<b>Apresentação</b>	<b>9</b>
<b>1 Equações diferenciais</b>	<b>13</b>
1.1 EDO separável . . . . .	25
1.2 EDO linear de 1ª ordem . . . . .	40
1.3 EDO linear de 2ª ordem . . . . .	49
1.4 Coeficientes constantes . . . . .	75
1.5 Coeficientes variáveis . . . . .	86
<b>2 Séries de potências</b>	<b>109</b>
2.1 Sequências . . . . .	113
2.2 Séries . . . . .	125
2.3 Séries de potências . . . . .	148
2.4 Testes de convergência . . . . .	155
2.5 Domínio e raio de convergência . . . . .	180
2.6 Derivada e integral . . . . .	189
2.7 Série de Taylor . . . . .	201
2.8 Soluções de EDOs por séries de potências . . . . .	212
<b>3 Ordem superior e sistemas</b>	<b>225</b>
3.1 Raízes características . . . . .	226
3.2 Coeficientes a determinar . . . . .	241
3.3 Transformada de Laplace . . . . .	248
3.4 Transformada inversa . . . . .	270
3.5 Funções definidas por partes . . . . .	285
3.6 Sistema de EDOs . . . . .	294

<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>313</b>
A.1	Regra de Cramer . . . . .	313
A.2	EDO linear de ordem superior . . . . .	316
A.3	Sequência monótonas . . . . .	331
A.4	Integral imprópria . . . . .	332
A.5	Exponencial complexa . . . . .	335
A.6	Derivada de séries de potências . . . . .	342
A.7	Soluções por séries de potências . . . . .	345
	<b>Referências</b>	<b>353</b>

# Agradecimentos

Agradecemos as sugestões dos colegas do MAT-UnB e dos estudantes do Cálculo 2 que utilizaram alguma das versões anteriores deste livro, o que permitiu uma considerável melhoria no conteúdo e na apresentação do texto.





# APRESENTAÇÃO

## PARA O ESTUDANTE

O Cálculo é a matemática do movimento. No primeiro curso de Cálculo, aprendemos que as quantidades que se movem são dadas por funções reais; os limites de funções fornecem as tendências do movimento dessas quantidades; as derivadas de funções fornecem as taxas de variação dessas quantidades; e a integral é a antiderivada: dada a taxa de variação de uma quantidade, sua integral é a quantidade original. Neste livro, vamos aprofundar o estudo do movimento, ampliando nossas técnicas de integração e nosso repertório de funções.

As equações que descrevem o movimento e, de maneira mais geral, taxas de variação, são denominadas *equações diferenciais ordinárias (EDOs)* e o fio condutor deste livro é um primeiro estudo sistemático desse tipo de equação. Os primeiros exemplos de EDOs do Capítulo 1 têm origem na famosa 2ª Lei de Newton ( $F = ma$ ). Por exemplo, na queda livre vertical sem atrito, a aceleração é constante e igual a  $-g$  e a velocidade pode ser obtida por integração direta, obtendo assim a conhecida velocidade do movimento uniformemente variado  $v(t) = v_0 - gt$ , onde  $v_0$  é a velocidade inicial. Já na queda livre com atrito, a aceleração depende da velocidade e não é possível obter essa velocidade por integração direta. Outro exemplo dinâmico é um sistema massa-mola, em que a força depende da posição e, novamente, não é possível obter essa posição por integração direta. Um exemplo estático é determinar a forma de um cabo suspenso sob seu próprio peso, conhecido como problema da catenária. Ao final do Capítulo 1, vamos estudar

EDOs mais complexas, por exemplo, as associadas à descrição dos orbitais do átomo de hidrogênio. Ao tentar resolvê-las, percebemos que as funções apresentadas num primeiro curso de Cálculo não são suficientes.

Assim, no Capítulo 2, introduzimos as denominadas *séries de potências* com o objetivo de obter funções necessárias para resolver outras EDOs. Essas novas funções, que surgem de aproximações por somas sucessivas de potências, têm propriedades muito semelhantes às dos polinômios, como a derivação e a integração termo a termo. Por outro lado, diferentemente dos polinômios, essas funções podem não estar definidas na reta toda. Na maior parte do Capítulo 2, vamos desenvolver ferramentas para determinar onde essas funções estão definidas, para, então, poder usá-las como soluções de EDOs.

Nos Capítulos 1 e 2, focamos em EDOs onde aparecem a primeira ou a segunda derivada. Já no Capítulo 3, desenvolvemos técnicas mais algébricas para resolver certos tipos de EDOs, como a que descreve o perfil de uma viga vibrando, onde aparecem as derivadas de terceira ordem, quarta ordem etc. Essas EDOs são denominadas *EDOs de ordem superior*. Também vamos aplicar essas técnicas para resolver certos tipos de *sistemas de EDOs*, como os que descrevem as correntes em circuitos elétricos acoplados.

## PARA O PROFESSOR

Neste livro, apresentamos uma introdução às EDOs na qual as séries de potências aparecem pela necessidade de resolver EDOs de coeficientes variáveis. O livro foi elaborado para o atual curso de Cálculo 2 da UnB, cuja nova ementa consiste numa introdução às EDOs e às séries de potências. O intuito dessa nova ementa, resultado da reforma dos Cálculos implementada em 2012, é aproveitar as sinergias que existem entre esses dois assuntos, que não costumam ser tratados no mesmo livro. Buscamos simplicidade e rigor, numa exposição autocontida que dá ênfase aos conceitos essenciais e, ao mesmo tempo, a demonstrações acessíveis. A seguir ilustramos esses princípios, apresentando algumas das contribuições introduzidas no livro.

Nas EDOs de 1ª ordem, decidimos focar apenas nas separáveis e nas lineares, que são os casos de maior aplicação e necessários para o desenvolvimento da teoria de ordem superior. As EDOs exatas, apesar de comumente abordadas em livros que tratam de EDOs, dependem do conceito de derivada parcial, sendo mais adequadas para um curso de Cálculo de várias variáveis. O restante do livro é dedicado à teoria das EDOs lineares, começando pelas EDOs de 2ª ordem, ainda no Capítulo 1. Nesse caso, partindo de um par de soluções fundamentais, obtemos a solução geral da homogênea, via fórmula de Abel, e a solução geral da não homogênea, via método da variação dos parâmetros. Essa abordagem não depende do teorema de existência e unicidade de PVI – que geralmente é enunciado sem demonstração em livros de EDOs – e também pode ser aplicada para ordem superior, o que é feito no Apêndice. A existência de um par de soluções fundamentais é obtida primeiro para coeficientes constantes por meio do operador de derivação. Essa abordagem permite obter as soluções fundamentais no caso de raízes características complexas sem fazer uso da exponencial complexa. Tal estratégia simplifica consideravelmente o entendimento, pois evita ter que lidar, nesse primeiro momento, com soluções a valores complexos.

No caso de coeficientes variáveis, primeiro procuramos soluções polinomiais no final do Capítulo 1, o que nos leva a equações de recorrência para os coeficientes do polinômio. Esse caminho nos leva a considerar soluções dadas por séries de potências, o que desenvolvemos em detalhes no Capítulo 2. Além de motivar as séries de potências, outra vantagem dessa abordagem é introduzirmos o quanto antes as equações de recorrência sem nos preocuparmos com questões bem mais sutis de convergência.

No Capítulo 3, consideramos equações de ordem superior e sistemas, focando no caso de coeficientes constantes. Primeiro retomamos o operador de derivação para resolver as EDOs homogêneas de ordem superior através das raízes características. Essa abordagem é usada para obter de forma rigorosa e natural o método dos coeficientes a determinar, o que em geral não é feito em livros de EDO. No tópico seguinte, transformada de Laplace, essa abordagem também nos permite justificar o método das frações parciais usado na obtenção transformada inversa. Ao introduzir a transformada, obtemos as transformadas das

funções elementares através das propriedades básicas da transformada. Essa abordagem permite desde o início exercitar essas propriedades, diferentemente de outros livros de EDO em que essas transformadas são obtidas diretamente da definição. A injetividade da transformada é demonstrada de forma rigorosa no caso de séries de potências, o que justifica, na maior parte dos casos, o uso da transformada inversa. Usamos a transformada de Laplace para resolver sistemas de EDOs com coeficientes constantes e concluimos com algumas observações sobre a exponencial de matrizes.

## SOFTWARE LIVRE

Esse livro foi elaborado por meio do  $\LaTeX$  no ambiente  $\TeX$ Studio, enquanto suas figuras foram elaboradas por meio do Inkscape, todos eles software livres.

Brasília, janeiro de 2018.

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma *Equação diferencial ordinária (EDO)* é uma equação cuja incógnita é uma função real e na equação aparecem também derivadas ordinárias dessa função incógnita. Os exemplos clássicos de equações diferenciais ordinárias têm origem na famosa 2ª Lei de Newton

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= mv'(t) \\ &= mx''(t) \end{aligned}$$

que é uma EDO quando a força é uma função da velocidade ou da posição, e a incógnita é a função velocidade  $v(t)$  ou a função posição  $x(t)$  de um movimento, como nos exemplos a seguir.

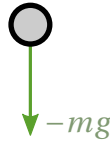
É importante frisar que, apesar de usualmente estudarmos as EDOs após um primeiro curso de Cálculo, elas surgiram simultaneamente com o Cálculo. Em outras palavras, uma das motivações para a criação do Cálculo foi formular EDOs e, em casos favoráveis, resolvê-las.

### Exemplos

1) Velocidade da queda livre sem atrito: numa queda livre vertical sem atrito, a única força que atua no corpo é a força peso, dada por

$$F = -mg$$

onde  $m$  é a massa do corpo, e  $g$  a aceleração da gravidade.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

$$mv'(t) = -mg$$

e, portanto,

$$v'(t) = -g$$

onde a incógnita é a função velocidade vertical  $v(t)$ . Uma vez que a força é constante, a função incógnita pode ser encontrada simplesmente integrando os dois lados da EDO

$$\begin{aligned} \int v'(t) dt &= \int -g dt \\ v(t) + A &= -gt + B \end{aligned}$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias de integração. Isolando  $v(t)$ , obtemos

$$v(t) = C - gt$$

onde  $C = B - A$  é uma constante arbitrária. Essas são as possíveis velocidades verticais da queda livre sem atrito.

O significado físico da constante arbitrária  $C$  pode ser obtido substituindo  $t = 0$  na solução geral

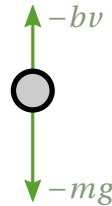
$$v(0) = C$$

Portanto,  $C$  é a velocidade inicial da queda e, para cada velocidade inicial, temos uma função velocidade da queda.

2) Velocidade da queda livre com atrito: numa queda livre vertical com atrito, além da força peso, também atua no corpo a força da resistência do ar. Para pequenas velocidades de queda, essa força é proporcional à velocidade, no sentido oposto

$$F_{ar} = -bv$$

onde o coeficiente de arraste  $b > 0$  depende da forma do corpo. Na figura abaixo o corpo está caindo, logo  $v < 0$  e, portanto,  $F_{ar} > 0$ .



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

$$mv'(t) = -mg - bv(t)$$

e, portanto,

$$v'(t) = -g - \frac{b}{m}v(t)$$

onde a incógnita é a função velocidade vertical  $v(t)$ , definida para  $t \geq 0$ , isto é, a partir do instante  $t = 0$  em que o corpo começa a queda livre e daí em diante.

Nesse caso a força não é constante e depende da própria função incógnita, por isso não é possível obter  $v(t)$  integrando os dois lados.

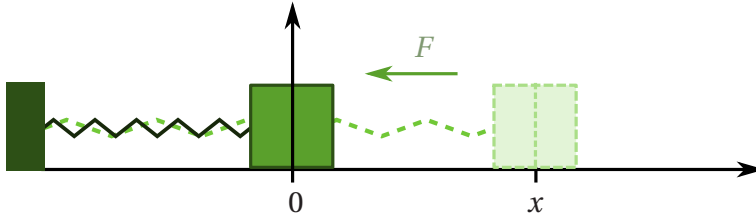
3) Posição do sistema massa-mola: pela Lei de Hooke, a força



da mola é uma função da posição, dada por

$$F = -kx$$

onde  $k$  é a constante de Hooke da mola, e  $x$  é a posição do bloco de massa  $m$ , medida em relação à posição natural da mola, em que ela não está nem esticada, nem comprimida.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

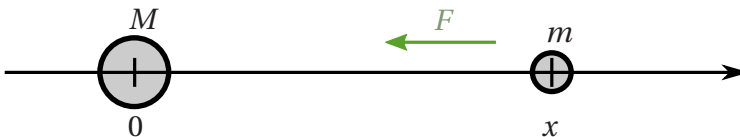
$$mx''(t) = -kx(t)$$

onde a incógnita é a função posição  $x(t)$ , definida para todos os instantes  $t \in \mathbb{R}$ .

4) Posição de um asteroide em rota de colisão com a Terra: pela Lei da Gravitação Universal, a força que a Terra exerce sobre o asteroide é dada por

$$F = -GMm \frac{1}{x^2}$$

onde  $x$  é a distância entre a Terra e o asteroide,  $G$  é a constante de gravitação universal,  $m$  é a massa do asteroide e  $M$  é a massa da Terra.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada por

$$mx''(t) = -GMm \frac{1}{x(t)^2}$$

onde a incógnita é a função distância  $x(t)$ , definida até o instante  $t$  em que o asteroide colide com a terra.

Apesar de sua origem no estudo do movimento, veremos que também é conveniente tratar as equações diferenciais do ponto de vista puramente matemático.

### Definição 1.1

Uma *solução* de uma EDO é uma função  $y(t)$  que satisfaz a EDO. O tipo mais simples de solução é a *solução constante*  $y(t) = c$ . No contexto do movimento, uma solução constante também é chamada de *solução de equilíbrio*, pois corresponde à ausência de movimento.

Assim como no estudo do movimento, onde queremos descrever todos os movimentos possíveis, também estamos interessados em determinar todas as soluções de uma dada EDO.

### Definição 1.2

A *solução geral* de uma EDO é o conjunto de todas as suas soluções. *Resolver* uma EDO é encontrar sua solução geral.

Quando resolvemos uma EDO, geralmente encontramos infinitas soluções. Muitas vezes queremos obter, dentre essas infinitas soluções, apenas as que satisfazem certas condições num instante inicial. Por exemplo, ao descrever a posição  $x(t)$  de um movimento, podemos querer saber quais, dentre os movimentos possíveis, têm posição inicial e

velocidade inicial dadas por

$$x(0) = x_0 \quad x'(0) = v_0$$

Esse tipo de condição em soluções de uma EDO é chamada de *condição ou valor inicial*.

Assim como nos métodos para resolver uma equação algébrica, os métodos para resolver uma EDO dependem de sua forma. A equação algébrica mais simples de se resolver é a linear, na qual as incógnitas aparecem apenas multiplicadas por constantes conhecidas, chamadas de coeficientes da equação, e em seguida somadas. Considere, por exemplo, as seguintes equações algébricas.

Linear	Não linear
$ax + by = c$ coeficientes: $a, b$	$xy = 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \text{etc.}$

Do mesmo modo, veremos que a EDO mais simples de se resolver é a *EDO linear*.

### Definição 1.3

Uma EDO é linear se as funções incógnitas e suas derivadas aparecem apenas multiplicadas por funções conhecidas, chamadas de coeficientes da EDO, e em seguida somadas.

Considere, por exemplo, as seguintes EDOs.

Linear	Não linear
$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$ coeficientes: $a(t), b(t)$	$y'(t)y(t) = 1, \quad y'(t)^2 + y(t)^2 = 1, \quad \text{etc.}$

**Definição 1.4**

Na EDO linear, o termo  $f(t)$  é, assim como os coeficientes, uma função conhecida chamada de *forçamento* ou de *termo não homogêneo*. Quando  $f(t) = 0$ , dizemos que a EDO é *homogênea*.

Observe que, quando uma EDO é não linear, não faz sentido falar de seus coeficientes nem de seu forçamento. Porém, sempre podemos falar da ordem de uma EDO.

**Definição 1.5**

A *ordem* de uma EDO é a maior ordem das derivadas da função incógnita que aparecem na equação.

Por exemplo, uma EDO linear de ordem dois, ou segunda ordem, tem a forma

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

com coeficientes dados por funções conhecidas  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  e forçamento conhecido  $f(t)$ . Vamos voltar aos exemplos anteriores para explorar todas essas definições.

**Exemplos**

1) Velocidade da queda livre sem atrito:

$$mv'(t) = -mg$$

É uma EDO de 1ª ordem linear e não homogênea. O coeficiente de  $v'(t)$  é  $m$ , o coeficiente de  $v(t)$  é 0, o forçamento é  $-mg$ . Obtivemos anteriormente a solução geral dessa equação, dada por

$$v(t) = C - gt$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante arbitrária. Portanto, a solução geral consiste de infinitas soluções.

Impondo a condição inicial

$$v(0) = v_0$$

e usando a solução geral, temos que

$$C = v_0$$

logo

$$v(t) = v_0 - gt$$

é a única solução que satisfaz a condição inicial dada.

2) Velocidade da queda livre com atrito:

$$v'(t) = -g - av(t)$$

onde  $a = b/m$  é o arraste por unidade de massa. Essa é uma EDO de 1ª ordem linear e não homogênea, pois pode ser colocada na forma

$$v'(t) + av(t) = -g$$

O coeficiente de  $v'(t)$  é 1, o coeficiente de  $v(t)$  é  $a$  e o forçamento é  $-g$ .

Podemos procurar soluções de equilíbrio fazendo  $v(t) = v_{eq}$  constante e substituindo na EDO

$$(v_{eq})' + av_{eq} = -g$$

$$0 + av_{eq} = -g$$

$$v_{eq} = -\frac{g}{a}$$

Portanto, temos apenas uma solução de equilíbrio

$$v(t) = -\frac{g}{a} = -\frac{mg}{b}$$

Essa é a chamada velocidade terminal, na qual a força de atrito se equilibra com a força peso: se o corpo começar a cair nessa velocidade, se manterá nessa velocidade o tempo todo. Como obter as outras soluções?

### 3) Posição do sistema massa-mola:

$$mx''(t) = -kx(t)$$

É uma EDO de 2ª ordem linear e homogênea, pois pode ser colocada na forma

$$mx''(t) + kx(t) = 0$$

O coeficiente de  $x''(t)$  é  $m$ , o coeficiente de  $x'(t)$  é 0, o coeficiente de  $x(t)$  é  $k$ , e o forçamento é 0.

Podemos procurar soluções de equilíbrio fazendo  $x(t) = x_{eq}$  constante e substituindo na EDO

$$\begin{aligned} m(x_{eq})'' + kx_{eq} &= 0 \\ 0 + kx_{eq} &= 0 \\ x_{eq} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, temos apenas uma solução de equilíbrio  $x_{eq}(t) = 0$ . Essa é a chamada solução trivial e corresponde ao movimento em que a massa fica parada na posição natural da mola. Como obter as outras soluções?

Se  $m = k = 1$ , a EDO fica

$$x''(t) + x(t) = 0$$

Temos que  $x_1(t) = \cos(t)$  e  $x_2(t) = \sin(t)$  são soluções dessa EDO, uma vez que

$$x_1''(t) + x_1(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0$$

$$x_2''(t) + x_2(t) = -\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(t) = 0$$

Mais adiante vamos mostrar que a solução geral dessa EDO é

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ &= c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  são duas constantes arbitrárias.

Quais dessas soluções satisfazem as seguintes condições iniciais?

$$x(0) = x_0 \quad x'(0) = v_0$$

Uma vez que que

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t) \\ x'(t) &= -c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t) \end{aligned}$$

substituindo  $t = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 \\ v_0 &= c_2 \end{aligned}$$

Logo,

$$x(t) = x_0 \cos(t) + v_0 \operatorname{sen}(t)$$

é a única solução que satisfaz as condições iniciais dadas.

#### 4) Posição de um asteroide em rota de colisão com a Terra:

$$mx''(t) = -GMm \frac{1}{x(t)^2}$$

É uma EDO 2ª ordem não linear, pois não pode ser colocada na forma linear.

Podemos procurar soluções de equilíbrio fazendo  $x(t) =$

$x_{eq}$  constante e substituindo na EDO

$$m(x_{eq})'' = -GMm \frac{1}{(x_{eq})^2}$$

$$0 = -GMm \frac{1}{(x_{eq})^2}$$

Portanto, essa EDO não possui solução de equilíbrio. Como procurar outras soluções?

Se  $m = M = G = 1$ , a EDO fica

$$x''(t) = -\frac{1}{x(t)^2}$$

Podemos verificar que

$$x(t) = \left( \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \right)^{\frac{2}{3}}$$

é solução dessa EDO, uma vez que

$$\begin{aligned} x''(t) &= \left( \left( \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \right)^{\frac{2}{3}} \right)'' \\ &= \left( \frac{2}{3} \left( \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \right)^{-\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt{2}} \right)' \\ &= \sqrt{2} \left( \left( \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \right)^{-\frac{1}{3}} \right)' \\ &= \sqrt{2} \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \right)^{-\frac{4}{3}} \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \\ &= - \left( \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \right)^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$



e que

$$-\frac{1}{x(t)^2} = -\frac{1}{\left(\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t + 1\right)^{\frac{2}{3}}\right)^2} = -\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t + 1\right)^{-\frac{4}{3}}$$

A solução geral desse problema envolve certas *funções especiais* e está fora do escopo do presente texto.

Veremos que EDOs têm aplicações fora da Física, sendo uma das principais ferramentas para se estudar as mudanças de quantidades que variam em função de outras quantidades. Veremos também que fenômenos diferentes podem ser modelados pela mesma EDO. Assim, resolvendo a EDO matematicamente, teremos resolvido simultaneamente todos os fenômenos modelados por ela.

### Notação

Muitas vezes quando estiver implícito que a variável independente é  $t$ , para simplificar a EDO, omitimos  $t$  da função incógnitas escrevendo  $y, y', y'', \dots$ , no lugar de  $y(t), y'(t), y''(t), \dots$ . Por exemplo, a EDO

$$my''(t) = -GMm \frac{1}{y(t)^2}$$

fica

$$my'' = -GMm \frac{1}{y^2}$$

É importante lembrar que, nessa notação, tanto  $y$  quanto  $y'$  e  $y''$  são funções de  $t$ .

Geralmente, a obtenção da solução geral de EDOs é uma tarefa bas-

tante difícil, de modo que nos restringiremos a alguns casos relevantes, iniciando com as EDOS de 1ª ordem. Primeiro estudaremos dois tipos de EDOs de 1ª ordem que podemos resolver com técnicas vistas num primeiro curso de Cálculo: as separáveis e as lineares. Em seguida estudaremos as EDOs lineares de 2ª ordem, para as quais as técnicas vistas num primeiro curso de Cálculo não são suficientes.

## 1.1 EDO SEPARÁVEL

Uma EDO é separável quando é de 1ª ordem e pode ser escrita na seguinte forma

$$y'(t) = F(t)G(y(t))$$

onde  $F(t)$  e  $G(y)$  são funções reais, respectivamente, de  $t$  e de  $y$ . Na notação em que omitimos a variável independente  $t$  da função incógnita, a EDO separável fica na forma

$$y' = F(t)G(y)$$

onde no lado direito  $t$  e  $y$  estão separadas num produto de duas funções conhecidas.

### Exemplos

1) A EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = 0$$

é separável, pois pode ser escrita como

$$y'(t) = t^3 y(t)^2$$

onde  $F(t) = t^3$  e  $G(y) = y^2$ .

2) A EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^3$$

é separável, pois escrevendo-a na forma

$$y' - t^3 y^2 = t^3$$

vemos que ela pode ser escrita como

$$y' = t^3(1 + y^2)$$

que é separável com  $F(t) = t^3$  e  $G(y) = 1 + y^2$ .

### 3) A EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^2$$

não é separável, pois o lado direito de

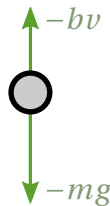
$$y' = t^2(1 + t y^2)$$

não pode ser escrita como um produto da forma  $F(t)G(y)$ .

4) Velocidade da queda livre com atrito: numa queda livre vertical com atrito, além da força peso, também atua no corpo a força da resistência do ar. Para pequenas velocidades de queda, essa força é proporcional à velocidade, no sentido oposto

$$F_{ar} = -bv$$

onde o coeficiente de arraste  $b > 0$  depende da forma do corpo. Na figura abaixo o corpo está caindo, logo  $v < 0$  e, portanto,  $F_{ar} > 0$ .



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

$$mv'(t) = -mg - bv(t)$$

e, portanto,

$$v'(t) = -g - av(t)$$

onde  $a = \frac{b}{m}$  e a incógnita é a função velocidade vertical  $v(t)$ , definida para  $t \geq 0$ , isto é, a partir do instante  $t = 0$  em que o corpo começa a queda livre e daí em diante.

Escrevendo a EDO na forma

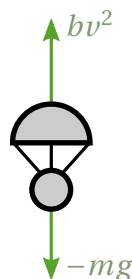
$$v' = -g - av$$

vemos que ela é separável com  $F(t) = 1$ ,  $G(v) = -g - av$ .

5) Velocidade da queda livre de um paraquedas: numa queda livre vertical com atrito, além da força peso também atua no corpo a força da resistência do ar. Para grandes velocidades de queda, a força de resistência do ar é proporcional a uma potência da velocidade, no sentido oposto da queda. Por exemplo

$$F_{ar} = bv^2$$

onde o coeficiente de arraste  $b > 0$  depende da forma do paraquedas. Vamos considerar apenas a queda, na qual sempre teremos  $F_{ar} > 0$ .



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO não linear

$$mv'(t) = -mg + bv^2(t)$$

e, portanto,

$$v'(t) = av^2(t) - g$$

onde  $a = \frac{b}{m}$  é arraste por unidade de massa.

Escrevendo a EDO na forma

$$v' = av^2 - g$$

vemos que ela é separável com  $F(t) = 1$ ,  $G(v) = av^2 - g$ .

Se  $F(t)$  não é identicamente nula, é fácil ver que as soluções constantes da EDO separável

$$y'(t) = F(t)G(y(t))$$

são da forma

$$y(t) = c \quad \text{onde} \quad G(c) = 0$$

isto é,  $c \in \mathbb{R}$  é uma raiz de  $G$ . A solução geral de uma EDO separável é obtida da seguinte maneira.

### Passos

**1) Soluções constantes:** Encontrar as raízes de

$$G(c) = 0$$

e considerar as soluções constantes  $y(t) = c$  correspondentes. No contexto do movimento, essas são as soluções de **equilíbrio**.

**2) Separar:** Colocar a EDO na forma

$$\frac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t)$$

denominada *forma separada*

**3) Integrar:** Integrando a equação acima

$$\int \frac{y'(t)}{G(y(t))} dt = \int F(t) dt$$

que, pela substituição

$$y = y(t), \quad dy = y'(t) dt$$

pode ser escrita como

$$\left( \int \frac{1}{G(y)} dy \right)_{y=y(t)} = \int F(t) dt$$

**4) Isolar:** Após resolver as integrais no passo anterior, isolar  $y(t)$  na equação acima.

Vamos aplicar os passos acima para obter a solução geral das EDOs separáveis vistas anteriormente.

### Exemplos

1) Vimos que a EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = 0$$

é separável, pois pode ser colocada na forma

$$y' = t^3 y^2$$

**Equilíbrios:** Encontrando as raízes de

$$y^2 = 0 \iff y = 0$$

Obtemos a solução de equilíbrio

$$y(t) = 0$$

**Separar:** Pelo que vimos acima, essa EDO pode ser separada

$$\frac{1}{y^2} y' = t^3$$

**Integrar:** Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{y(t)^2} y'(t) dt = \int t^3 dt$$

substituindo  $y = y(t)$ ,  $dy = y'(t) dt$

$$\left( \int \frac{1}{y^2} dy \right)_{y=y(t)} = \int t^3 dt$$

onde

$$\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} + A$$

e

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + B$$

**Isolar:** Obtemos a equação

$$-\frac{1}{y} = \frac{t^4}{4} + C$$

onde  $C = B - A$  é uma constante arbitrária. Essa equação algébrica é equivalente a

$$\frac{1}{y} = -\frac{t^4 + 4C}{4}$$

de modo que podemos isolar  $y = y(t)$  e obter

$$y(t) = -\frac{4}{t^4 + D}$$

onde  $D = 4C$  é uma constante arbitrária. A solução geral da EDO é dada pela expressão acima e pela solução de equilíbrio  $y(t) = 0$ .

2) Vimos que a EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^3$$

é separável, pois pode ser colocada na forma

$$y' = t^3(1 + y^2)$$

**Equilíbrios:** Encontrando as raízes de

$$1 + y^2 = 0$$

não obtemos nenhuma raiz real. Portanto, não existe solução de equilíbrio.

**Separar:** Pelo que vimos acima, essa EDO pode ser colocada na forma separada

$$\frac{1}{1 + y^2} y' = t^3$$



**Integrar:** Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{1+y(t)^2} y'(t) dt = \int t^3 dt$$

temos, pela substituição  $y = y(t)$ , que ela é equivalente a

$$\left( \int \frac{1}{1+y^2} dy \right)_{y=y(t)} = \int t^3 dt$$

onde

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \operatorname{atg}(y) + A$$

e

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + B$$

**Isolar:** Obtemos a equação

$$\operatorname{atg}(y) = \frac{t^4}{4} + C$$

onde  $C = B - A$  é uma constante arbitrária. Podemos isolar  $y = y(t)$  nessa equação algébrica aplicando a função tangente em ambos os lados, de modo que

$$y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t^4}{4} + C\right)$$

A solução geral da EDO é dada pela expressão acima, uma vez que não existem soluções de equilíbrio.

**3)** Vimos que a EDO

$$v' = -g - av$$

é separável.

**Equilíbrios:** Encontrando as raízes

$$-g - av = 0 \iff v = -g/a$$

**Separar:** Pelo que vimos acima, essa EDO pode ser separada

$$\frac{1}{-g - av} v' = 1$$

**Integrar:** Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{-g - av(t)} v'(t) dt = \int 1 dt$$

substituindo  $u = -g - av(t)$ ,  $du = -av'(t)dt$

$$\left( \int \frac{1}{u - a} du \right)_{v=v(t)} = \int 1 dt$$

onde

$$\left( \int \frac{1}{u - a} du \right)_{v=v(t)} = \frac{1}{-a} \log |-g - av(t)| + A$$

e

$$\int 1 dt = t + B$$

**Isolar:** Obtemos a equação

$$\log |-g - av(t)| = -at + C$$

onde  $C = -a(B - A)$  é uma constante arbitrária. Essa equação algébrica é equivalente a

$$\begin{aligned} |-g - av(t)| &= e^{-at+C} \\ &= e^C e^{-at} \\ &= D e^{-at} \end{aligned}$$

onde  $D = e^C$  é uma constante positiva. Tirando o módulo do lado esquerdo, temos que

$$-g - av(t) = E e^{-at}$$

onde  $E = \pm D$  é uma constante não nula. Se  $v(0) = v_0$ , segue-se que

$$-g - av_0 = E$$

Assim

$$v(t) = -\frac{g}{a} + \left(\frac{g}{a} + v_0\right)e^{-at}$$

A solução geral da EDO é dada pela expressão acima, pois a solução de equilíbrio é obtida quando  $v_0 = -g/a$ .

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{g}{a} + \left(\frac{g}{a} + v_0\right)e^{-at} = -\frac{g}{a}$$

de modo que, a longo prazo, qualquer velocidade de queda do paraquedas tende à velocidade de equilíbrio.

Apresentamos a seguir uma aplicação importante das equações separáveis.

## CATENÁRIA

Considere um cabo suspenso preso a duas extremidades, como, por exemplo, um cabo de energia preso a duas torres de transmissão ou um colar apoiado em duas extremidades.



Vamos mostrar que o cabo suspenso possui o formato de uma *Catenária*, que é uma curva dada por um pedaço do gráfico da função *cosseeno hiperbólico*

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Não é difícil verificar que sua derivada é a função *seno hiperbólico*

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

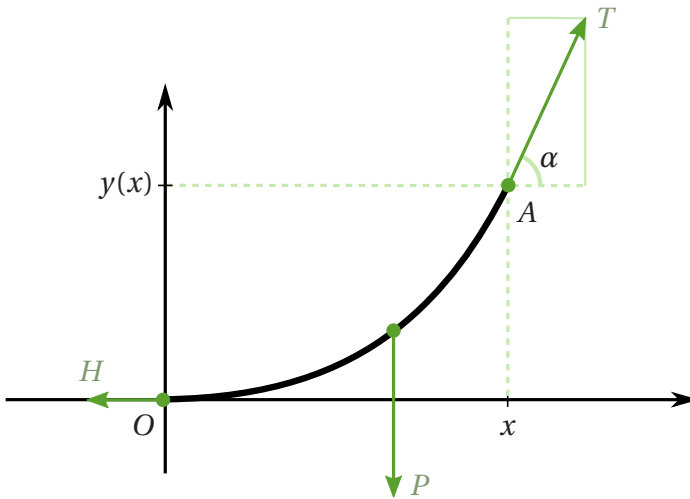
de modo que

$$\cosh'(t) = \sinh(t)$$

Também não é difícil verificar que seno e cosseeno hiperbólicos satisfazem a equação da hipérbole unitária, de modo que

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

Para determinar o formato do cabo suspenso, vamos proceder à análise do equilíbrio estático de alguns dos seus pedaços. Para isso, denote por  $O$  o ponto mais baixo do cabo suspenso e coloque a origem do nosso sistema de coordenadas sobre o ponto  $O$ . Dado um ponto  $A$  qualquer sobre o cabo suspenso, vamos analisar o equilíbrio estático do trecho  $OA$ .



As forças que atuam nas extremidades desse trecho são as de tração, de modo que elas têm direção tangente ao próprio cabo suspenso. Desse modo, a força na extremidade  $O$  do trecho é horizontal e tem módulo igual a  $H$ , enquanto a força na extremidade  $A$  do trecho forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal e tem módulo igual a  $T$ , como ilustrado pela figura acima. Além das forças nas extremidades, também atua sobre esse trecho sua força peso, que é vertical e tem módulo igual a  $P$ . As equações de equilíbrio para os módulos das coordenadas verticais e horizontais das forças envolvidas são dadas por

$$T \operatorname{sen}(\alpha) = P$$

$$T \operatorname{cos}(\alpha) = H$$

Dividindo uma equação pela outra, obtemos a seguinte equação de equilíbrio

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{P}{H}$$

Considerando que a densidade linear do cabo é constante e igual a  $\rho$ , temos que o módulo da força peso do trecho  $OA$  é dado por

$$P = g\rho L$$

onde  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade e  $L$  é o comprimento do trecho  $OA$ . Se o formato do cabo é descrito pelo gráfico de uma função  $y$

e se  $x$  é a coordenada horizontal do ponto  $A$ , temos que sua coordenada vertical é dada por  $y(x)$ , que

$$\operatorname{tg}(\alpha) = y'(x)$$

e que

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

Substituindo essas informações na equação de equilíbrio acima, temos que

$$y'(x) = \frac{g\rho}{H} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

Derivando essa equação, obtemos a seguinte EDO

$$y''(x) = \frac{g\rho}{H} \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Fazendo  $z(x) = y'(x)$  e substituindo na EDO acima, obtemos

$$z'(x) = \frac{g\rho}{H} \sqrt{1 + z(x)^2}$$

que é uma EDO separável. Vamos então aplicar os passos para obter a solução  $z(x)$  que satisfaz a condição inicial

$$z(0) = y'(0) = 0$$

e dela obter o formato  $y(x)$  do cabo suspenso.

### Passos

**1) Soluções constantes:** Encontrando as raízes de

$$\sqrt{1 + z^2} = 0 \iff 1 + z^2 = 0$$

não obtemos nenhuma raiz real, portanto, nenhuma solução constante.

**2) Separar:** Essa EDO pode ser colocada na forma separada

$$\frac{1}{\sqrt{1+z(x)^2}} z'(x) = \frac{g\rho}{H}$$

**3) Integrar:** Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z(x)^2}} z'(x) dx = \int \frac{g\rho}{H} dx$$

temos, pela substituição  $z = z(x)$ , que ela é equivalente a

$$\left( \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz \right)_{z=z(x)} = \int \frac{g\rho}{H} dx$$

onde

$$\int \frac{g\rho}{H} dx = \frac{g\rho}{H} x + A$$

A determinação da integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz$$

se dá através da substituição trigonométrica hiperbólica

$$z = \sinh(t)$$

de modo que

$$dz = \cosh(t) dt$$

e que

$$1+z^2 = 1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$$

uma vez que

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz &= \int \frac{1}{\cosh(t)} \cosh(t) dt \\ &= \int 1 dt \\ &= t + B \end{aligned}$$

4) **Isolar:** Voltando à equação original, temos que

$$t + B = \frac{g\rho}{H}x + A$$

Quando  $x = 0$ , temos que  $z = z(x) = y'(x) = 0$ , de modo que  $t = \operatorname{asinh}(z) = 0$ , de modo que  $B = A$ . Logo

$$t = \frac{g\rho}{H}x$$

e aplicando o seno hiperbólico nos dois lados, temos que

$$y'(x) = z = \sinh(t) = \sinh\left(\frac{g\rho}{H}x\right)$$

Integrando essa equação e usando que  $\cosh' = \sinh$ , temos que

$$y(x) = \frac{H}{g\rho} \cosh\left(\frac{g\rho}{H}x\right) + C$$

Usando que  $y(0) = 0$  e que  $\cosh(0) = 1$ , segue-se que

$$0 = y(0) = \frac{H}{g\rho} \cosh(0) + C$$

de modo que

$$C = -\frac{H}{g\rho}$$



Isso mostra que

$$y(x) = \frac{H}{g\rho} \left( \cosh\left(\frac{g\rho}{H}x\right) - 1 \right)$$

que é a equação da Catenária.

## 1.2 EDO LINEAR DE 1ª ORDEM

Uma EDO é linear de 1ª ordem quando ela pode ser escrita na seguinte forma

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

onde  $a_1(t)$  não é identicamente nulo,  $a_1(t), a_0(t)$  são os coeficientes da EDO,  $f(t)$  é o forçamento ou termo não homogêneo da EDO.

### Exemplos

1) Velocidade da queda livre com atrito:

$$mv'(t) = -mg - bv(t)$$

é uma EDO de 1ª ordem linear não homogênea, pois pode ser colocada na forma

$$mv'(t) + bv(t) = -mg$$

O coeficiente de  $v'(t)$  é  $m$ , o coeficiente de  $v(t)$  é  $b$  e o forçamento é  $-mg$ . Já obtivemos a solução de equilíbrio

$$v(t) = -\frac{mg}{b}$$

Como obter as outras soluções?

2) Velocidade da queda livre de um paraquedas:

$$mv'(t) = -mg + bv^2(t)$$

é uma EDO de 1ª ordem não linear devido ao termo  $v^2(t)$ .

Uma EDO linear de 1ª ordem e sua *homôgenea associada* são dadas por

$$a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

$$a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

Para encontrar sua solução geral, dividimos por  $a_1(t)$  para colocar as equações na denominada *forma normal*

$$y' + p(t)y = g(t)$$

$$y' + p(t)y = 0$$

onde

$$p(t) = \frac{a_0(t)}{a_1(t)}$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{a_1(t)}$$

estão definidas para todo  $t$  tal que  $a_1(t) \neq 0$ .

### Proposição 1.6

A solução geral da EDO linear

$$y' + p(t)y = g(t)$$

é dada por

$$y(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

onde

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)} dt$$

e

$$\int p(t) dt = P(t) + C$$

### Prova:

Multiplicando a EDO não homogênea pelo denominador *fator integrante*  $e^{P(t)}$ , temos que

$$e^{P(t)} y'(t) + p(t)e^{P(t)} y(t) = g(t)e^{P(t)}$$

Utilizando a regra da cadeia, a regra da derivada do produto e a equação acima, é fácil verificar que

$$(e^{P(t)} y(t))' = g(t)e^{P(t)}$$

Assim, agora podemos integrar a equação e obter que

$$e^{P(t)} y(t) = \int g(t)e^{P(t)} dt$$

Isolando  $y(t)$ , segue-se que

$$y(t) = \left( \int g(t)e^{P(t)} dt \right) e^{-P(t)}$$

de modo que

$$y(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

onde

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)} dt$$

■

No caso da EDO homogênea, a solução geral é dada pelo seguinte resultado.

### Proposição 1.7

A solução geral da EDO homogênea

$$y' + p(t)y = 0$$

é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-P(t)}$$

onde  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

### Prova:

Basta aplicar a solução geral da não homogênea, observando que  $g(t) = 0$ , de modo que  $c(t) = c_1$  é uma constante. ■

### Exemplos

1) A EDO

$$y'(t) - 2ty(t) = 0$$

é linear homogênea, sendo igual à sua homogênea associada. Temos que  $p(t) = -2t$ , de modo que

$$\int p(t) dt = \int -2t dt = -t^2 + C$$

Segue-se que  $P(t) = -t^2$ , de modo que a solução geral dessa

EDO é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-P(t)} = c_1 e^{t^2}$$

onde  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

## 2) A EDO

$$t y'(t) - y(t) = t^2$$

é linear não homogênea e sua homogênea associada é dada por

$$t y'(t) - y(t) = 0$$

Para  $t > 0$ , essa EDO não homogênea pode ser escrita na sua forma normal

$$y'(t) - \frac{1}{t} y(t) = t$$

e sua homogênea associada também

$$y'(t) - \frac{1}{t} y(t) = 0$$

Temos que  $p(t) = -\frac{1}{t}$ , de modo que

$$\int p(t) dt = \int -\frac{1}{t} dt = -\log(t) + C$$

Segue-se que  $P(t) = -\log(t)$ , de modo que a solução geral da homogênea é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-P(t)} = c_1 e^{\log(t)} = c_1 t$$

onde  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Como  $g(t) = t$ , segue-se que

$$\begin{aligned} c(t) &= \int g(t) e^{P(t)} dt \\ &= \int t e^{\log(t^{-1})} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int t t^{-1} dt \\
 &= \int 1 dt \\
 &= t + c_1
 \end{aligned}$$

de modo que a solução geral da não homogênea é dada por

$$\begin{aligned}
 y(t) &= c(t)e^{-P(t)} \\
 &= (t + c_1)e^{\log(t)} \\
 &= (t + c_1)t
 \end{aligned}$$

onde  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

### 3) Velocidade da queda livre com atrito: Já vimos que

$$m v'(t) + b v(t) = -mg$$

é linear de 1ª ordem. Para obter sua solução geral, primeiro dividimos por  $m$  para obter sua forma normal

$$v'(t) + a v(t) = -g$$

onde  $p(t) = a = b/m$ , de modo que

$$\begin{aligned}
 \int p(t) dt &= \int a dt \\
 &= at + C
 \end{aligned}$$

Segue-se que  $P(t) = at$ , logo a solução geral é

$$v(t) = c(t)e^{-at}$$

onde

$$c(t) = \int -g e^{at} dt$$

$$= -g \frac{e^{at}}{a} + c_1$$

e, portanto

$$\begin{aligned} v(t) &= \left( -g \frac{e^{at}}{a} + c_1 \right) e^{-at} \\ &= -\frac{g}{a} + c_1 e^{-at} \end{aligned}$$

é a solução geral da queda livre com atrito.

Apresentamos a seguir, para as equações lineares de 1ª ordem, um conceito fundamental ligado às aplicações.

## PROBLEMA DE VALOR INICIAL DE 1ª ORDEM

### Exemplo

Vimos que a solução da equação da queda livre com atrito

$$mv'(t) + bv(t) = -mg$$

é dada por

$$v(t) = -\frac{g}{a} + c_1 e^{-at}$$

A solução com velocidade inicial dada por

$$v(0) = v_0$$

é obtida da solução geral fazendo  $t = 0$  de modo que

$$-\frac{g}{a} + c_1 = v_0 \iff c_1 = v_0 + \frac{g}{a}$$

Assim, apenas a solução

$$v(t) = -\frac{g}{a} + \left(v_0 + \frac{g}{a}\right)e^{-at}$$

satisfaz essa condição inicial.

Temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{g}{a}$$

E, portanto, a longo prazo e independentemente da velocidade inicial, a velocidade da queda livre com atrito sempre tende à velocidade de equilíbrio  $-g/a$ , conhecida como velocidade terminal.

Também podemos comparar a velocidade da queda livre com e sem atrito em cada instante  $t$ , mantendo  $t$  fixo e fazendo o coeficiente de arraste  $a$  tender a zero

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} v(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} -\frac{g}{a} + \left(v_0 + \frac{g}{a}\right)e^{-at} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} v_0 e^{-at} + \frac{g}{a}(e^{-at} - 1) \\ &= v_0 + g \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-at} - 1}{a} \\ &= v_0 - gt \end{aligned}$$

onde usamos L'Hospital no último limite, que é uma indeterminação do tipo  $0/0$ , lembrando que devemos derivar em relação à  $a$ , uma vez que estamos tomando o limite quando  $a$  tende a zero. Segue-se que, no limite quando o coeficiente de arraste  $a$  tende a zero, a velocidade da queda livre com atrito coincide com a velocidade da queda livre sem atrito.

No exemplo anterior vimos que a solução geral de uma EDO consiste de infinitas soluções, mas que apenas uma única solução satisfaz o valor inicial dado. O problema de encontrar a solução de uma EDO que satisfaz um valor inicial é conhecido como *Problema de Valor de Inicial*



(PVI).

O próximo resultado mostra que um PVI para uma EDO linear de 1ª ordem sempre possui uma única solução.

### Proposição 1.8

Seja  $y_0$  um valor dado. Então o PVI linear

$$\begin{cases} y' + p(t)y = g(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

possui uma única solução.

### Prova:

Fixando  $P(t)$  uma primitiva de  $p(t)$  e  $F(t)$  uma primitiva de  $e^{P(t)}g(t)$ , temos que a solução geral da EDO é dada por

$$y(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

onde

$$\begin{aligned} c(t) &= \int e^{P(t)}g(t) dt \\ &= C(t) + c_1 \end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária, de modo que

$$y(t) = (C(t) + c_1)e^{-P(t)}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) \\ &= (C(0) + c_1)e^{-P(0)} \end{aligned}$$

onde podemos isolar  $c_1$

$$c_1 = y_0 e^{P(0)} - C(0)$$

e, com essa escolha de  $c_1$ , obtemos a única solução  $y(t)$  do PVI. ■

Na proposição anterior, o valor inicial foi dado no instante  $t = 0$  por conveniência: o resultado continua válido se o valor inicial for dado em qualquer outro instante onde os coeficientes da EDO estejam definidos. A unicidade de solução de um PVI está relacionada com o *determinismo* do fenômeno descrito pela EDO linear: conhecido o valor inicial de uma quantidade e como essa quantidade varia no tempo, a quantidade fica determinada unicamente.

Na próxima seção iniciaremos o estudo das equações de 2ª ordem. De agora em diante, restringiremos nossa análise apenas a equações lineares.

## 1.3 EDO LINEAR DE 2ª ORDEM

Uma EDO é linear de 2ª ordem quando ela pode ser escrita na seguinte forma

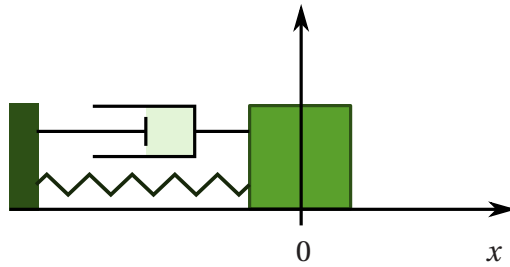
$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

onde  $a_2(t)$  não é identicamente nulo,  $a_2(t)$ ,  $a_1(t)$ ,  $a_0(t)$  são os coeficientes da EDO e  $f(t)$  é o forçamento ou termo não homogêneo da EDO.

As equações lineares de 2ª ordem são muito relevantes, pois estão associadas a modelos de diversas áreas de aplicação, como ilustrado pelos seguintes exemplos.

### Exemplos

- 1) Posição no sistema Massa-Mola-Amortecimento (MMA): Considere o deslocamento  $x(t)$  a partir da posição de equilíbrio de um bloco de massa  $m$  acoplado a uma mola, a um amortecedor e a um forçamento externo.



Pela Lei de Hooke, a força da mola é proporcional à posição e dada por

$$F_M = -kx(t)$$

onde  $k$  é a constante de Hooke da mola. Já a força de amortecimento é proporcional à velocidade e dada por

$$F_A = -bx'(t)$$

onde  $b$  é uma constante que depende da construção do amortecedor. O forçamento externo independe da posição ou velocidade do bloco, e é uma função do tempo dada por

$$F_E = f(t)$$

Desconsiderando-se a força de atrito do bloco com o piso, a força resultante é dada por

$$F = F_A + F_M + F_E$$

Pela 2ª Lei de Newton, temos então que

$$mx''(t) = -bx'(t) - kx(t) + f(t)$$

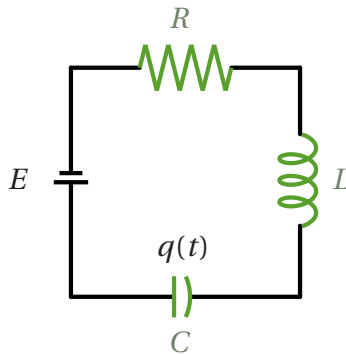
de modo que

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t)$$

As condições iniciais são dadas por

$$\begin{cases} x(0) = x_0 & \text{posição inicial} \\ x'(0) = v_0 & \text{velocidade inicial} \end{cases}$$

2) Carga no circuito Resistor-Indutor-Capacitor (RLC): Considere a carga  $q(t)$  no capacitor de um circuito elétrico em série formado por um resistor, por um indutor, por um capacitor e por uma fonte externa.



A queda de tensão nas extremidades do capacitor é proporcional à carga  $q(t)$  armazenada por ele e dada por

$$V_C = Cq(t)$$

onde  $C$  é o inverso da capacitância do capacitor, enquanto a queda de tensão nas extremidades do resistor é proporcional à corrente  $q'(t)$  que passa por ele e é dada por

$$V_R = Rq'(t)$$

onde  $R$  é a resistência do resistor, e a queda de tensão nas extremidades do indutor é proporcional à  $q''(t)$  e dada por

$$V_L = Lq''(t)$$

onde  $L$  é a indutância do indutor. Pela 2ª Lei de Kirchoff, a soma das quedas de tensão num circuito elétrico é igual à tensão da fonte externa dada por

$$V_E = E(t)$$

de modo que

$$V_L + V_R + V_C = V_E$$

ou seja

$$Lq''(t) + Rq'(t) + Cq(t) = E(t)$$

onde  $L, R, C$  podem variar com o tempo. As condições iniciais são dadas por

$$\begin{cases} q(0) = q_0 & \text{carga inicial} \\ q'(0) = i_0 & \text{corrente inicial} \end{cases}$$

Note como dois fenômenos distintos – um sistema mecânico MMA e um circuito elétrico RLC – são modelados pela mesma EDO. A vantagem da abordagem matemática a uma EDO é que, resolvido o modelo matemático, obtemos de uma só vez a descrição de ambos os fenômenos. Além da economia de esforços, esse procedimento também permite fazer analogias entre os dois fenômenos, o que nos ajuda a entendê-los: no circuito elétrico o capacitor tem o papel da mola de armazenar energia, a resistência tem o papel do amortecedor de dissipar a energia, e a indutância tem o papel da massa de fornecer inércia para a carga.

## SOLUÇÃO GERAL

Uma EDO linear de 2ª ordem e sua *homôgenea associada* são dadas por

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

Para encontrar sua solução geral, dividimos por  $a_2(t)$  para colocar as equações na denominada *forma normal*

$$y'' + q(t)y' + p(t)y = g(t)$$

$$y'' + q(t)y' + p(t)y = 0$$

onde

$$q(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)} \quad p(t) = \frac{a_0(t)}{a_2(t)} \quad g(t) = \frac{f(t)}{a_2(t)}$$

estão definidas para todo  $t$  tal que  $a_2(t) \neq 0$ .

### Exemplo

Considere a EDO linear de 2ª ordem dada por

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 2y(t) = t^5$$

cuja homogênea associada

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 2y(t) = 0$$

é um exemplo do que é conhecido como Equação de Euler. Dividindo-se por  $a_2(t) = t^2$ , obtemos sua forma normal

$$y''(t) + \frac{2}{t} y'(t) - \frac{2}{t^2} y(t) = t^3$$

$$y''(t) + \frac{2}{t} y'(t) - \frac{2}{t^2} y(t) = 0$$

de modo que

$$q(t) = \frac{2}{t}$$

$$p(t) = \frac{-2}{t^2}$$

$$g(t) = t^3$$

estão definidas no intervalo  $t > 0$ .

A proposição seguinte mostra que a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea é dada pela soma de uma solução particular com as soluções da homogênea associada.

### Proposição 1.9

A solução geral da EDO não homogênea

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = g(t)$$

é dada por

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

onde  $y_p(t)$  é uma solução particular da EDO não homogênea e  $y_h(t)$  é a solução geral da homogênea associada.

### Prova:

Primeiro vamos mostrar que, se  $z(t)$  é solução da homogênea associada, então  $y_p(t) + z(t)$  é solução da não homogênea. De fato, temos

que

$$\begin{aligned}
 & (y_p(t) + z(t))'' + q(t)(y_p(t) + z(t))' + p(t)(y_p(t) + z(t)) \\
 = & (y_p''(t) + z''(t)) + q(t)(y_p'(t) + z'(t)) + p(t)(y_p(t) + z(t)) \\
 = & (y_p''(t) + q(t)y_p'(t) + p(t)y_p(t)) + (z''(t) + q(t)z'(t) + p(t)z(t)) \\
 = & g(t) + 0 \\
 = & g(t)
 \end{aligned}$$

onde usamos que  $y_p(t)$  é uma solução particular da EDO não homogênea.

Agora vamos mostrar que toda solução da não homogênea é dada por essa forma. Seja  $w(t)$  uma solução qualquer da EDO linear de 2ª ordem não homogênea. Temos então que

$$\begin{aligned}
 w''(t) + q(t)w'(t) + p(t)w(t) &= g(t) \\
 y_p''(t) + q(t)y_p'(t) + p(t)y_p(t) &= g(t)
 \end{aligned}$$

Subtraindo as equações, temos que

$$(w(t) - y_p(t))'' + q(t)(w(t) - y_p(t))' + p(t)(w(t) - y_p(t)) = 0$$

Logo  $z(t) = w(t) - y_p(t)$  é solução da homogênea associada, de modo que

$$w(t) = y_p(t) + z(t)$$



## SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

Vamos mostrar que a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem homogênea

$$y'' + q(t)y' + p(t)y = 0$$

é dada pela combinação linear

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$



onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , sempre que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  forem soluções não proporcionais da EDO, denominadas *soluções fundamentais*.

### Exemplo

Temos que

$$y_1(t) = t \quad \text{e} \quad y_2(t) = t^{-2}$$

são soluções fundamentais (não proporcionais) da Equação de Euler

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 2y(t) = 0$$

Vamos ver que a solução geral dessa EDO é dada por

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^{-2}$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Uma vez que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  não são proporcionais, temos que

$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)}$$

não é constante, de modo que sua derivada é não nula e dada por

$$\left( \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \right)' = \frac{W(y_1(t), y_2(t))}{y_1(t)^2}$$

onde

$$W(y_1(t), y_2(t)) = y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

é denominado o *Wronskiano* de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ . Note que o Wronskiano é dado pelo seguinte determinante

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

**Exemplo**

O Wronskiano das soluções

$$y_1(t) = t \quad \text{e} \quad y_2(t) = t^{-2}$$

da Equação de Euler

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 2y(t) = 0$$

é dado por

$$\begin{aligned} W(t, t^{-2}) &= \begin{vmatrix} t & t^{-2} \\ (t)' & (t^{-2})' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t & t^{-2} \\ 1 & -2t^{-3} \end{vmatrix} \\ &= t(-2t^{-3}) - t^{-2}(1) \\ &= -3t^{-2} \end{aligned}$$

A proposição a seguir estabelece um fato de fundamental importância sobre o Wronskiano.

**Proposição 1.10: Fórmula de Abel**

Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções da EDO homogênea

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = 0$$

Então

$$W(y_1(t), y_2(t)) = ce^{-Q(t)}$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e

$$\int q(t) dt = Q(t) + C$$

### Prova:

Por simplicidade, vamos denotar  $W(y_1(t), y_2(t))$  por

$$W(t) = y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

de modo que

$$\begin{aligned} W'(t) &= (y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t))' \\ &= y_2''(t)y_1(t) + y_1'(t)y_2'(t) \\ &\quad - y_1''(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1'(t) \\ &= y_2''(t)y_1(t) - y_1''(t)y_2(t) \end{aligned}$$

Como  $y_2(t)$  e  $y_1(t)$  são soluções da EDO, temos que

$$\begin{aligned} y_2''(t) + q(t)y_2'(t) + p(t)y_2(t) &= 0 \\ y_1''(t) + q(t)y_1'(t) + p(t)y_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por  $y_1(t)$  e a segunda equação por  $y_2(t)$ , temos que

$$\begin{aligned} y_2''(t)y_1(t) + q(t)y_2'(t)y_1(t) + p(t)y_2(t)y_1(t) &= 0 \\ y_1''(t)y_2(t) + q(t)y_1'(t)y_2(t) + p(t)y_1(t)y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

de modo que, subtraindo as duas equações, obtemos

$$W'(t) + q(t)W(t) = 0$$

cujas solução é dada por

$$W(t) = ce^{-Q(t)}$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e

$$\int q(t) dx = Q(t) + C$$



### Exemplo

A Equação de Euler

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 2y(t) = 0$$

tem forma normal dada por

$$y''(t) + \frac{2}{t} y'(t) - \frac{2}{t^2} y(t) = 0$$

de modo que

$$q(t) = \frac{2}{t}$$

Segue-se que

$$Q(t) = 2 \log(t)$$

de modo que, pela Fórmula de Abel, temos que

$$W(t) = c e^{-Q(t)} = c t^{-2}$$

Vamos mostrar agora a relação entre duas soluções serem fundamentais e seu Wronskiano não se anular.

### Proposição 1.11

Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções da EDO homogênea

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = 0$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

$$(A) \quad W(y_1(t_0), y_2(t_0)) \neq 0 \text{ para algum } t_0$$

$$(B) \quad W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0 \text{ para todo } t$$

$$(C) \quad y_1(t) \text{ e } y_2(t) \text{ são fundamentais}$$

### Prova:

Vamos mostrar que (A) é equivalente a (B) e, depois, que (B) é equivalente a (C).

Para mostrar que (A) e (B) são equivalentes, primeiro lembramos que

$$W(y_1(t), y_2(t)) = ce^{-Q(t)}$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ . Segue-se então que

$$W(y_1(t_0), y_2(t_0)) \neq 0$$

para algum  $t_0$ , é equivalente a

$$c \neq 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$$

para todo  $t$ .

Para mostrar que (B) e (C) são equivalentes, primeiro lembramos que

$$\left( \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \right)' = \frac{W(y_1(t), y_2(t))}{y_1(t)^2}$$

Segue-se então que

$$W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$$

para todo  $t$ , é equivalente a

$$\left( \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \right)' \neq 0$$

para todo  $t$ , que, por sua vez, é equivalente a  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  não serem proporcionais, que, por sua vez, é equivalente a  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  serem fundamentais. ■

Finalmente vamos mostrar que a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem é dada pela combinação linear de duas soluções fundamentais.

### Proposição 1.12

Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções fundamentais da EDO

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = 0$$

Então  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  não se anulam simultaneamente e a solução geral da EDO é dada por

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

### Prova:

Como  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais, temos que

$$W(y_1(t), y_2(t)) = y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t) \neq 0$$

para todo  $t$ , de modo que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  não podem se anular simultaneamente.

Agora seja  $z(t)$  uma solução qualquer da EDO e suponha, sem perda de generalidade, que  $y_1(t) \neq 0$ . Comparando  $z(t)$  com  $y_1(t)$ , temos que

$$\left( \frac{z(t)}{y_1(t)} \right)' = \frac{W(y_1(t), z(t))}{y_1(t)^2} = \frac{ae^{-Q(t)}}{y_1(t)^2}$$

para algum  $a \in \mathbb{R}$ , e comparando  $y_2(t)$  com  $y_1(t)$ , temos que

$$\left( \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \right)' = \frac{W(y_1(t), y_2(t))}{y_1(t)^2} = \frac{be^{-Q(t)}}{y_1(t)^2} \neq 0$$

de modo que  $b \neq 0$ . Segue-se então que

$$\left( \frac{z(t)}{y_1(t)} \right)' = \frac{a}{b} \frac{be^{-Q(t)}}{y_1(t)^2} = \frac{a}{b} \left( \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \right)'$$

Integrando essa equação, temos que

$$\frac{z(t)}{y_1(t)} = \frac{a}{b} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} + c_1$$

para algum  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Denotando  $c_2 = a/b$  e isolando  $z(t)$  na equação acima, segue-se que

$$z(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

mostrando que a solução é uma combinação linear de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ .

Agora, uma vez que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da EDO, temos que

$$\begin{aligned} y_1''(t) + q(t)y_1'(t) + p(t)y_1(t) &= 0 \\ y_2''(t) + q(t)y_2'(t) + p(t)y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por  $c_1$  e a segunda equação por  $c_2$ , temos que

$$\begin{aligned} c_1 y_1''(t) + q(t)c_1 y_1'(t) + p(t)c_1 y_1(t) &= 0 \\ c_2 y_2''(t) + q(t)c_2 y_2'(t) + p(t)c_2 y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Somando essas equações, temos que

$$(c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)) + q(t)(c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)) + p(t)(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) = 0$$

mostrando que  $y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  é de fato solução da EDO para quaisquer  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . ■

Vamos considerar o seguinte exemplo.

### Exemplos

1) Temos que

$$y_1(t) = t \quad \text{e} \quad y_2(t) = t^{-2}$$

são soluções fundamentais (não proporcionais) da Equação de Euler

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 2y(t) = 0$$

cujas forma normal é dada por

$$y''(t) + \frac{2}{t} y'(t) - \frac{2}{t^2} y(t) = 0$$

para  $t > 0$ . Temos então que a solução geral dessas duas EDO para  $t > 0$  é dada por

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^{-2}$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

2) Sistema massa-mola sem amortecimento:

$$m x''(t) = -k x(t)$$

Essa é uma EDO linear homogênea cuja forma normal é dada por

$$x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$



onde  $p(t) = \frac{k}{m}$  e  $q(t) = 0$ . Temos que

$$x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

são soluções, o que pode ser verificado por substituição na EDO. De fato, são soluções fundamentais da homogênea, uma vez que não são proporcionais. Segue-se que a solução geral da EDO é dada por

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## SOLUÇÃO DA NÃO HOMOGÊNEA

A solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea

$$y'' + q(t)y' + p(t)y = g(t)$$

será dada a partir da solução geral da sua homogênea associada por meio do método denominado *Variação dos Parâmetros*.

### Passos

**1) Variar os parâmetros:** Procurar uma solução da EDO não homogênea da forma  $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ , substituindo os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  da solução geral  $c_1y_1(t) + c_2y_2$  da homogênea associada por funções  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$ , que são as novas incógnitas.

**2) Determinar os parâmetros variáveis:** Determinar quais são as funções  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$ , utilizando a EDO não homogênea.

Uma vez que

$$y(t) = y_1(t)c_1(t) + y_2(t)c_2(t)$$

segue-se que

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_1'(t)c_1(t) + y_2'(t)c_2(t) + \\ &+ c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) \end{aligned}$$

Uma vez que temos duas incógnitas  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  e apenas uma equação, podemos acrescentar a nova equação

$$c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0$$

para simplificar as contas. Nesse caso, temos que

$$y'(t) = y_1'(t)c_1(t) + y_2'(t)c_2(t)$$

de modo que

$$\begin{aligned} y''(t) &= y_1''(t)c_1(t) + y_2''(t)c_2(t) + \\ &+ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) \end{aligned}$$

Temos então que

$$p(t)y(t) = p(t)y_1(t)c_1(t) + p(t)y_2(t)c_2(t)$$

$$q(t)y'(t) = q(t)y_1'(t)c_1(t) + q(t)y_2'(t)c_2(t)$$

$$\begin{aligned} y''(t) &= y_1''(t)c_1(t) + y_2''(t)c_2(t) \\ &+ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) \end{aligned}$$

Somando as equações, colocando  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  em evidência, e usando que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções da homogênea e que  $y(t)$  é solução da não homogênea, temos que

$$g(t) = c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t)$$

Obtemos assim o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_1(t)c_1'(t) + y_2(t)c_2'(t) = 0 \\ y_1'(t)c_1'(t) + y_2'(t)c_2'(t) = g(t) \end{cases}$$

para determinar  $c_1'(t)$  e  $c_2'(t)$ . Temos que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é o Wronskiano das soluções fundamentais, dado por

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

que é não nulo, uma vez que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais. Pela regra de Cramer, apresentada no Apêndice, segue-se que

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)}$$

e que

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)}$$

de modo que

$$c_1(t) = \int -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)} dt$$

e que

$$c_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)} dt$$

Observe que, como  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  são dadas por integrais indefinidas, cada uma delas é de fato uma família de funções contendo uma constante arbitrária.

A proposição seguinte mostra que o método da Variação dos Parâmetros fornece a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea.

### Proposição 1.13

A solução geral da EDO

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = g(t)$$

é dada por

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

onde

$$c_1(t) = \int -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)} dt$$

$$c_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)} dt$$

enquanto  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais da homogênea associada e  $W(t)$  é o seu Wronskiano.

### Prova:

Basta notar que  $c_1(t) = C_1(t) + c_1$  e também que  $c_2(t) = C_2(t) + c_2$ , onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . A solução dada pelo método da Variação dos Parâmetros pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= (C_1(t) + c_1)y_1(t) + (C_2(t) + c_2)y_2(t) \\ &= (C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)) + (c_1y_1(t) + c_2y_2(t)) \end{aligned}$$

Escolhendo  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 0$ , vemos que

$$y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$$

é uma solução particular da não homogênea. O resultado segue-se então da Proposição 1.9, uma vez que

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , é a solução geral da homogênea. ■

Vamos considerar o seguinte exemplo.

### Exemplo

Vimos que

$$y_1(t) = t \quad \text{e} \quad y_2(t) = t^{-2}$$

são soluções fundamentais da EDO

$$y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) - \frac{2}{t^2}y(t) = 0$$

que é a homogênea associada à EDO não homogênea

$$y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) - \frac{2}{t^2}y(t) = t^3$$

Vimos também que o Wronskiano dessas duas soluções fundamentais é dado por

$$W(t) = -3t^{-2}$$

Temos então que

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

é a solução geral da EDO não homogênea, onde

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)} dt \\ &= \int -\frac{t^3 t^{-2}}{-3t^{-2}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{t^3}{3} dt \\
 &= \frac{t^4}{12} + c_1
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 c_2(t) &= \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)} dt \\
 &= \int \frac{t^3 t}{-3t^{-2}} dt \\
 &= \int -\frac{t^6}{3} dt \\
 &= -\frac{t^7}{21} + c_2
 \end{aligned}$$

A solução geral da EDO não homogênea é então dada por

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left( \frac{t^4}{12} + c_1 \right) t + \left( -\frac{t^7}{21} + c_2 \right) t^{-2} \\
 &= \frac{t^5}{12} - \frac{t^5}{21} + c_1 t + c_2 t^{-2} \\
 &= \frac{t^5}{28} + c_1 t + c_2 t^{-2}
 \end{aligned}$$

Observe que

$$y_p(t) = \frac{t^5}{28}$$

é uma solução particular da EDO não homogênea, enquanto

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t^{-2}$$

é a solução geral da homogênea associada, de modo que

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

é a solução geral da EDO não homogênea.

Apresentamos a seguir, para as equações lineares de 2ª ordem, um conceito fundamental ligado às aplicações.

## PROBLEMA DE VALORES INICIAIS DE 2ª ORDEM

### Exemplo

Vamos resolver o PVI do sistema massa-mola sem amortecimento

$$\begin{cases} mx''(t) + kx(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Já vimos que ele tem solução geral dada por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  e

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

é a frequência natural de vibração desse sistema massa-mola. Temos então

$$x'(t) = -c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t)$$

Usando os valores iniciais, temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1 \\ v_0 &= x'(0) = c_2 \omega \end{aligned}$$

Segue-se que  $c_1 = x_0$  e  $c_2 = v_0/\omega$  e, portanto,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

é a única solução do PVI.

No exemplo anterior vimos que a solução geral de uma EDO consiste de infinitas soluções, mas que apenas uma única solução satisfaz o valor inicial dado. O próximo resultado mostra que um PVI para uma EDO linear de 2ª ordem sempre possui uma única solução, desde que sejam considerados valores iniciais para a função incógnita e sua primeira derivada. No estudo do movimento, esse resultado corresponde a fixar posição e velocidade iniciais de um corpo para obter sua trajetória.

### Proposição 1.14

Sejam  $y_0$  e  $v_0$  valores dados e suponha que a EDO possui soluções fundamentais. Então o PVI linear

$$\begin{cases} y'' + q(t)y + p(t)y = g(t) \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = v_0 \end{cases}$$

possui uma única solução.

### Prova:

Fixando soluções fundamentais  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  e uma solução particular  $y_p(t)$ , temos que a solução geral da EDO é da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

Segue-se que

$$y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) + y_p'(t)$$



Usando as condições iniciais, temos que

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) \\ &= c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + y_p(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_0 &= y'(0) \\ &= c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) + y_p'(0) \end{aligned}$$

de modo que  $c_1$  e  $c_2$  podem ser obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y_1(0)c_1 + y_2(0)c_2 = y_0 - y_p(0) \\ y_1'(0)c_1 + y_2'(0)c_2 = v_0 - y_p'(0) \end{cases}$$

cujo determinante é  $W(y_1, y_2)(0)$ . Esse determinante é não nulo, uma vez que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais. Portanto, esse sistema tem uma única solução  $c_1, c_2$ . Com esses valores de  $c_1$  e  $c_2$ , obtemos a única solução  $y(t)$  do PVI. ■

Na proposição anterior os valores iniciais foram dados no instante  $t = 0$  por conveniência: o resultado continua válido se os valores iniciais forem dados em qualquer outro instante em que os coeficientes da EDO estejam definidos.

Como os métodos para se encontrar a solução geral e a solução de PVI de equações lineares dependem da determinação de soluções fundamentais da homogênea, vamos analisar, nas próximas seções, alguns métodos para se obter essas soluções fundamentais.

Em algumas situações é conveniente usar as denominadas *soluções canônicas*, que são um par de soluções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  da EDO homogênea

$$y'' + q(t)y' + p(t)y = 0$$

satisfazendo as condições iniciais

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

O próximo resultado mostra que as soluções canônicas são fundamentais e que a solução de todo PVI é escrita de maneira simples como combinação das duas.

**Proposição 1.15**

As soluções canônicas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são fundamentais. Além disso, a solução  $y(t)$  do PVI com condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= v_0 \end{cases}$$

é dada por

$$y(t) = y_0 y_1(t) + v_0 y_2(t)$$

**Prova:**

Para mostrar que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são fundamentais, basta notar que seu Wronskiano em  $t = 0$  é diferente de zero. De fato

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Segue-se que a solução geral da EDO é da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

de modo que

$$y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)$$

Segue-se então das condições iniciais que

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) \\ &= c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) \\ &= c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_0 &= y'(0) \\
 &= c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) \\
 &= c_2
 \end{aligned}$$

como queríamos. ■

### Exemplo

As soluções canônicas da EDO

$$mx''(t) + kx(t) = 0$$

são dadas por

$$x_1(t) = \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

onde  $\omega = \sqrt{k/m}$ . De modo que a solução com condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

é dada por

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + v_0 \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

Nas próximas seções, vamos apresentar métodos para encontrar soluções fundamentais. Vamos começar com as EDOs de coeficientes constantes e, em seguida, vamos tratar das de coeficientes variáveis.

## 1.4 COEFICIENTES CONSTANTES

Uma EDO homogênea com coeficientes constantes na forma normal é dada por

$$y''(t) + qy'(t) + py(t) = 0$$

onde  $p, q \in \mathbb{R}$  são constantes. Neste caso, é útil suprimir a variável  $t$

$$y'' + qy' + py = 0$$

e reescrever a EDO usando o denominado *operador de derivação*, dado por

$$Dy = y', \quad D^2y = y''$$

de modo que

$$(D^2 + qD + p)y = 0$$

O lado esquerdo dessa equação pode ser manipulado como um polinômio em  $D$ , cuja fatoração depende das raízes da equação característica

$$r^2 + qr + p = 0$$

obtida da EDO trocando-se  $D$  por  $r$  e suprimindo a função  $y$ . O tipo de solução da EDO depende do tipo das raízes dessa equação, denominadas *raízes características*. Como a equação característica é de segundo grau, os possíveis tipos de raízes são: raízes reais distintas, raiz real única e raízes complexas.

### RAÍZES REAIS DISTINTAS

Primeiro vamos analisar o que acontece num exemplo.

#### Exemplo

A EDO  $y'' - 5y' + 6y = 0$  pode ser escrita como

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

de modo que sua equação característica é dada por

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

Uma vez que suas raízes características são  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ , a equação característica se fatora como

$$(r - 2)(r - 3) = 0$$

e afirmamos que a EDO se fatora como

$$(D - 2)(D - 3)y = 0$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} (D - 2)(D - 3)y &= (D - 2)(y' - 3y) \\ &= (y' - 3y)' - 2(y' - 3y) \\ &= y'' - 5y' + 6y \end{aligned}$$

Observe que a ordem dos fatores não importa

$$\begin{aligned} (D - 3)(D - 2)y &= (D - 3)(y' - 2y) \\ &= (y' - 2y)' - 3(y' - 2y) \\ &= y'' - 5y' + 6y \end{aligned}$$

Assim, a EDO original fica fatorada como

$$\begin{aligned} (D^2 - 5D + 6)y &= (D - 3)(D - 2)y = 0 \\ &= (D - 2)(D - 3)y = 0 \end{aligned}$$

e isso fornece um método para encontrar soluções. De fato, uma solução da EDO de primeira ordem

$$(D - 2)y = 0$$

também é solução da EDO original, uma vez que

$$(D - 3) \underbrace{(D - 2)}_{=0} y = 0$$

Uma vez que a EDO de primeira ordem acima é  $y' = 2y$ , uma solução da EDO original é

$$y_1 = e^{2t}$$

Trocando a ordem dos fatores e aplicando o mesmo raciocínio à EDO da primeira ordem  $(D - 3)y = 0$ , obtemos outra solução da EDO original, dada por

$$y_2 = e^{3t}$$

Uma vez que as raízes  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 3$  são distintas,  $y_1$  e  $y_2$  são soluções não proporcionais e, portanto, fundamentais.

Podemos generalizar o exemplo acima, de modo que, quando temos duas raízes características reais  $r_1 \neq r_2$ , as soluções fundamentais da EDO são dadas por

$$e^{r_1 t}, \quad e^{r_2 t}$$

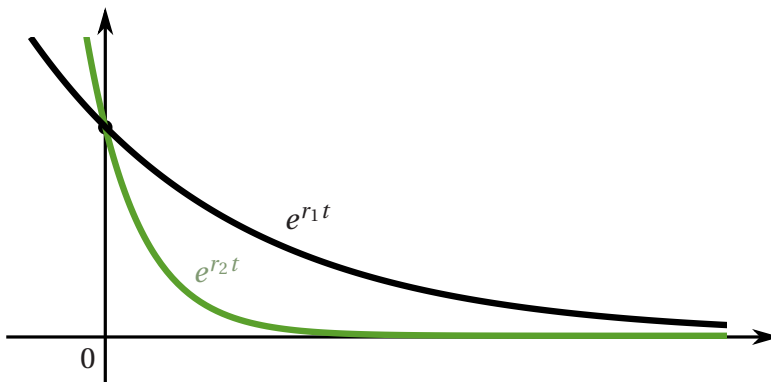
A tabela seguinte resume essas informações.

**raízes características:**  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1 \neq r_2$

**soluções fundamentais:**  $e^{r_1 t}, \quad e^{r_2 t}$

**solução geral:**  $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

Para usar a tabela acima, só é necessário conhecer as raízes distintas.



### Exemplo

Vamos considerar a seguinte EDO

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

Neste caso, temos que

equação característica:  $r^2 - r - 2 = 0$

raízes características:  $r_1 = -1, \quad r_2 = 2$

soluções fundamentais:  $e^{-t}, \quad e^{2t}$

solução geral:  $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

## RAIZ REAL ÚNICA

Novamente, vamos primeiro analisar o que acontece num exemplo.

**Exemplo**

A EDO  $y'' - 6y' + 9y = 0$  pode ser escrita como

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

de modo que sua equação característica é dada por

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

Uma vez que suas raízes características são  $r_1 = r_2 = 3$ , a equação característica se fatora como

$$(r - 3)(r - 3) = 0$$

e afirmamos que a EDO se fatora como

$$(D - 3)(D - 3)y = 0$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} (D - 3)(D - 3)y &= (D - 3)(y' - 3y) \\ &= (y' - 3y)' - 3(y' - 3y) \\ &= y'' - 6y' + 9y \end{aligned}$$

Uma solução da EDO de primeira ordem

$$(D - 3)y = 0$$

também é solução da EDO original, uma vez que

$$(D - 3) \underbrace{(D - 3)y}_{=0} = 0$$

Uma vez que a EDO de primeira ordem acima é  $y' = 3y$ , uma solução da EDO original é

$$y_1 = e^{3t}$$



Como existe apenas uma raiz real, precisamos ainda encontrar uma solução não proporcional da EDO original. Vamos procurar uma solução da forma  $y = e^{3t}z$ , pois usando repetidas vezes

$$\begin{aligned}(D-3)e^{3t}z &= (e^{3t}z)' - 3(e^{3t}z) \\ &= 3e^{3t}z + e^{3t}z' - 3e^{3t}z \\ &= e^{3t}z'\end{aligned}$$

podemos reescrever a EDO original como

$$\begin{aligned}(D-3)(D-3)e^{3t}z &= (D-3)e^{3t}z' \\ &= e^{3t}z'' \\ &= 0\end{aligned}$$

de modo que  $y = e^{3t}z$  é solução da EDO original quando  $z'' = 0$ . A EDO  $z'' = 0$  tem soluções fundamentais 1 e  $t$ . Da solução  $z(t) = 1$ , reobtemos a solução  $y_1 = e^{3t}$  e, da solução  $z(t) = t$ , obtemos a nova solução

$$y_2 = te^{3t}$$

de modo que  $y_1$  e  $y_2$  são soluções não proporcionais e, portanto, soluções fundamentais da EDO original.

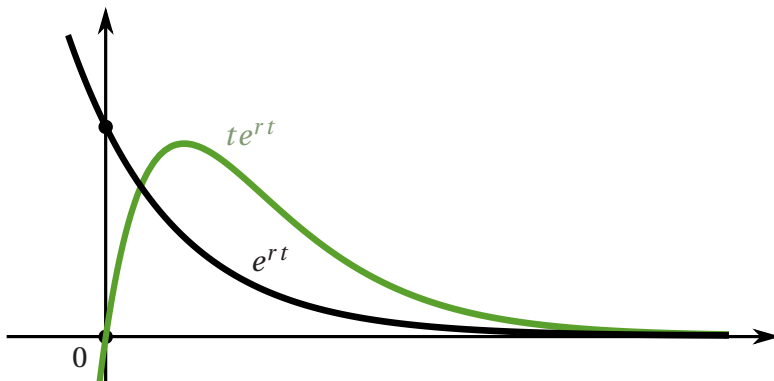
Podemos generalizar o exemplo acima, de modo que, quando temos uma única raiz característica real  $r$ , as soluções fundamentais da EDO são dadas por

$$e^{rt}, \quad te^{rt}$$

A tabela seguinte resume essas informações.

<b>raiz característica:</b> $r \in \mathbb{R}$
<b>soluções fundamentais:</b> $e^{rt}$ , $te^{rt}$
<b>solução geral:</b> $y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$

Para usar a tabela acima, só é necessário conhecer a única raiz real.



### Exemplo

Vamos considerar a seguinte EDO

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Neste caso, temos que

$$\text{equação característica: } r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\text{raízes características: } r = -1$$

$$\text{soluções fundamentais: } e^{-t}, \quad te^{-t}$$

$$\text{solução geral: } y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

## RAÍZES COMPLEXAS

Novamente, vamos primeiro analisar o que acontece num exemplo.

### Exemplo

A EDO  $y'' - 8y' + 25y = 0$  pode ser escrita como

$$(D^2 - 8D + 25)y = 0$$

de modo que sua equação característica é dada por

$$r^2 - 8r + 25 = 0$$

Nesse caso  $\Delta = -36 < 0$ , de modo que as raízes características são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} &= \frac{8}{2} \pm \frac{6}{2}i \\ &= 4 \pm 3i \end{aligned}$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  é o número imaginário. Segue-se que  $r_1 = 4 + 3i$ ,  $r_2 = 4 - 3i$ , de modo que a equação característica se fatora

como

$$(r - (4 + 3i))(r - (4 - 3i)) = 0$$

Podemos eliminar o número imaginário  $i$  observando que

$$\begin{aligned}(r - (4 + 3i))(r - (4 - 3i)) &= ((r - 4) - 3i)((r - 4) + 3i) \\ &= (r - 4)^2 - (3i)^2 \\ &= (r - 4)^2 + 3^2\end{aligned}$$

Segue-se que a EDO pode ser escrita como

$$((D - 4)^2 + 3^2)y = 0$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}((D - 4)^2 + 3^2)y &= (D^2 - 8D + 25)y \\ &= y'' - 4y' + 25y\end{aligned}$$

Como a parte real das raízes é igual a 4, vamos procurar soluções da forma  $y = e^{4t}z$ , uma vez que

$$\begin{aligned}(D - 4)e^{4t}z &= (e^{4t}z)' - 4(e^{4t}z) \\ &= 4e^{4t}z + e^{4t}z' - 4e^{4t}z \\ &= e^{4t}z'\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}(D - 4)(D - 4)e^{4t}z &= (D - 4)e^{4t}z' \\ &= e^{4t}z''\end{aligned}$$

Segue-se então que podemos reescrever EDO original como

$$\begin{aligned}((D - 4)^2 + 3^2)e^{4t}z &= (D - 4)^2e^{4t}z + 3^2e^{4t}z \\ &= e^{4t}z'' + 3^2e^{4t}z \\ &= e^{4t}(z'' + 3^2z) \\ &= 0\end{aligned}$$

de modo que  $y = e^{4t} z$  é solução da EDO original quando

$$z'' + 3^2 z = 0$$

A EDO acima tem soluções fundamentais  $z_1 = \cos(3t)$  e  $z_2 = \sin(3t)$ , de modo que

$$y_1 = e^{4t} z_1 = e^{4t} \cos(3t), \quad y_2 = e^{4t} z_2 = e^{4t} \sin(3t)$$

são soluções não proporcionais e, portanto, soluções fundamentais da EDO original.

Podemos generalizar o exemplo acima, de modo que, quando temos duas raízes complexas  $r_1, r_2 = a \pm bi$ , onde  $b > 0$ , as soluções fundamentais da EDO são dadas por

$$e^{at} \cos(bt), \quad e^{at} \sin(bt)$$

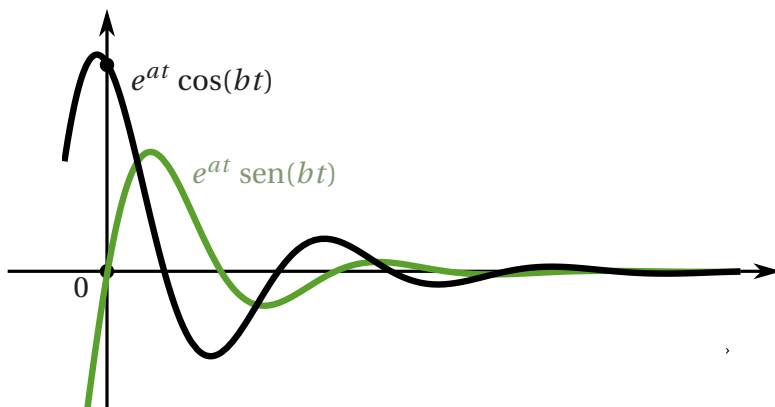
A tabela seguinte resume essas informações.

**raiz característica:**  $r_1, r_2 = a \pm ib$ , onde  $b > 0$

**soluções fundamentais:**  $e^{at} \cos(bt)$ ,  $e^{at} \sin(bt)$

**solução geral:**  $y(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$

Para usar a tabela acima, só é necessário conhecer a parte real e a parte imaginária das raízes.



### Exemplo

Vamos considerar a seguinte EDO

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

Neste caso, temos que

equação característica:  $r^2 + 2r + 5 = 0$

raízes características:  $r_1, r_2 = -1 \pm 2i$

soluções fundamentais:  $e^{-t} \cos(2t), \quad e^{-t} \text{sen}(2t)$

solução geral:  $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \text{sen}(2t)$

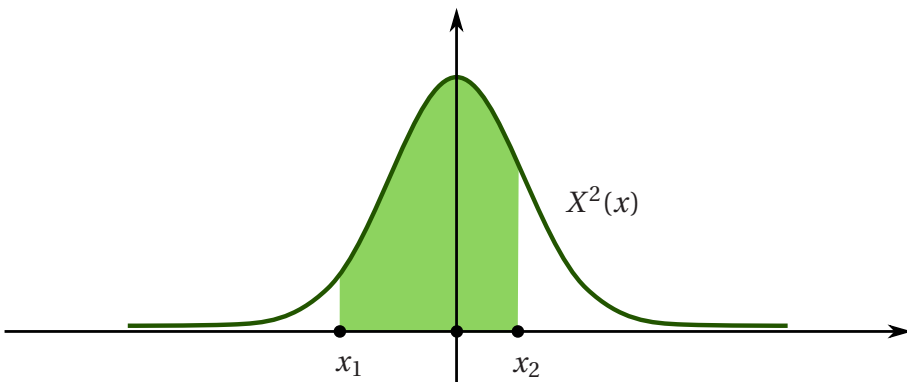
Vamos agora considerar EDOs lineares de coeficientes variáveis.

## 1.5 COEFICIENTES VARIÁVEIS

Vamos iniciar apresentando algumas equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis que surgem na Mecânica Quântica e vamos ter uma ideia de como, de suas soluções, surgem os orbitais atômicos dos quais ouvimos falar no ensino médio.

### MECÂNICA QUÂNTICA

A descrição quântica dos fenômenos subatômicos é probabilística. Por exemplo, ao invés de descrevermos a posição de uma partícula subatômica, descrevemos qual a probabilidade de encontrá-la em uma certa região. Essa probabilidade é dada pela *equação de Schroedinger*, que é o análogo quântico da Segunda Lei de Newton. Vamos descrever essa probabilidade em algumas situações para mostrar a importância das EDOs lineares de coeficientes variáveis nesse processo.



No caso do movimento unidimensional, em que uma partícula subatômica se movimenta no eixo  $x$ , a probabilidade de a partícula estar no intervalo  $[x_1, x_2]$  é proporcional à integral

$$\int_{x_1}^{x_2} X^2(x) dx$$

onde  $X^2(x)$  é denominada *densidade de probabilidade* e a função  $X(x)$  satisfaz a equação de Schroedinger unidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2m}X''(x) + V(x)X(x) = EX(x)$$

que é uma EDO linear de coeficientes variáveis. Nessa equação,  $m$  é a massa,  $V(x)$  é a energia potencial,  $E$  é a energia total e  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ .

As equações de Schroedinger bi e tridimensionais são equações diferenciais parciais e estão, portanto, fora do escopo deste livro. Entretanto, em algumas situações, como a do oscilador harmônico tridimensional e a do átomo de hidrogênio, é possível descrever o problema por meio de EDOs, como veremos a seguir.

### OSCILADOR HARMÔNICO

Considere primeiro um oscilador harmônico quântico unidimensional cujo potencial é da forma

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2,$$

que é o potencial do sistema massa-mola com frequência  $\omega$ . A equação de Schroedinger é dada então por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}X''(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2X(x) = EX(x)$$

Fazendo uma mudança de escala de  $x$  para  $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}x$ , a equação pode ser reescrita como

$$X''(x) + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - x^2\right)X(x) = 0.$$

Procurando soluções na forma

$$X(x) = e^{-x^2/2}y(x)$$

pode-se mostrar que a função  $y(x)$  satisfaz a denominada *equação de Hermite*

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0$$



que é uma EDO linear de coeficientes variáveis, onde a constante  $\lambda$  satisfaz

$$E = \hbar\omega \left( \lambda + \frac{1}{2} \right)$$

Pode-se mostrar que, para ter significado físico, a função  $y(x)$  deve ser polinomial. Além disso, veremos que a equação de Hermite possui soluções polinomiais apenas quando  $\lambda$  assume valores inteiros não negativos, de modo que a energia é quantizada. O inteiro  $\lambda$  é denominado *número quântico*.

### Exemplo

Quando  $\lambda = 0$ , a energia é mínima e a equação de Hermite é dada por

$$y''(x) - 2xy'(x) = 0$$

e pode-se mostrar que suas soluções polinomiais são proporcionais a  $y(x) = 1$  de modo que a densidade é proporcional a  $X^2(x) = e^{-x^2}$ , ou seja, é a distribuição normal, cujo gráfico está ilustrado na primeira figura desta seção.

Em um oscilador harmônico quântico bidimensional com energia  $E$ , a situação é similar. A partícula se movimenta no plano e a equação de Schroedinger é uma equação diferencial parcial onde aparece o potencial

$$V(x, y) = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

que depende de ambas as coordenadas  $x, y$  do plano. Supondo que os movimentos nas coordenadas  $x, y$  são eventos independentes, pode-se mostrar que a probabilidade de a partícula estar na região com coordenada  $x \in [x_1, x_2]$  e coordenada  $y \in [y_1, y_2]$  é proporcional ao produto das probabilidades

$$\int_{x_1}^{x_2} X^2(x) dx \int_{y_1}^{y_2} Y^2(y) dy$$

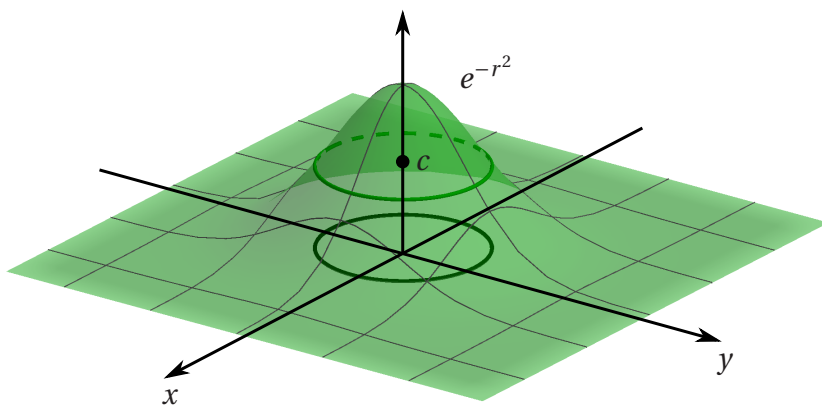
onde as funções  $X$  e  $Y$  satisfazem a equação do oscilador harmônico unidimensional. Nesse caso, a densidade de probabilidade será dada por  $X^2(x)Y^2(y)$ . As regiões de densidade de probabilidade constante são denominadas *orbitais*.

### Exemplo

Quando a energia é mínima, então a energia em cada um dos eixos  $x$ ,  $y$  é mínima. Segue-se do exemplo unidimensional que  $X^2(x) = e^{-x^2}$  e analogamente  $Y^2(y) = e^{-y^2}$ , de modo que a densidade de probabilidade nesse caso é proporcional a

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é distância do ponto  $(x, y)$  à origem. Observe que a densidade diminui à medida que  $r$  aumenta, como ilustrado pela figura abaixo.



Observe também que os orbitais são dados por  $e^{-r^2}$  constante, de modo que  $r$  é constante, ou seja, cada orbital é um círculo no plano  $x, y$  centrado na origem.

O caso tridimensional é similar. Nesse caso, a partícula se movimenta

no espaço com potencial

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

que depende das coordenadas  $x, y, z$  do espaço. Novamente, supondo que os movimentos nas coordenadas  $x, y, z$  são eventos independentes, pode-se mostrar que a probabilidade de a partícula estar na região com coordenada  $x \in [x_1, x_2]$ , coordenada  $y \in [y_1, y_2]$  e coordenada  $z \in [z_1, z_2]$  é proporcional ao produto das probabilidades

$$\int_{x_1}^{x_2} X^2(x) dx \int_{y_1}^{y_2} Y^2(y) dy \int_{z_1}^{z_2} Z^2(z) dz$$

onde as funções  $X, Y$  e  $Z$  satisfazem a equação do oscilador harmônico unidimensional. Nesse caso, a densidade de probabilidade será dada por  $X^2(x)Y^2(y)Z^2(z)$ . Embora não seja possível desenhar o gráfico dessa função, podemos desenhar seus orbitais, que, nesse caso, são superfícies no espaço  $x, y, z$ .

### Exemplo

Quando a energia é mínima, como no exemplo bidimensional, segue-se que  $X^2(x) = e^{-x^2}$ ,  $Y(y) = e^{-y^2}$  e  $Z(z) = e^{-z^2}$ , de modo que a densidade de probabilidade nesse caso é proporcional a

$$e^{-(x^2+y^2+z^2)} = e^{-r^2}$$

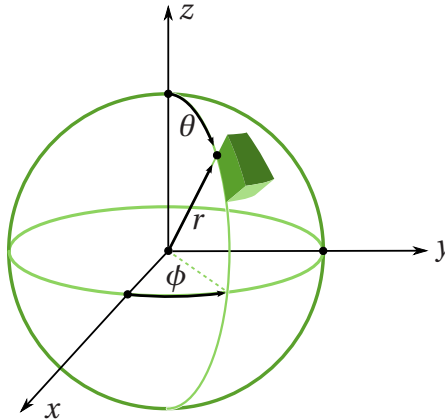
onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é distância do ponto  $(x, y, z)$  à origem. Observe que os orbitais são dados por  $e^{-r^2}$  constante, de modo que  $r$  é constante, ou seja, cada orbital é uma esfera no espaço  $x, y, z$  centrada na origem.

### ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

No caso do átomo de hidrogênio, o elétron se movimenta no espaço ao redor do núcleo formado de um só próton, sob a ação de um potencial de Coulomb da forma

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

onde  $r$  é a distância do elétron ao próton,  $e$  é a carga elétrica do próton e  $\epsilon_0$  é a permissividade no vácuo. Em coordenadas esféricas, a posição do elétron é dada por  $(r, \theta, \phi)$ , onde o ângulo  $\theta$  é a latitude e o ângulo  $\phi$  é a longitude



Supondo que os movimentos nas coordenadas  $r, \theta, \phi$  são eventos independentes, a probabilidade de o elétron estar na região com coordenada  $r \in (r_1, r_2)$ , coordenada  $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$  e coordenada  $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$  é proporcional ao produto das probabilidades

$$\int_{r_1}^{r_2} R^2(r) dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta^2(\theta) d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi^2(\phi) d\phi$$

onde a componente radial  $R(r)$  satisfaz a equação

$$\frac{1}{R(r)} (r^2 R'(r))' - \frac{2mr^2}{\hbar^2} \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - E \right) = \lambda(\lambda + 1)$$

onde  $E$  é a energia do elétron e  $m$  é sua massa,  $\lambda$  é uma constante, enquanto a componente latitudinal  $\Theta(\theta)$  satisfaz a equação

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \left( \sin \theta (\sin \theta \cdot \Theta'(\theta))' \right) + \lambda(\lambda + 1) \sin^2 \theta = \mu^2$$

onde  $\mu$  é uma constante. É possível mostrar que as constantes  $\lambda$  e  $\mu$  são números inteiros, denominados *números quânticos*, respectivamente, *orbital* e *magnético*. A componente longitudinal  $\Phi(\phi)$  satisfaz

$$\Phi(\phi) = 1$$

Segue-se que os orbitais do átomo de hidrogênio são dados por

$$R^2(r)\Theta^2(\theta)\Phi^2(\phi) = c^2$$

para alguma constante  $c$  positiva. Como  $\Phi(\phi) = 1$ , a equação do orbital é equivalente a

$$R(r)\Theta(\theta) = c$$

e, uma vez que a longitude  $\phi$  não aparece nessa equação, cada orbital é uma superfície de revolução em relação ao eixo  $z$ .

Considerando primeiro a componente radial, fazendo a mudança de escala

$$x = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} r$$

e procurando soluções na forma

$$R(r) = x^\lambda e^{-x} y^{(2\lambda+1)}(2x)$$

onde  $y^{(n)}(x)$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $y(x)$ , pode-se mostrar que a função  $y(x)$  satisfaz a denominada *equação de Laguerre*

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + (\nu + \lambda)y(x) = 0$$

que é uma EDO linear de coeficientes variáveis, onde a constante  $\nu$  satisfaz

$$E = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{\nu^2}$$

É possível mostrar que a constante  $\nu$  também é um número inteiro, denominado *número quântico principal*. Segue-se que a energia do elétron no átomo de hidrogênio é quantizada pelo número quântico principal  $\nu$ . Assim, quando um elétron salta entre dois níveis de energia, ele emite um fóton cuja frequência corresponde à diferença de energia entre os níveis, determinada pelos respectivos números quânticos principais. Essa explicação justificou, pela primeira vez, porque o átomo de hidrogênio emite apenas um determinado espectro de cores, que funciona como sua assinatura. Também é possível mostrar que

$$0 \leq \mu \leq \lambda < \nu$$

Os orbitais  $s, p, d, f$  da química correspondem aos números orbitais  $\lambda = 0, 1, 2, 3$ .

Considerando agora a componente latitudinal, fazendo a mudança de variáveis

$$x = \cos \theta$$

e procurando soluções na forma

$$\Theta(\theta) = (1 - x^2)^{\mu/2} y^{(\mu)}(x)$$

pode-se mostrar que a função  $y(x)$  satisfaz a denominada *equação de Legendre*

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda + 1)y(x) = 0$$

que é uma EDO linear de coeficientes variáveis. Pode-se mostrar que, para ter significado físico, a função  $y(x)$  deve ser polinomial, tanto na equação de Laguerre quanto na de Legendre.

### Exemplos

- 1) Para o orbital  $s$ , temos que  $\lambda = 0$ , de modo que  $\mu = 0$  e  $\nu > 0$ . Por simplicidade, vamos considerar seu menor nível de energia  $\nu = 1$ . A equação de Laguerre fica

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + y(x) = 0$$

e pode-se mostrar que suas soluções polinomiais são proporcionais a  $y(x) = x - 1$ . Como a componente radial é dada por

$$R(r) = x^0 e^{-x} y'(2x)$$

segue-se que ela é proporcional a

$$R(r) = e^{-x}$$

Já a equação de Legendre fica

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) = 0$$

e pode-se mostrar que suas soluções polinomiais são proporcionais a  $y(x) = 1$ . Como a componente latitudinal é dada por

$$\Theta(\theta) = (1 - x^2)^{0/2} y^{(0)}(x)$$

segue-se que ela é proporcional a

$$\Theta(\theta) = 1$$

Segue-se então que a equação do orbital  $s$ , onde  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\nu = 1$ , é dada por

$$R(r)\Theta(\theta) = e^{-x} = c$$

de modo que  $x$  é constante. Pela mudança de escala, temos que  $r$  é constante e, portanto, o orbital  $s$  é uma esfera centrada na origem.

2) Para o orbital  $p$ , temos que  $\lambda = 1$ . Por simplicidade, vamos considerar seu menor nível de energia  $\nu = 2$  e também o número magnético  $\mu = 0$ . A equação de Laguerre fica

$$xy''(x) + (1 - x)y'(x) + 3y(x) = 0$$

e pode-se mostrar que suas soluções polinomiais são proporcionais a um polinômio de grau três  $y(x)$ . Como a componente radial é dada por

$$R(r) = x^1 e^{-x} y'''(2x)$$

segue-se que ela é proporcional a

$$R(r) = x e^{-x}$$

Já a equação de Legendre fica

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

e pode-se mostrar que suas soluções polinomiais são proporcionais a  $y(x) = x$ . Como a componente latitudinal é dada por

$$\Theta(\theta) = (1 - x^2)^{0/2} y^{(0)}(x)$$

segue-se que ela é proporcional a

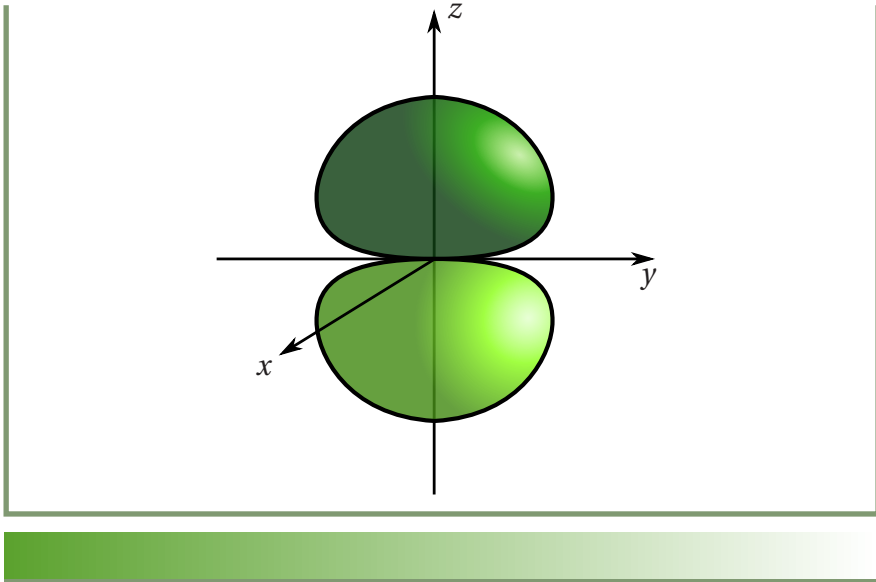
$$\Theta(\theta) = x = \cos(\theta)$$

onde usamos a mudança de variáveis na última igualdade. Segue-se que a equação do orbital  $p$ , onde  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 2$ , é dada por

$$R(r)\Theta(\theta) = x e^{-x} \cos(\theta) = c$$

cujo formato é dado pela figura abaixo.





Vamos agora procurar soluções fundamentais polinomiais para as EDOs de coeficientes variáveis.

## SOLUÇÕES POR POLINÔMIOS

Quando uma EDO tem coeficientes variáveis, não podemos usar o método das raízes características para encontrar suas soluções. Nesse caso o que vamos fazer é tentar encontrar soluções polinomiais, da forma

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_Nx^N$$

substituindo esse polinômio na EDO para tentar encontrar seus coeficientes  $c_n$  e seu grau  $N$ . Uma vez que não sabemos de antemão se existem soluções polinomiais, muito menos qual o seu grau, vamos escrever o polinômio na seguinte forma mais adequada

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots$$

onde essa expressão só é um polinômio quando os coeficientes se anulam a partir de uma certa potência. Observe que  $c_n x^n$  não é o termo de maior grau do polinômio acima e sim o denominado *termo geral* do polinômio. Vamos ver como esse método funciona num exemplo.

### Exemplo

Consideremos a equação de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + 8y(x) = 0$$

que, como vimos, está relacionada ao oscilador harmônico quântico. Para substituir a expressão

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

na EDO, primeiro calculamos suas derivadas

$$y'(x) = 0 + c_1 + c_2 2x + \dots + c_n n x^{n-1} + \dots$$

$$y''(x) = 0 + 0 + c_2 2 + \dots + c_n n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

Observe que os coeficientes  $c_0$  e  $c_1$  são dados pelas condições iniciais

$$y(0) = c_0 \quad y'(0) = c_1$$

Para obter os outros coeficientes, escrevemos

$$8y(x) = 8c_0 + 8c_1 x + 8c_2 x^2 + \dots + 8c_n x^n + \dots$$

$$-2xy'(x) = 0 - 2c_1 x - 4c_2 x^2 - \dots - 2nc_n x^n + \dots$$

Para a segunda derivada, é conveniente identificar o coeficiente da potência  $x^n$  e escrever

$$y''(x) = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots + c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \dots$$

Assim, a EDO é dada por

$$\begin{aligned} y''(x) - 2xy'(x) + 8y(x) &= (8c_0 + 0 + 2c_2) \\ &+ (8c_1 - 2c_1 + 6c_3)x \\ &+ (8c_2 - 4c_2 + 12c_4)x^2 \\ &+ \dots \\ &+ (8c_n - 2nc_n + c_{n+2}(n+2)(n+1))x^n \\ &+ \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para essa igualdade valer para todo  $x$ , os coeficientes do polinômio acima devem ser todos zero, de modo que

$$8c_n - 2nc_n + c_{n+2}(n+2)(n+1) = 0$$

para todo  $n \geq 0$ . É conveniente isolar  $c_{n+2}$  nessa equação, obtendo

$$c_{n+2} = \frac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)} c_n$$

denominada *equação de recorrência*. Conhecendo  $c_0$  e  $c_1$ , podemos usar a equação de recorrência para obter todos os ou-

tros coeficientes  $c_n$  da solução polinomial  $y(x)$ . Vamos determinar as soluções canônicas  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ .

Temos que  $y_1(x)$  satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \quad c_1 = y_1'(0) = 0$$

de modo que

$$y_1(x) = 1 + 0 \cdot x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

Usando a equação de recorrência, temos que

$$c_2 = \frac{2 \cdot 0 - 8}{2 \cdot 1} c_0 = -4 \cdot 1 = -4$$

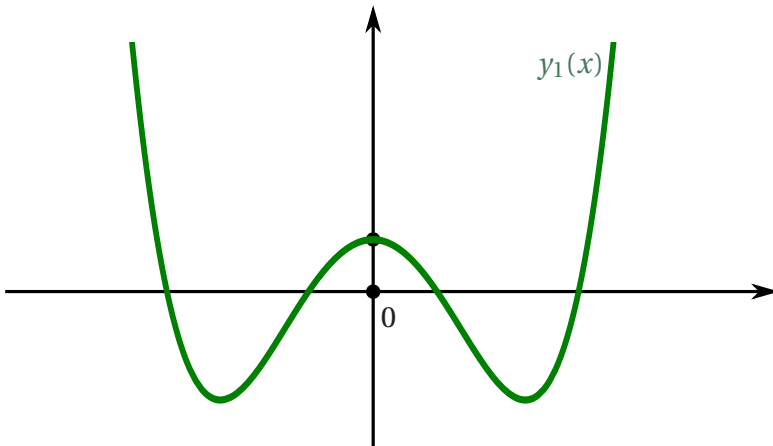
$$c_4 = \frac{2 \cdot 2 - 8}{4 \cdot 3} c_2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-4) = \frac{4}{3}$$

$$c_6 = \frac{2 \cdot 4 - 8}{6 \cdot 5} c_4 = 0 \cdot \frac{4}{3} = 0$$

e, a partir daí, temos  $c_8 = c_{10} = \dots = 0$ , uma vez que, pela equação de recorrência, cada coeficiente par é obtido a partir da multiplicação pelo coeficiente par anterior. Uma vez que  $c_1 = 0$ , temos que  $c_3 = c_5 = \dots = 0$ , pois, pela equação de recorrência, cada coeficiente ímpar é obtido a partir da multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior. Obtemos assim a solução

$$y_1(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$$

que de fato é um polinômio de grau  $N = 4$ .



Temos que  $y_2(x)$  satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \quad c_1 = y_2'(0) = 1$$

de modo que

$$y_2(x) = 0 + 1 \cdot x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Como  $c_0 = 0$ , temos que  $c_2 = c_4 = \cdots = 0$ , uma vez que, pela equação de recorrência, cada coeficiente par é obtido a partir da multiplicação pelo coeficiente par anterior. Também pela equação de recorrência, cada coeficiente ímpar é obtido do coeficiente ímpar anterior multiplicando por

$$\frac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)}$$

que nunca é igual a zero pois  $n$  é ímpar. Como  $c_1 = 1$ , todos os coeficientes ímpares são diferentes de zero de modo que a expressão

$$y_2(x) = x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots + c_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots$$

não é uma solução polinomial.

Vemos então que nem sempre encontramos um par de soluções fundamentais polinomiais. No próximo capítulo veremos como contornar esse problema. Ainda assim, lembramos que, conhecendo uma das soluções da EDO, podemos, a princípio, determinar as outras soluções por meio da fórmula de Abel.

## NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO

Para encontrar soluções polinomiais, será conveniente adotar a notação mais sucinta de somatório

$$y(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_N x^N$$

Uma vez que não sabemos de antemão o grau  $N$ , novamente vamos escrever

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

onde essa expressão só é um polinômio quando os coeficientes se anulam a partir de uma certa potência. Com a notação de somatório, podemos nos concentrar no que acontece com o termo geral  $c_n x^n$ .

### Proposição 1.16

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$  são polinômios, então

$$(S) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$$

$$(P) \quad x^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k}$$

**Prova:**

Uma vez que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \\ \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

somando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n &= \\ &= (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 + \cdots + (c_n + d_n)x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)x^n \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} x^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= x^k (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots) \\ &= c_0 x^k + c_1 x^{1+k} + c_2 x^{2+k} + \cdots + c_n x^{n+k} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k} \end{aligned}$$



Agora escrevemos a derivada de polinômios com a notação de somatório.

**Proposição 1.17**

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  é um polinômio, então

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

**Prova:**

Uma vez que a derivada da soma é a soma das derivadas, segue-se que

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

onde usamos que  $c_n$  é uma constante em relação a  $x$ . Para a derivada segunda, a demonstração é análoga. ■

Observe que podemos começar o somatório de  $y'(x)$  em  $n = 1$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

uma vez que sua parcela com  $n = 0$  é nula, enquanto podemos começar o somatório de  $y''(x)$  em  $n = 2$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

uma vez que suas parcelas com  $n = 0$  e  $n = 1$  são nulas.

Vamos ver como as propriedades acima funcionam num exemplo.



**Exemplo**

Considere o polinômio

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Queremos descobrir os coeficientes  $d_n$  do polinômio

$$y'(x) + x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

em termos dos coeficientes  $c_n$  do polinômio  $y(x)$ . Temos que

$$y'(x) + x^2 y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

de modo que

$$y'(x) + x^2 y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

Para escrever o lado direito num único somatório, reescrevemos cada um dos somatórios para que nos seus termos gerais apareça a potência  $x^n$ .

Uma vez que, no primeiro somatório, o coeficiente que multiplica a potência  $x^{n-1}$  é  $c_n n$ , então o coeficiente que multiplica a potência  $x^n$  é  $c_{n+1}(n+1)$ , de modo que

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$$

onde começamos o segundo somatório em  $n = 0$ , pois  $x^0$  é a primeira potência que aparece no primeiro somatório.

Uma vez que, no segundo somatório, o coeficiente que multiplica a potência  $x^{n+2}$  é  $c_n$ , então o coeficiente que multiplica a potência  $x^{n+1}$  é  $c_{n-1}$  e, portanto, o coeficiente que

multiplica a potência  $x^n$  é  $c_{n-2}$ , de modo que

$$x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

onde começamos o segundo somatório em  $n = 2$ , pois  $x^2$  é a primeira potência que aparece no primeiro somatório.

Segue-se que

$$y'(x) + x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

Como os somatórios não começam do mesmo  $n$ , separamos as potências que o segundo somatório tem a mais

$$\begin{aligned} x^2 y(x) + y'(x) &= c_1 + c_2 2x + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n \\ &= c_1 + c_2 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (c_{n+1} (n+1) + c_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

Segue-se que os coeficientes do polinômio de  $y'(x) + x^2 y(x)$  são

$$d_0 = c_1, \quad d_1 = c_2 2, \quad d_n = c_{n+1} (n+1) + c_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Vamos retornar à EDO da seção anterior, agora usando a notação de somatório.

### Exemplo

Consideremos novamente a equação de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + 8y(x) = 0$$

Para substituir a expressão

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

na EDO, temos que

$$\begin{aligned} 8y(x) &= 8 \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 8c_n x^n \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} -2xy'(x) &= -2x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -2c_n n x^n \end{aligned}$$

e que

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

Como o coeficiente que multiplica a potência  $x^{n-2}$  é  $c_n n(n-1)$ , então o coeficiente que multiplica a potência  $x^{n-1}$  é  $c_{n+1}(n+1)n$ , e o coeficiente que multiplica a potência  $x^n$  é  $c_{n+2}(n+2)(n+1)$ , de modo que

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

onde começamos o segundo somatório em  $n = 0$ , uma vez que  $x^0$  é a primeira potência que aparece no primeiro somatório.

Assim a EDO é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (8c_n - 2nc_n + c_{n+2}(n+2)(n+1))x^n = 0$$

Para essa igualdade valer para todo  $x$ , os coeficientes do polinômio acima devem ser todos zero, de modo que

$$8c_n - 2nc_n + c_{n+2}(n+2)(n+1) = 0$$

para todo  $n \geq 0$ . Isolando  $c_{n+2}$  nessa equação, obtemos novamente a equação de recorrência

$$c_{n+2} = \frac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)}c_n$$

Conhecendo  $c_0$  e  $c_1$ , podemos usar essa equação de recorrência para obter todos os outros coeficientes  $c_n$  da solução polinomial  $y(x)$ , como já fizemos.



## SÉRIES DE POTÊNCIAS

No capítulo anterior, procuramos soluções polinomiais de EDOs e vimos que esse método nem sempre funciona, uma vez que apareceram somas de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

com infinitos coeficientes  $c_n$  não nulos. Neste capítulo vamos dar sentido para essas somas infinitas de potências, as denominadas *séries de potências*, ampliando o alcance desse método de solução de EDOs e, ao mesmo tempo, ampliando nosso repertório de funções. Vamos começar com um exemplo.

### Exemplo

No capítulo anterior, vimos como resolver o PVI de primeira

ordem

$$\begin{cases} (1-x)y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Para procurarmos uma solução polinomial  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  do PVI, substituímos na EDO

$$\begin{aligned} (1-x)y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - nc_n)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências, obtemos a equação de recorrência

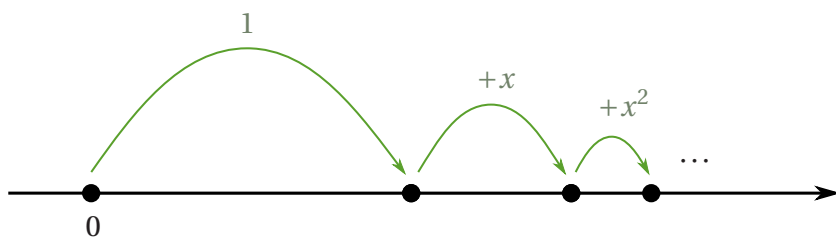
$$c_{n+1} = \frac{n+1}{n+1}c_n = c_n$$

Pela condição inicial temos que  $c_0 = 1$ , de modo que, pela equação de recorrência, concluímos que  $c_n = 1$  para todo  $n$ . Como os coeficientes são todos não nulos, a expressão

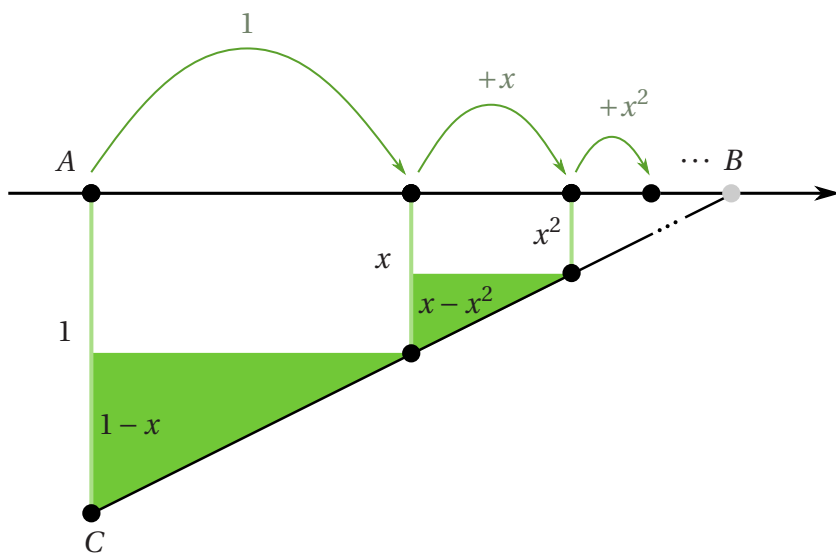
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

não é um polinômio, mas sim a soma de todos os termos da progressão geométrica de razão  $x$ . Será que podemos dar sentido para essa expressão de modo que ela seja de fato solução da EDO?

Se  $x$  é um número entre 0 e 1, a potência  $x^n$  fica cada vez menor à medida que  $n$  cresce.



Podemos então obter uma expressão simples para essa soma infinita a partir da semelhança dos seguintes triângulos retângulos



Observe que as hipotenusas do primeiro e do segundo triângulos destacados têm a mesma inclinação, pois

$$\frac{1-x}{1} = \frac{x-x^2}{x}$$

Como elas têm um ponto em comum, essas duas hipotenusas formam uma reta. Repetindo esse raciocínio, obtemos uma reta de  $C$  até  $B$  e, portanto, um triângulo retângulo  $ABC$  tal



que  $AC = 1$  e

$$AB = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

Como o triângulo  $ABC$  é semelhante ao primeiro triângulo verde, segue-se que  $AB$  está para  $AC$  assim como 1 está para  $1 - x$ . Segue que, para  $x \in [0, 1)$ , temos

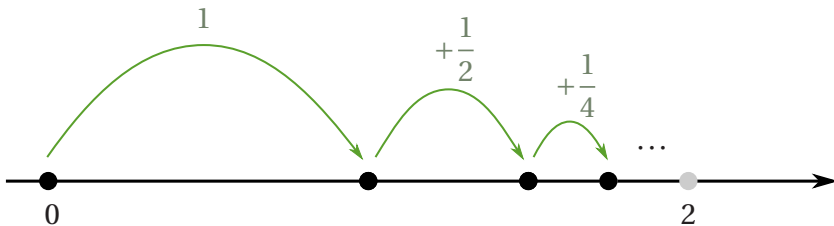
$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (2.1)$$

Note que  $y(x) = \frac{1}{1-x}$  de fato é solução do PVI, pois  $y(0) = 1$  e

$$(1-x)y'(x) = (1-x) \frac{1}{(1-x)^2} = y(x)$$

Entretanto, note que a igualdade (2.1) foi obtida apenas para  $x \in [0, 1)$ . Por exemplo, para  $x = \frac{1}{2}$  temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$



Por outro lado, para  $x = 1$ , nenhum dos lados da igualdade tem valor real.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \frac{1}{1-1}$$

Já para  $x = 2$ , o lado esquerdo é infinito, enquanto o lado direito é  $-1$ .

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$$

Veremos que a igualdade (2.1) de fato é válida se, e somente se,  $x \in (-1, 1)$ .

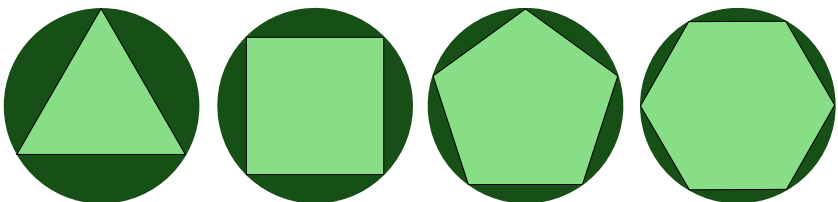
Para dar sentido às somas infinitas de potências, primeiro vamos dar sentido às somas infinitas de números reais. Faremos isso por meio de aproximações sucessivas.

## 2.1 SEQUÊNCIAS

O limite de sequências expressa a ideia de aproximações sucessivas, que é uma das ideias fundamentais do Cálculo 2.

### Exemplo

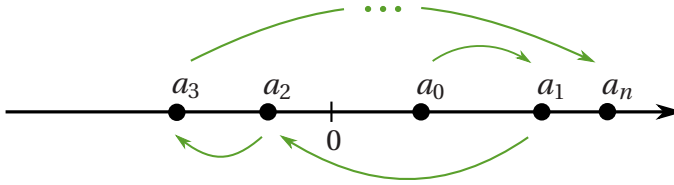
Podemos aproximar a área de uma circunferência de raio 1 pela área  $a_n$  do polígono regular de  $n$  lados inscrito nessa circunferência: quanto maior o número  $n$  de lados, mais próximo a área  $a_n$  fica da área da circunferência.



Uma *sequência* é uma lista ordenada e infinita de números reais

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

que podemos visualizar como uma progressão infinita de pontos da reta real.

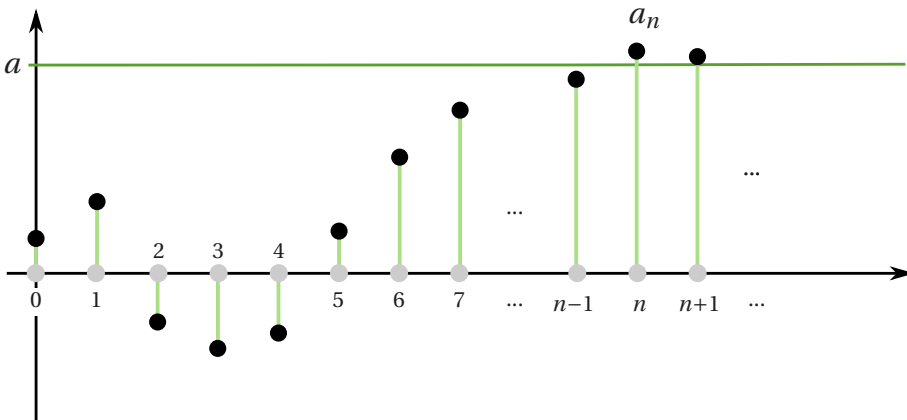


Denominamos  $a_0$  de 0-ésimo termo da sequência,  $a_1$  de 1-ésimo termo da sequência,  $a_2$  de 2-ésimo termo da sequência e assim por diante. Numa posição genérica  $n$ , aparece o  $n$ -ésimo termo da sequência  $a_n$ , denominado *termo geral da sequência*. Muitas vezes, denotamos a sequência acima simplesmente pelo seu termo geral  $a_n$ .

Uma sequência  $a_n$  pode começar em  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$  etc.: em geral não nos interessa os valores dos primeiros termos de uma sequência  $a_n$ , mas sim seu valor limite: o valor do qual  $a_n$  se aproxima à medida que  $n$  cresce para o infinito. Para isso, notamos que uma sequência é uma função de  $n$ , o que podemos escrever como  $a_n = a(n)$ , onde  $n$  varia nos números naturais. Definimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a(n)$$

de modo análogo ao limite no infinito de funções reais.



Em geral, quando não houver risco de mal entendidos, o limite de  $a_n$  será denotado simplesmente por

$$\lim a_n = a$$

ficando subentendido que  $n \rightarrow \infty$ . Também usaremos a notação

$$a_n \rightarrow a$$

que pode ser lida como  $a_n$  tende para seu limite  $a$ .

As propriedades de limite de sequências são análogas às de limite de funções reais. Enunciamos algumas delas abaixo para em seguida ilustrá-las com exemplos.

### Proposição 2.1

- **Operações:**

(i) Se  $\lim a_n = a$  e  $\lim b_n = b$ , então

$$\lim a_n + b_n = a + b, \quad \lim a_n b_n = ab, \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

(ii) Se  $a_n$  é limitada e  $b_n \rightarrow \pm\infty$ , então

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$$

- **Desigualdades:**

(i) Se  $a_n \geq b_n$ , então

$$\lim a_n \geq \lim b_n$$

(ii) (*Sanduiche*) Se  $a_n \leq c_n \leq b_n$  e  $\lim a_n = \lim b_n = c$ , então

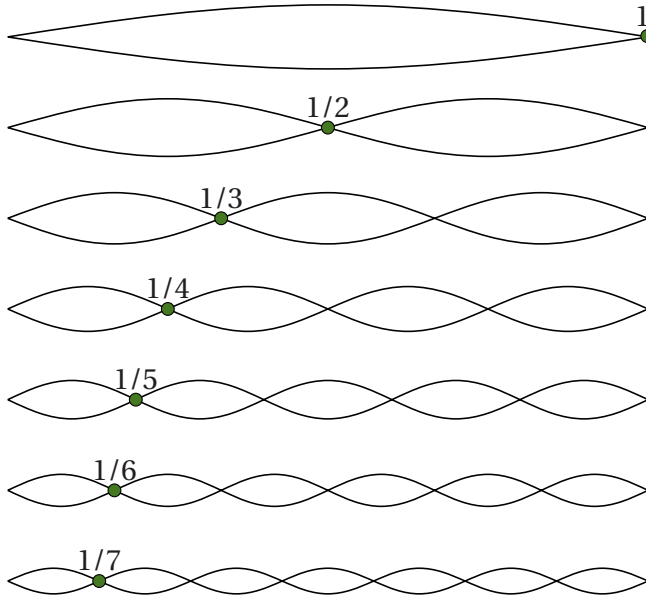
$$\lim c_n = c$$

(iii) Se  $a_n$  é crescente e limitada, então existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim a_n = a$$

### Exemplos

1) Considere uma corda de um instrumento musical vibrando presa a duas extremidades. No primeiro harmônico dessa corda, o primeiro nó ocorre apenas na outra extremidade. No segundo harmônico dessa corda, o primeiro nó ocorre na metade da corda. No terceiro harmônico dessa corda, o primeiro nó ocorre em um terço da corda, e assim em diante.



Isso dá origem à *sequência harmônica*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Claramente, temos

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

pois é um limite do tipo limitado sobre infinito.

2) Temos que  $a_n = n$  é a sequência dos números naturais

$$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

que  $b_k = 2k$  é a sequência dos números pares

$$0, 2, 4, 6, \dots, 2k, \dots$$

e que  $c_k = 2k + 1$  é a sequência dos números ímpares

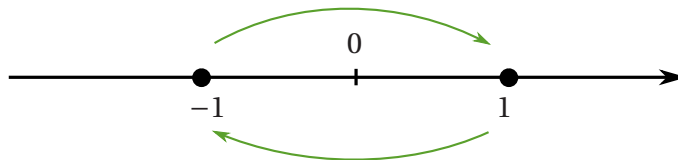
$$1, 3, 5, 7, \dots, 2k + 1, \dots$$

Claramente, temos

$$\lim a_n = \lim b_k = \lim c_k = \infty$$

3) Considere a sequência alternada  $a_n = (-1)^n$

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$



Observe que

$$a_{2n} = 1 \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = -1$$

Temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  não existe, uma vez que a sequência alternada não se aproxima de nenhum valor à medida que  $n$

cresce para o infinito.

4) Considere a sequência

$$a_n = \frac{10^n}{n!}$$

Para os primeiros termos dessa sequência, temos que

$$a_0 = 1 < a_1 = 10 < a_2 = \frac{100}{2!} = 50 < a_3 = \frac{1000}{3!} = 166,6\dots$$

o que dá a impressão de que  $a_n$  tenderia ao infinito. Mas, de fato, ela cresce até  $n = 10$  e depois decresce para zero. Para ver isso, primeiro expandimos

$$a_n = \frac{10^n}{n!} = \frac{10}{n} \cdot \frac{10}{n-1} \cdots \frac{10}{2} \cdot \frac{10}{1}$$

e observamos que não podemos usar a regra do produto para calcular esse limite, uma vez que o número de fatores é cada vez maior e essa regra só vale para um número fixo de fatores.

Para determinar esse limite, o que fazemos é eliminar todos os fatores menores do que um, com a exceção do menor deles, de modo a obter um número fixo de fatores. Observe que, para  $n > 10$ , temos que

$$a_n = \frac{10^n}{n!} = \frac{10}{n} \cdot \underbrace{\frac{10}{n-1} \cdots \frac{10}{11}}_{\text{cada fator} \leq 1} \cdot \frac{10^{10}}{10!} \leq \frac{10}{n} \cdot \frac{10^{10}}{10!}$$

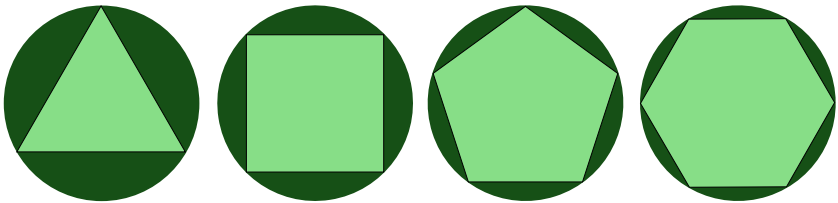
de onde se segue que

$$0 \leq a_n \leq \frac{10}{n} \cdot \frac{10^{10}}{10!}$$

Como  $10/n \rightarrow 0$ , e  $10^{10}/10!$  é uma constante, segue do teorema do Sanduíche que

$$\lim a_n = 0$$

5) A sequência  $a_n =$  área do polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência de raio 1 é crescente e limitada. Segue-se que existe  $\lim a_n$  que, nesse caso, é igual à área da circunferência. Essa foi a maneira que os gregos usaram para obter aproximações rigorosas de  $\pi$ .



As propriedades abaixo permitem calcular o limite de algumas sequências com limites de funções reais do Cálculo 1, usando continuidade ou a regra L'Hospital.

### Proposição 2.2

- **Funções:**

(i) Se  $f(x)$  é contínua num intervalo e não depende de  $n$ , então podemos *passar o limite para dentro* da função

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$$

desde que o limite da sequência exista.



(ii) Se  $a_n = a(n)$  e  $b_n = b(n)$  são funções deriváveis em  $n$ , então

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(a_n)'}{(b_n)'}$$

onde  $(a_n)'$  e  $(b_n)'$  denotam as derivadas em relação a  $n$ , desde que tenhamos indeterminações do tipo  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ , isto é

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad \text{ou} \quad \lim a_n = \lim b_n = \pm\infty$$

### Exemplos

1) Considere o limite  $\lim \sqrt[n]{e}$ . Escrevendo

$$e^x = \exp(x)$$

temos que

$$\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

de modo que

$$\lim \sqrt[n]{e} = \lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\lim \frac{1}{n}\right) = \exp(0) = 1$$

onde podemos passar o limite para dentro de  $\exp(x)$ , pois essa é uma função contínua.

2) Temos que

$$\lim \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log\left(\lim \frac{n}{n+1}\right) = \log(1) = 0$$

onde passamos o limite para dentro de  $\log(x)$ , pois essa é uma

função contínua, e usamos que

$$\lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{(n)'}{(n+1)'} = \lim \frac{1}{1} = 1.$$

pois

$$\lim n = \infty = \lim n + 1.$$

3) Considere o limite  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Observe que não podemos passar o limite para dentro

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim 1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

uma vez que a função  $x^n$  depende de  $n$ . Além disso, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

no entanto, novamente, não podemos aplicar a regra do produto para calcular esse limite. De fato, o número de fatores nessa expressão é cada vez maior, já a regra do produto vale apenas para um número fixo de fatores.

O que fazemos quando base e expoente variam com  $n$  é colocá-los no mesmo patamar, aplicando exp e log

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp \left( \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = \exp \left( n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

como  $\exp(x)$  é contínua e não depende de  $n$ , agora sim podemos passar o limite para dentro

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp \left( \lim n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$$

onde

$$\lim n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \lim \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}}$$

é uma indeterminação do tipo  $0/0$ . Aplicando L'Hospital, obtemos

$$\lim \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left( -\frac{1}{n^2} \right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Voltando ao limite original, segue-se que

$$\lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp(1) = e$$

Vemos então que o cálculo do limite de algumas sequências pode ser bem diferente do cálculo do limite de funções de um primeiro curso de cálculo.

Observe que, para o limite de uma sequência, não importa onde ela “começa”, os primeiros valores de  $a_n$ , mas sim onde a sequência “termina”, os valores de  $a_n$  quando  $n$  tende ao infinito. Em particular, se  $\lim a_n$  existe, então

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} \quad \text{e} \quad \lim a_n = \lim a_{n-1}$$

pois quando  $n$  tende ao infinito, ambos  $n - 1$  e  $n + 1$  também tendem ao infinito. Vamos agora aplicar alguns desses resultados de limite para analisar um exemplo interessante de sequência.

## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Considere a denominada *sequência de Fibonacci*  $a_n$  dada da seguinte maneira: seus dois primeiros passos são iguais a um, ou seja,  $a_1 = a_2 = 1$ . Para obtermos os demais passos, utilizamos a seguinte recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Os 10 primeiros passos dessa sequência são apresentados na seguinte lista

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Essa sequência é claramente crescente e possui limite infinito. Entretanto, é possível mostrar que a razão de crescimento de um termo para o termo seguinte

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$$

dada pela *sequência das razões de Fibonacci*

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

é convergente. Vamos aqui obter o valor do limite de  $r_n$  supondo que  $r_n$  converge. Em primeiro lugar observamos que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= 1 + \frac{1}{r_n}, \end{aligned}$$

o que mostra que  $r_n$  satisfaz a seguinte recorrência

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$$

Suponha que  $r_n \rightarrow \phi$ , vamos determinar qual o valor de  $\phi$ . Pelas regras da soma e do quociente, segue-se que

$$\lim r_{n+1} = 1 + \frac{1}{\lim r_n}$$

Por outro lado, se  $n \rightarrow \infty$ , então  $n + 1 \rightarrow \infty$ , de modo que

$$\lim r_{n+1} = \lim r_n = \phi$$

e então

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

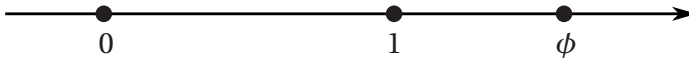
Multiplicando a igualdade acima por  $\phi$ , temos que esse limite é solução da seguinte equação quadrática

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

cuja única solução positiva é

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

denominada *razão áurea*. Esse número mágico, conhecido desde a antiguidade, é obtido geometricamente dividindo-se um dado segmento em dois pedaços, de modo que a proporção entre o todo, igual a  $\phi$ , e a parte maior, igual a 1, coincida com a proporção entre a parte maior e a parte menor, igual a  $\phi - 1$ , como ilustrado na figura abaixo.



A razão áurea  $\phi$  é então qualquer uma dessas duas proporções idênticas e satisfaz

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}$$

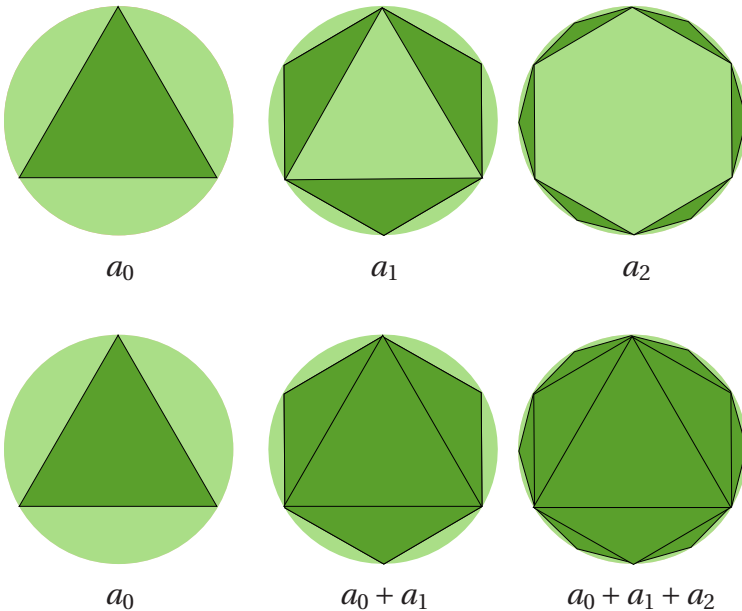
Como curiosidade, observe que podemos escrever nossa conclusão como

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Vamos agora usar sequências para definir rigorosamente somas de infinitas parcelas.

## 2.2 SÉRIES

As séries expressam a ideia de somas com infinitas parcelas, que é um dos princípios fundamentais apresentados neste livro. Por exemplo, para aproximar a área de uma circunferência de raio 1 usando apenas a área de triângulos, basta iniciar com a área  $a_0$  do triângulo inscrito. A essa área, some-se a área  $a_1$  de três triângulos apoiados nos lados do triângulo anterior. A essas duas áreas, some-se a área  $a_2$  de seis triângulos apoiados nos lados dos triângulos anteriores, e assim em diante.



Quanto maior  $n$ , mais próxima a soma  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$  fica da área da circunferência. Assim, a soma das infinitas parcelas  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  seria a área da circunferência. Mas o que seria uma soma de infinitas parcelas?

Mais geralmente, dada uma sequência  $a_n$ , queremos analisar a soma dos seus infinitos termos

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

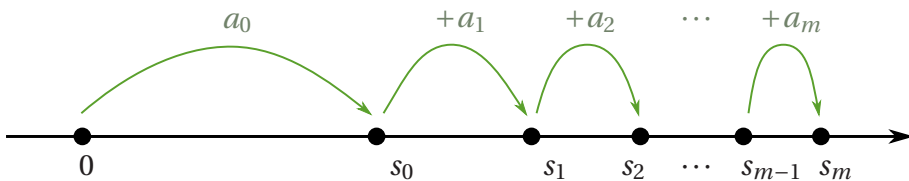
denominada de *série de  $a_n$* . Para isso, a partir da lista horizontal original

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

denominada agora *sequência das parcelas* da série de  $a_n$ , consideramos a seguinte lista vertical

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_m &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m \\ &\vdots \end{aligned}$$

denominada *sequência das somas parciais* da série de  $a_n$ , cujo termo geral  $s_m$  é denominado  *$m$ -ésima soma parcial de  $a_n$* .



A série de  $a_n$  é definida pelo limite das somas parciais de  $a_n$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Observe que fazemos essa soma infinita de modo seriado: somando primeiro  $a_0$ , depois somando  $a_1$ , depois somando  $a_2$  e assim em diante.

Por isso damos a essa soma infinita o nome de série. Muitas vezes, será conveniente utilizarmos a notação de somatório.

### Notação

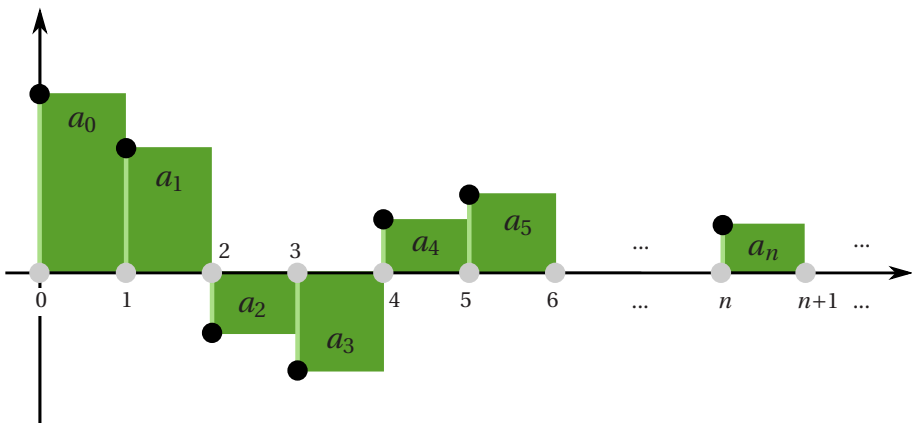
1) A  $m$ -ésima soma parcial de  $a_n$  é denotada por

$$s_m = \sum_{n=0}^m a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

2) A série de  $a_n$  é denotada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Uma maneira de visualizar uma série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é visualizar a sequência das parcelas  $a_n$  como uma função de  $n$ , e observar que o valor de cada parcela  $a_n$  pode ser visualizado como a área de um retângulo de altura  $a_n$  e base 1. Assim, a série pode ser visualizada como a soma da área de todos esses retângulos.



Temos as seguintes definições básicas sobre séries numéricas.



## Definições

Dizemos que a série numérica

- 1) **Converge:** Quando  $\lim s_m = s \in \mathbb{R}$  e escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

- 2) **Diverge:** Quando  $\lim s_m$  não existe ou quando  $\lim s_m = \pm\infty$ .  
Nesse último caso escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$$

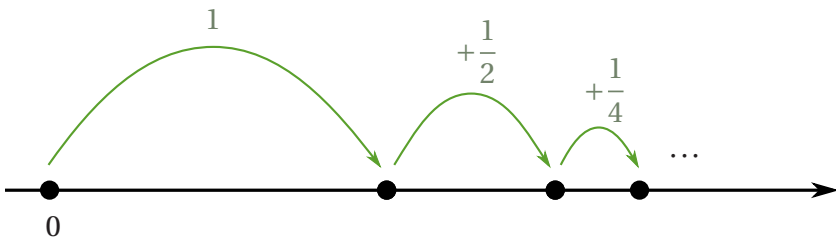
e dizemos que a série *diverge para*  $\pm\infty$ .

## Exemplos

- 1) A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

é a soma de *todos* os termos da progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .



A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

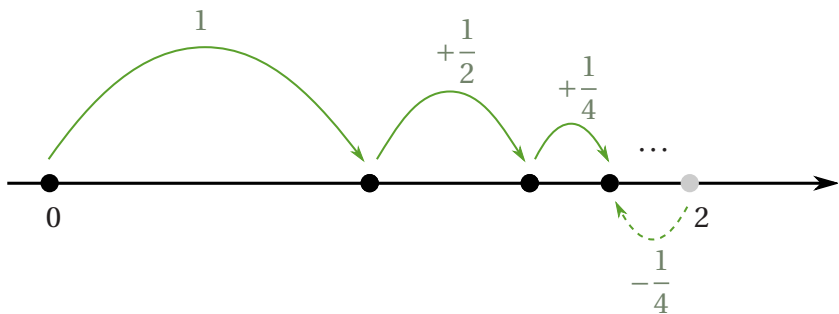
$$\vdots$$

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m}$$

$$\vdots$$

É possível observar geometricamente que

$$s_m = 2 - \frac{1}{2^m}$$



o que será provado mais adiante. Segue-se que

$$\lim s_m = 2$$

de modo que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2.$$

converge.

2) Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + 1 \\ s_3 &= 1 + 1 + 1 \\ &\vdots \\ s_m &= \overbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}^{m \text{ vezes}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\lim s_m = \lim m = \infty$$

de modo que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \infty.$$

diverge para  $\infty$ .

3) Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1 - 1 = 0 \\ s_2 &= 1 - 1 + 1 = 1 \\ s_3 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ &\vdots \\ s_m &= \begin{cases} 1, & m \text{ par} \\ 0, & m \text{ ímpar} \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Segue-se que  $\lim s_m$  não existe, de modo que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

apenas diverge.

Se a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge, é intuitivo que as parcelas  $a_n$  da soma se tornam cada vez menores. De fato, temos o seguinte resultado.

### Proposição 2.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim a_n = 0$$

**Prova:**

Como a série converge, temos que  $\lim s_m = s \in \mathbb{R}$ . Assim, as somas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

Subtraindo, temos que

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

de modo que

$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0.$$

uma vez que

$$\lim s_n = s = \lim s_{n-1}$$

**TESTE DA DIVERGÊNCIA**

O resultado anterior anterior implica o seguinte critério para a divergência de uma série numérica.

**Proposição 2.4: Teste da divergência**

$$\lim a_n \begin{cases} \neq 0 & \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \\ = 0 & \implies \text{inconclusivo} \end{cases}$$

**Prova:**

Se a série convergisse, pelo resultado anterior, deveríamos ter  $\lim a_n = 0$ . Logo, se  $\lim a_n \neq 0$ , a série não pode convergir, ou seja, ela diverge. Quando  $\lim a_n = 0$ , tanto a série pode convergir, como no caso da série geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ , quanto a série pode divergir, como no caso da série harmônica, que será analisada adiante. ■

**Exemplos**

1) Temos, pelo Teste da Divergência, que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

diverge, pois o limite de suas parcelas é  $\lim 1 \neq 0$ .

2) Temos, pelo Teste da Divergência, que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

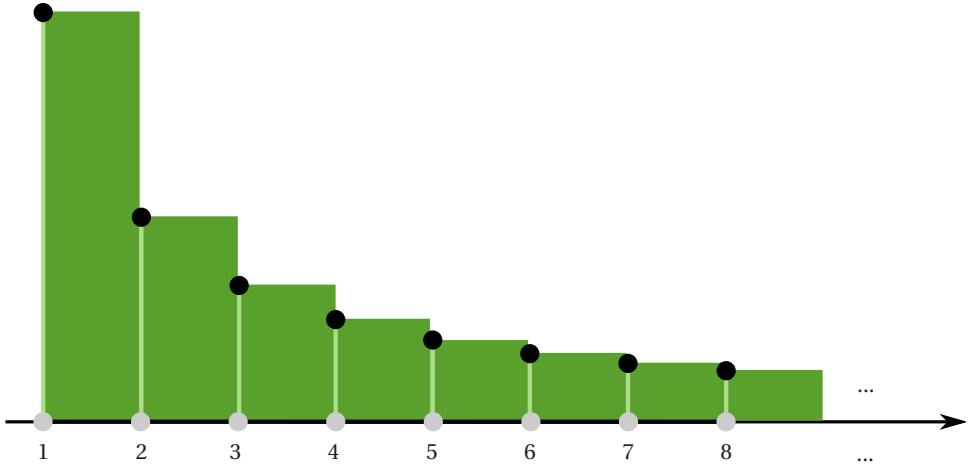
diverge, pois o limite de suas parcelas é  $\lim(-1)^n \neq 0$ .

Observe que, nos exemplos acima, pudemos concluir que as séries em questão divergem sem se considerar suas somas parciais: olhamos apenas para o termo geral e, como ele não tende a zero, a série diverge. Porém, o Teste da Divergência é inconclusivo quando as parcelas tendem a zero.

## SÉRIE HARMÔNICA

A *série harmônica* é dada pela soma dos termos da sequência harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$



A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &\vdots \\ s_m &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Suas parcelas são tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

mas, ainda assim, vale o seguinte resultado.

### Proposição 2.5

A série harmônica diverge, mais precisamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

### Prova:

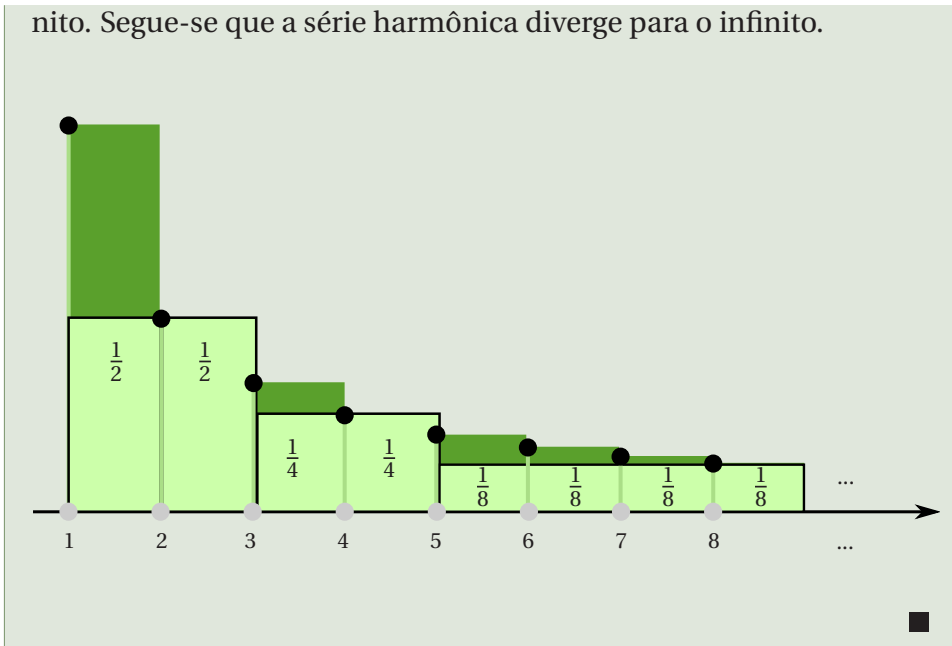
Vamos dar uma ideia da demonstração: uma maneira mais rigorosa de provar isso será vista mais adiante. A ideia é organizar os termos da soma infinita da série da seguinte maneira (veja figura abaixo)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 && \geq \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{2} && \geq \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} && \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} && \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{16} && \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

de modo que, somando um número suficiente de termos, as somas parciais da série crescem de meio em meio e assim tendem ao infi-



nito. Segue-se que a série harmônica diverge para o infinito.



## SÉRIES TELESCÓPICAS

Uma série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é denominada *telescópica* quando seu termo geral é da forma

$$a_n = r_n - r_{n+1}$$

A sequência das suas parcelas é dada por

$$r_0 - r_1, \quad r_1 - r_2, \quad r_2 - r_3, \dots, r_n - r_{n+1}, \dots$$

Nesse tipo de série, há o cancelamento da segunda parte de cada termo com a primeira parte do termo seguinte, de modo que, nas somas parciais, sobram apenas a primeira parte do primeiro termo e a segunda

parte do último termo.

$$s_0 = r_0 - r_1$$

$$s_1 = (r_0 - r_1) + (r_1 - r_2) = r_0 - r_2$$

$$s_2 = (r_0 - r_1) + (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3) = r_0 - r_3$$

⋮

$$s_m = (r_0 - r_1) + (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3) + \cdots + (r_m - r_{m+1}) = r_0 - r_{m+1}$$

⋮

Temos então que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = r_0 - \lim r_{m+1}$$

quando esse limite existe. As séries telescópicas são um dos raros casos onde conseguimos determinar o valor da série, quando ela converge.

### Exemplos

1) A série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \cdots$$

converge ou diverge?

Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0$$

de modo que o Teste da Divergência é inconclusivo. Sua  $m$ -ésima soma parcial é dada por

$$s_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m(m-1)}$$

Uma vez que o termo geral se decompõe em duas partes

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

segue-se que, em cada soma parcial

$$\begin{aligned} s_m &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{m-1}\right) + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{m} \end{aligned}$$

sobram apenas a primeira parte do primeiro termo e a segunda parte do último termo. Segue-se que

$$\lim s_m = \lim 1 - \frac{1}{m} = 1$$

de modo que a série converge e, mais ainda, que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

## 2) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) + \log\left(\frac{4}{5}\right) + \dots$$

converge ou diverge?

Temos que

$$\lim \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

de modo que o Teste da Divergência é inconclusivo. Sua  $m$ -ésima soma parcial é dada por

$$s_m = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{m}{m+1}\right)$$

Uma vez que o termo geral se decompõe em duas partes

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log(n) - \log(n+1)$$

segue-se que em cada soma parcial

$$\begin{aligned} s_m &= (\log(1) - \log(2)) + (\log(2) - \log(3)) + (\log(3) - \dots \\ &\quad \dots - \log(m)) + (\log(m) - \log(m+1)) \\ &= -\log(m+1) \end{aligned}$$

sobra apenas a segunda parte do último termo. Segue-se que

$$\lim s_m = \lim -\log(m+1) = -\infty$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\infty$$

## SÉRIES GEOMÉTRICAS

A soma de *todos* os termos da progressão geométrica de razão  $x$  fornece a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

conhecida como *série geométrica de razão  $x$* . A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1 + x \\ s_2 &= 1 + x + x^2 \\ &\vdots \\ s_m &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^m \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para que valores da razão  $x$  a série converge?

Primeiro vamos investigar para que valores de  $x$  as parcelas tendem a zero.

### Proposição 2.6

Temos que

$$|x| \begin{cases} < 1 & \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \\ \geq 1 & \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \neq 0 \end{cases}$$

### Prova:

Se  $x = 0$ , então  $x^n = 0$  para todo  $n$ , de modo que  $\lim x^n = 0$ . Logo, podemos supor que  $x \neq 0$ . Temos que

$$\begin{aligned} |x^n| &= |x|^n \\ &= e^{\log|x|^n} \\ &= e^{n \log|x|} \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log|x|} = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

uma vez que

$$\begin{cases} \log|x| < 0, & |x| < 1 \\ \log|x| = 0, & |x| = 1 \\ \log|x| > 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

O resultado segue, pois,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x^n| = 0$$

se, e só se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$



Agora vamos determinar para quais razões  $x$  a série geométrica converge.

### Proposição 2.7

Temos que

$$|x| \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \\ \geq 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ diverge} \end{cases}$$

### Prova:

Se  $|x| \geq 1$ , temos que  $\lim x^n \neq 0$ , de modo que, pelo Teste da Divergência,  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  diverge.

Se  $|x| < 1$ , temos que  $\lim x^n = 0$ , de modo que o Teste da Divergência é inconclusivo. Consideramos então as somas parciais

$$s_m = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m$$

e observamos que

$$x s_m = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{m+1}$$

se parece muito com  $s_m$ . De fato, subtraindo um do outro,

$$(1 - x) s_m = 1 - x^{m+1}$$

Como  $1 - x \neq 0$ , podemos isolar  $s_m$  e obter

$$s_m = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$$

Pelas regras de limite, segue-se que

$$\lim s_m = \frac{1}{1 - x}.$$

onde usamos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{m+1} = 0$ . Isso mostra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

quando  $|x| < 1$ , como queríamos. ■

As séries geométricas são mais um dos raros casos onde conseguimos determinar o valor da série, quando ela converge.

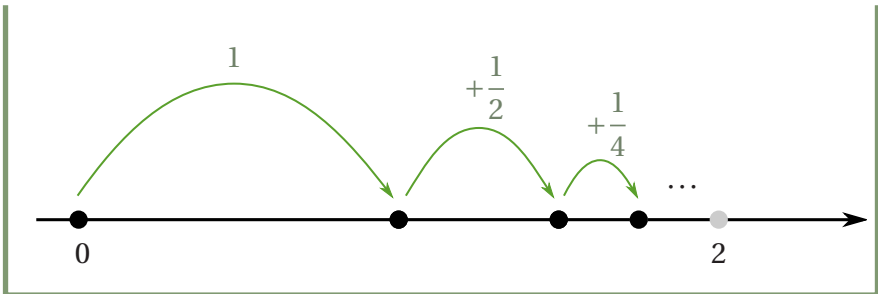
### Exemplos

1) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

é a série geométrica de razão  $1/2$ , portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

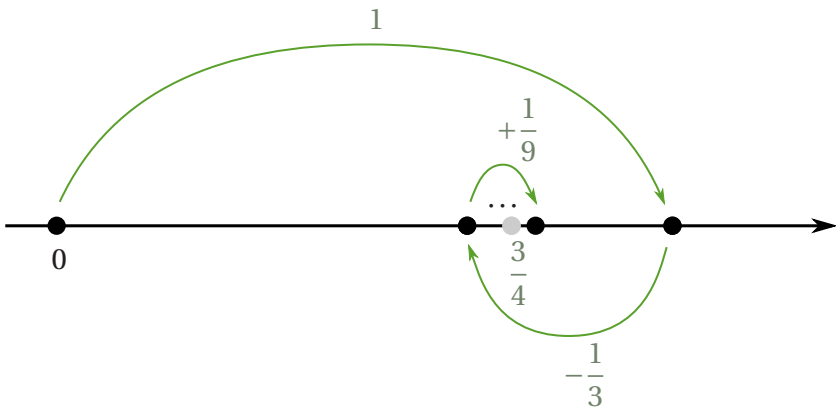


2) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n} + \dots$$

é a série geométrica de razão  $-1/3$ , portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$$



3) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + \dots$$

é a série geométrica de razão 2, portanto, diverge, uma vez que



$$|2| \geq 1.$$

4) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

é a série geométrica de razão  $-1$ , portanto, diverge, uma vez que  $|-1| = 1 \geq 1$ .

Agora que vimos alguns exemplos importantes de séries, vamos considerar algumas operações importantes com elas.

## OPERAÇÕES COM SÉRIES

Quando as séries são convergentes, a soma de duas séries e o produto de uma série por uma constante sempre podem ser escritos como uma nova série.

### Proposição 2.8

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  convergem, então

(S)  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

(C)  $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$  converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)$$

onde  $c$  é uma constante.

### Prova:

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  convergem, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

são números reais.

(S) Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m (a_n + b_n) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_m + b_m) \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_m) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_m) \\ &= \sum_{n=0}^m a_n + \sum_{n=0}^m b_n \end{aligned}$$

Usando a regra do limite da soma, segue-se que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m (a_n + b_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m b_n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Para  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)$ , a prova é a mesma.

(C) Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m c a_n &= c a_0 + c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_m \\ &= c(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \\ &= c \sum_{n=0}^m a_n \end{aligned}$$

Usando a regra do limite do produto, segue-se que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c a_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m c a_n \\ &= c \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n \\ &= c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{aligned}$$



### Exemplos

1) Combinando duas séries geométricas que convergem, temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{(-1)^n}{3^n} \right) &\stackrel{(S)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{3} \right)^n \\ &= 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

2) A seguinte série se parece com uma geométrica de razão  $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \\ &\stackrel{(C)}{=} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} 2 = 1\end{aligned}$$

logo, ela converge para 1. De outro modo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} \\ &\stackrel{(C)}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} 2 = 1\end{aligned}$$

3) A seguinte série se parece com uma geométrica de razão  $\frac{1}{3}$ , mas começa dois termos adiante

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots \\ &\stackrel{(C)}{=} \frac{1}{9} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{9} \frac{3}{2} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

logo ela converge para  $\frac{1}{6}$ . De outro modo

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^2} \frac{1}{3^n} \\ &\stackrel{(C)}{=} \frac{1}{3^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \right) = \\ &= \frac{1}{9} \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

## 2.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Agora podemos definir rigorosamente um polinômio infinito como a série de potências

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

Mais precisamente, fixando um valor para  $x$ , consideramos as parcelas

$$c_0, c_1x, c_2x^2, \dots, c_nx^n, \dots$$

e as somas parciais

$$\begin{aligned} s_0 &= c_0 \\ s_1 &= c_0 + c_1x \\ s_2 &= c_0 + c_1x + c_2x^2 \\ &\vdots \\ s_m &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, uma série de potências é o somatório infinito de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

com infinitos *coeficientes*

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$$

Para cada valor fixado de  $x$ , obtemos uma série numérica. Dizemos que a série de potências converge em  $x$  quando essa série numérica converge.

Uma série de potências também pode ser vista como uma função de  $x$ . Nesse ponto, é conveniente fazermos uma analogia com o conceito de função derivada, abordado no início do curso de Cálculo 1. A derivada de uma função  $f(x)$  no ponto  $x$  é definida pelo limite do quociente de Newton de  $f(x)$  entre  $x$  e  $x + h$  quando  $h$  tende a zero, dado por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

quando esse limite existe. A partir da definição de derivada num dado ponto, podemos construir a denominada *função derivada de  $f(x)$* , denotada por  $f'(x)$ , que é dada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Quando o quociente de Newton pode ser desenvolvido e simplificado, o limite que define a função derivada pode ser determinado como uma função conhecida de  $x$ .

### Exemplo

Considerando  $f(x) = x^2$ , temos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Como

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

temos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

Em relação às séries de potências, a situação é parecida. A série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  no ponto  $x$  é definida pelo limite da sua  $m$ -ésima soma parcial quando  $m$  tende para infinito, dado por

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m c_n x^n$$

A partir da definição de série de potências num dado ponto, podemos construir a denominada *função série de potências*, denotada por  $f(x)$ , que é dada por

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m c_n x^n$$

Quando  $m$ -ésima soma parcial pode ser desenvolvida e simplificada, o limite que define a função série de potências pode ser determinado como uma função conhecida de  $x$ .

### Exemplo

Considerando a série geométrica de razão  $x$ , dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

temos que

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m x^n$$

Como

$$\sum_{n=0}^m x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^m = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$$

temos que

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

para todo  $x$  tal que  $|x| < 1$ . Quando  $x$  é tal que  $|x| \geq 1$ , esse limite é infinito ou não existe.

O domínio da função

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

são os valores de  $x$  para os quais o limite que define  $f(x)$  existe e é um número real, ou seja, é o conjunto

$$\text{dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{a série numérica } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge} \right\}$$

Observe que 0 sempre está no domínio de uma série de potências, uma vez que, para  $x = 0$ , temos que a série

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + \dots + c_n \cdot 0^n + \dots \\ &= c_0 \end{aligned}$$

converge.

### Exemplos

1) A série geométrica de razão  $x$  é uma série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$



com coeficientes

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

e tem domínio

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ converge} \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \\ &= (-1, 1) \end{aligned}$$



uma vez que a série geométrica converge apenas para esses valores de  $x$ . Já vimos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

para todo  $x \in (-1, 1)$ .

**2)** Todo polinômio  $p(x)$  é uma série de potências. De fato, um polinômio de grau  $N$  é da forma

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

com coeficientes  $c_n = 0$  para  $n$  maior que  $N$ , e tem domínio

$$\begin{aligned} \text{dom}(p) &= \left\{ x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge} \right\} \\ &= \mathbb{R} \\ &= (-\infty, \infty) \end{aligned}$$



uma vez que  $p(x)$  é uma soma finita.

3) Considere a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots$$

com coeficientes

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Note que o termo constante é nulo e por isso  $c_0 = 0$ . Para que valores de  $x$  ela converge? Isto é, qual o domínio de  $f(x)$ ?

Por exemplo, para  $x = 1$  obtemos a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

que diverge.

## OPERAÇÕES COM SÉRIES DE POTÊNCIAS

Assim como os polinômios, a soma de duas séries de potências é uma série de potência, assim como o produto de uma série de potências por uma potência também é uma série de potências.

### Proposição 2.9

Se, para  $x$ , as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$  convergem, então

$$(S) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$$

$$(P) x^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k}$$

**Prova:**

Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n + d_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$$

e também que

$$x^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^k c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k}$$

**Exemplo**

Temos que

$$\begin{aligned} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^3 x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n \end{aligned}$$

onde fizemos uma mudança de índice na última igualdade.

Expandindo, temos que

$$x^3 \left( 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \right) = x^3 + x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3!}x^6 + \dots$$

Vimos acima que precisamos de mais ferramentas para determinar o domínio de uma série de potências, que é o que desenvolveremos a seguir.

## 2.4 TESTES DE CONVERGÊNCIA

Vamos desenvolver critérios indiretos que, em algumas situações, vão nos permitir decidir se uma dada série numérica converge ou diverge sem precisarmos manipular suas somas parciais. A limitação desses critérios indiretos é que não vamos saber o valor para o qual a série converge ou diverge, mas apenas se ela converge ou diverge.

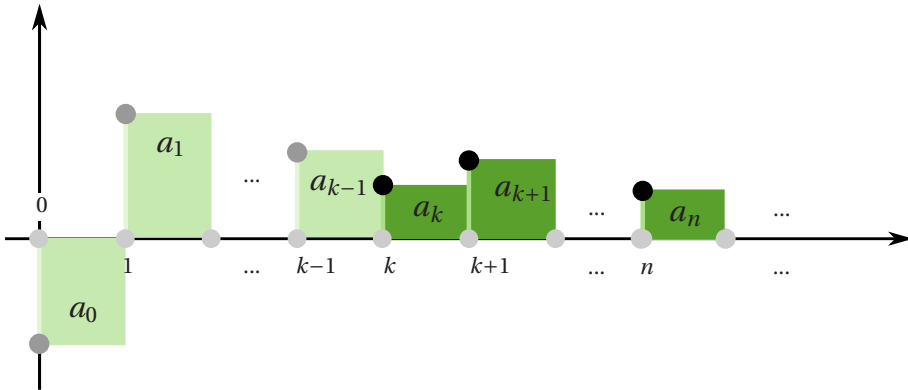
### TESTE DA CAUDA

Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}) + (a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + \dots) \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

onde a primeira soma é finita, e a segunda soma, infinita. Essa segunda soma é a  $k$ -ésima cauda da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , dada por

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + \dots$$



### Proposição 2.10: Teste da Cauda

A cauda  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  converge  $\iff$  a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge

A cauda  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  diverge  $\iff$  a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge

### Prova:

Para  $m \geq k$ , temos que a soma parcial da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  fica

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + \sum_{n=k}^m a_n \end{aligned}$$

Uma vez que  $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$  é uma quantidade finita que não

depende de  $m$ , o resultado segue tomando o limite com  $m \rightarrow \infty$ . ■

## TESTE DA COMPARAÇÃO

Temos que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  é tal que suas somas parciais  $s_m$  formam uma sequência monótona

$$\begin{aligned} s_0 &= |a_0| \\ s_1 &= |a_0| + |a_1| \\ s_2 &= |a_0| + |a_1| + |a_2| \\ &\vdots \\ s_m &= |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| \\ s_{m+1} &= |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| + |a_{m+1}| \\ &\vdots \end{aligned}$$

Neste caso, o limite  $\lim s_m$  sempre existe e temos então apenas duas possibilidades

### Propriedades

**1) Converge:** se o limite  $\lim s_m$  é finito, escrevemos, nesse caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

**2) Diverge para o infinito:** se o limite  $\lim s_m$  é infinito, escrevemos, nesse caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$$

A mesma análise acima também vale para as caudas, de modo que sempre podemos escrever

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \infty.$$

### Proposição 2.11: Teste da comparação

Se

$$0 \leq |a_n| \leq |b_n| \quad \text{para } n \geq k$$

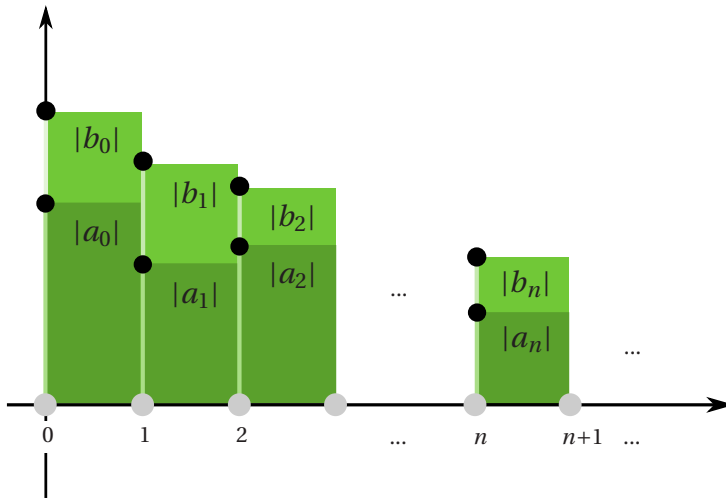
então

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |b_n|$$

de modo que

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=k}^{\infty} |b_n| = \infty$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \infty$$

**Prova:**

Se

$$0 \leq |a_n| \leq |b_n| \quad \text{para } n \geq k$$

então

$$\sum_{n=k}^m |a_n| \leq \sum_{n=k}^m |b_n|$$

Pela monotonicidade do limite de sequências, segue-se que

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |b_n|$$

Se  $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| = \infty$ , então a desigualdade acima “empurra” a outra cauda para que  $\sum_{n=k}^{\infty} |b_n| = \infty$ .

Se  $\sum_{n=k}^{\infty} |b_n| < \infty$ , então a desigualdade acima “empurra” a outra cauda para que  $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \infty$ . ■



**Exemplo**

Vamos mostrar que a *série 2-harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

converge. Observe que ela tem termos positivos, e também que seu termo geral é tal que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

para todo  $n \geq 2$ . Por comparação, segue-se que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} = 1 < \infty$$

Pelo Teste da cauda, segue-se que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

**TESTE DA INTEGRAL**

A integral imprópria (ver Apêndice A.4) pode ser usada para determinar a convergência ou a divergência de algumas séries com termos não negativos e decrescentes.

**Proposição 2.12**

Se  $a_x = a(x)$  é positiva, decrescente e definida para  $x$  real com  $x \geq k$ , então

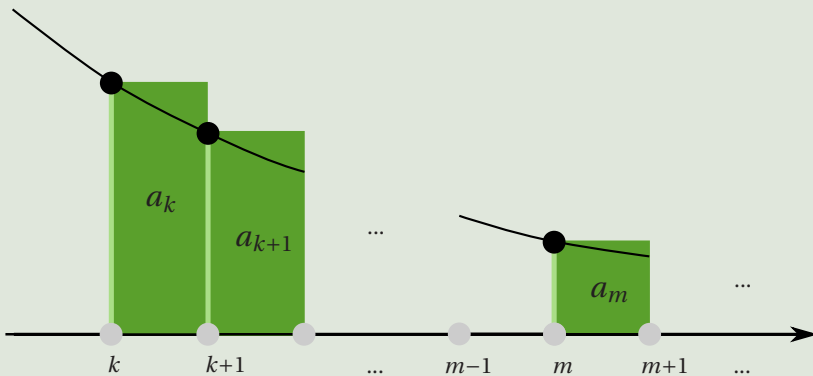
$$\int_k^{\infty} a_n \, dn < \infty \implies \sum_{n=k}^{\infty} a_n < \infty$$

e

$$\int_k^{\infty} a_n dn = \infty \implies \sum_{n=k}^{\infty} a_n = \infty$$

**Prova:**

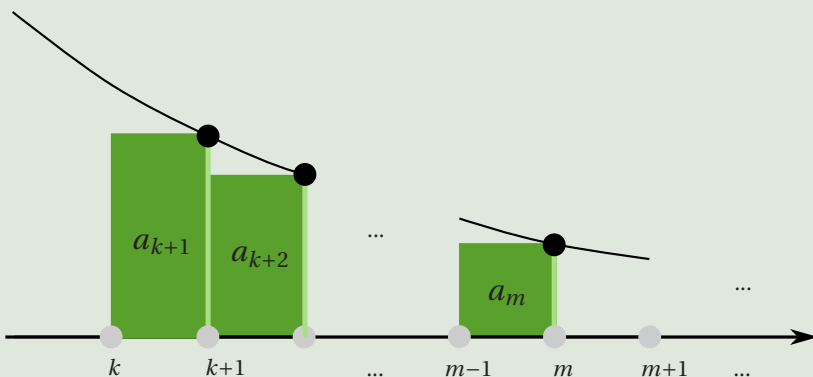
Como  $a(x)$  é decrescente e como  $a_n = a(n)$ , considerando os retângulos de base 1 que vão de  $k$  até  $m+1$  acima do gráfico



temos que

$$a_k + a_{k+1} + \dots + a_m \geq \int_k^{m+1} a(x) dx$$

Considerando agora os retângulos de base 1 que vão de  $k$  até  $m$  abaixo do gráfico



temos que

$$a_{k+1} + \dots + a_m \leq \int_k^m a(x) dx$$

Juntando essas duas informações, temos que

$$\int_k^{m+1} a(x) dx \leq a_k + a_{k+1} + \dots + a_m \leq a_k + \int_k^m a(x) dx$$

Fazendo  $m \rightarrow \infty$ , temos que

$$\int_k^\infty a(x) dx \leq \sum_{n=k}^\infty a_n \leq a_k + \int_k^\infty a(x) dx$$

Se a integral imprópria  $\int_k^\infty a(x) dx$  diverge, segue-se da primeira desigualdade acima que a série de termos sem sinal  $\sum_{n=k}^\infty a_n$  diverge. Se a integral imprópria  $\int_k^\infty a(x) dx$  converge, segue-se da última desigualdade acima que  $\sum_{n=k}^\infty a_n$  é uma série de termos sem sinal limitada que, portanto, converge. ■

A seguir, alguns exemplos de aplicação do teste da integral.

### Exemplos

1) Temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{n} dn = [\log(n)]_1^\infty = \infty,$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty.$$

A demonstração do teste da integral nos dá mais informações. Em particular, sabemos que o seguinte limite existe

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} -\log(m) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$$

uma vez que a sequência é crescente e também limitada. De fato, temos que

$$\log(m+1) - \log(2) = \int_2^{m+1} \frac{1}{n} dn \leq \sum_{n=2}^m \frac{1}{n} \leq \int_1^m \frac{1}{n} dn = \log(m)$$

Subtraindo  $\log(m)$ , obtemos

$$-\log(2) \leq \log(m+1) - \log(m) - \log(2) \leq -\log(m) + \sum_{n=2}^m \frac{1}{n} \leq 0$$

Somando 1, obtemos

$$0 \leq 1 - \log(2) \leq -\log(m) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \leq 1$$

Segue-se que  $\gamma$  está entre 0 e 1. Ela é a chamada *constante de Euler-Mascheroni* e aparece em diversas fórmulas da matemática e da física. Até hoje não se sabe se essa constante é um número racional.

2) Temos que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^2} dn = \left[ -\frac{1}{n} \right]_1^{\infty} = 1 < \infty,$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \dots > 1.$$

3) De modo mais geral, para qualquer  $p \neq 1$ , temos que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p} dn = \left[ \frac{n^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \\ \infty & \text{se } p < 1 \end{cases}$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty,$$

quando  $p > 1$  e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty,$$

quando  $p < 1$ .

Uma vez que já analisamos separadamente o caso  $p = 1$ , temos que a série  $p$ -harmônica é tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < \infty & \text{se } p > 1 \\ = \infty & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

4) Temos que

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} dn = [\log(\log(n))]_2^{\infty} = \infty,$$

de modo que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} = \infty.$$

## TESTE DA CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Vamos ver a seguir que a convergência da *série dos valores absolutos* implica a convergência da série original.

**Proposição 2.13**

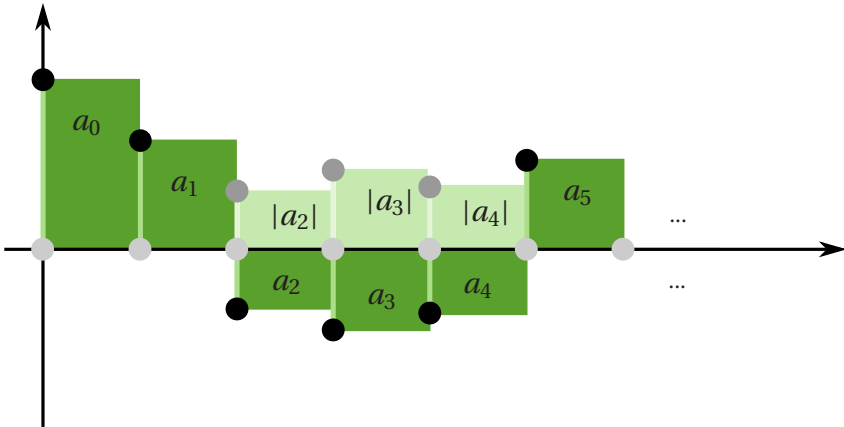
Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots < \infty$$

então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

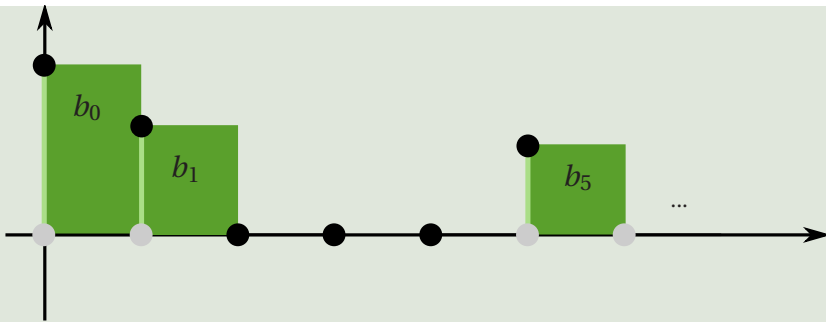
converge.

**Prova:**Separamos as partes positiva e negativa de  $a_n$ , escrevendo

$$a_n = b_n + c_n$$

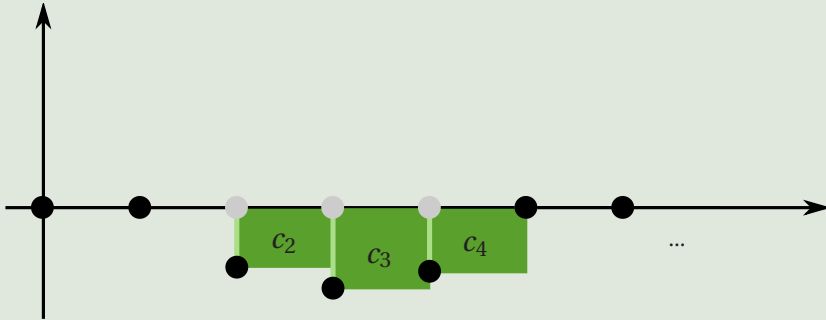
onde

$$b_n = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}$$



e

$$c_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ a_n, & a_n < 0 \end{cases}$$



Temos que

$$0 \leq b_n = |b_n| \leq |a_n|$$

e também que

$$0 \leq -c_n = |c_n| \leq |a_n|.$$

Pelo teste da comparação, segue-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

e também que

$$\sum_{n=0}^{\infty} -c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Pela regra da multiplicação por constantes, temos que

$$(-1) \sum_{n=0}^{\infty} -c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

converge. Pela regra da soma, segue-se que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n + c_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

converge. ■

Quando a série dos valores absolutos converge, dizemos que a série original *converge absolutamente*. O resultado acima mostra que toda série que converge absolutamente, de fato converge. Contudo, existem séries que, embora convirjam, *não* convergem absolutamente.

### Exemplos

1) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

converge absolutamente, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

2) Vamos ver a seguir que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. Entretanto, ela não converge absolutamente, uma



vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Uma série que converge, mas não converge absolutamente, é chamada de série *condicionalmente convergente*.

## TESTE DA SÉRIE ALTERNADA

A proposição a seguir, denominada *teste da série alternada*, afirma que são sempre convergentes as séries cujos termos alternam o sinal e cujo valor absoluto desses termos decresce para zero.

### Proposição 2.14

Se  $a_n = |(-1)^n a_n|$  é decrescente e  $\lim a_n = 0$ , então

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

converge.

### Prova:

Considere

$$s_{2k} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2k-3} + a_{2k-2} - a_{2k-1} + a_{2k}$$

Como  $a_n > 0$  e  $a_n - a_{n+1} > 0$  para todo  $n$ , temos que  $s_{2k} > 0$ . Temos também que

$$s_{2k} = s_{2k-2} - a_{2k-1} + a_{2k} < s_{2k-2}$$

de modo que

$$0 < s_{2k} < s_{2k-2} < \cdots < s_2 < s_0$$

Segue-se que  $s_{2k}$  é uma sequência decrescente e limitada, de modo que existe  $s$  tal que

$$\lim s_{2k} = s.$$

Além disso, temos que

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$$

de modo que

$$\lim s_{2k+1} = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = s$$

uma vez que, pelo teorema do sanduíche,  $\lim a_{2k+1} = 0$ , já que  $0 < a_{2k+1} < a_k$ . Como a sequência dos  $s_m$  com  $m$  par e com  $m$  ímpar convergem para o mesmo  $s$ , não é difícil mostrar que a  $\lim s_m = s$ , o que demonstra que a série converge. ■

### Exemplos

1) Temos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

converge, uma vez que é uma série alternada e que

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

decrece para zero. Mas não converge absolutamente, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

2) O que aconteceria se, na série harmônica alternada, tentás-

semos somar primeiro as parcelas positivas e depois as parcelas negativas? A soma de suas parcelas positivas é dada por

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

Como podemos colocar o fator  $\frac{1}{2}$  em evidência, segue-se que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

pois apareceu  $\frac{1}{2}$  vez a série harmônica, que diverge para o infinito. Por que isso aconteceu? Porque, apesar de a série harmônica alternada convergir, ela não converge absolutamente. Sua convergência depende da ordem em que somamos os termos. Se somarmos alternadamente as parcelas positivas e negativas, a série converge, pois há cancelamentos. Se somarmos primeiro as parcelas positivas e depois as parcelas negativas, a série diverge. É por essa razão que, nesse caso, dizemos que a série *converge condicionalmente*, pois a convergência depende da ordem em que as parcelas são somadas.

3) Temos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log(n)}$$

converge, uma vez que é uma série alternada e que

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n \log(n)} \right| = \frac{1}{n \log(n)}$$

decrece para zero. Mas não converge absolutamente, uma vez que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n \log(n)} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} = \infty$$

4) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$$

não converge, pois, apesar de ser uma série alternada e de

$$\left| (-1)^n \frac{n+1}{n} \right| = \frac{n+1}{n}$$

ser decrescente, este não decresce para zero, portanto, o Teste da série alternada não se aplica. Porém, como o termo geral não tende a zero, a série diverge pelo Teste da divergência.

## TESTE DA RAIZ

Se tomamos o termo geral  $x^n$  de uma série geométrica com razão  $x$  e extraímos a raiz  $n$ -ésima do seu módulo, obtemos de volta o módulo da razão

$$\sqrt[n]{|x^n|} = |x|$$

Como a convergência de uma série de uma série geométrica depende de o módulo de sua razão ser menor ou maior que um, definimos, para uma série numérica qualquer, o módulo de sua razão no infinito pelo seguinte limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 2.15: Teste da raiz**

Temos que

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ > 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \\ = 1 & \Rightarrow \text{inconclusivo} \end{cases}$$

### Prova:

A ideia é comparar a série dos módulos com uma série geométrica.

- 1) Se  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , então  $\sqrt[n]{|a_n|}$  fica abaixo de 1 para  $n$  grande e, portanto, abaixo de algum  $x < 1$  positivo para  $n$  maior que algum  $k$ , isto é

$$\sqrt[n]{|a_n|} < x < 1 \quad \text{para } n \geq k$$

Elevando ambos os lados à  $n$ -ésima potência, temos

$$|a_n| < x^n \quad \text{para } n \geq k$$

e, então, as caudas das respectivas séries satisfazem

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| &< \sum_{n=k}^{\infty} x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} < \infty \end{aligned}$$

onde a série geométrica converge, pois sua razão satisfaz  $0 < x < 1$ .

Pelo Teste da cauda, segue-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Pelo Teste da convergência absoluta, segue-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

2) Se  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , então, existe  $k$ , tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \quad \text{para } n \geq k$$

Elevando ambos os lados a  $n$ -ésima potência, temos

$$|a_n| > 1 \quad \text{para } n \geq k$$

o que mostra que  $\lim |a_n| \neq 0$  e, portanto, que  $\lim a_n \neq 0$ . Pelo Teste da divergência, segue-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge.

3) Para mostrar que o caso  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  é inconclusivo, vamos dar um exemplo em que essa igualdade é satisfeita, embora a série diverja, e dar outro exemplo em que essa igualdade é satisfeita, embora a série convirja.

A série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge e é tal que

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

A série 2-harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge e é tal que

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$



### Exemplos

1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  converge?

Pelo Teste da raiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^2}{2^n} \right|} = \frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

segue-se, então, que a série converge.

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$  converge?

Pelo Teste da raiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-3)^n}{n^3} \right|} = \frac{3}{(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n})^3} = 3 > 1$$

segue-se, então, que a série diverge.

3) Para quais valores de  $x$  a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  converge?

O Teste da raiz permite que testemos diversos valores de  $x$  ao mesmo tempo: pelo Teste da raiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} x^n \right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

segue-se então que a série converge se  $|x| < 1$ , e diverge se  $|x| > 1$ . Para  $|x| = 1$ , isto é, para  $x = 1$  ou  $x = -1$ , o teste da raiz não se aplica e temos que substituir esses valores diretamente na série de potências.

Para  $x = 1$  a série de potências fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que diverge, pois é a série harmônica.

Para  $x = -1$  a série de potências fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que converge, pois é a série harmônica alternada.

Concluimos que a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  converge se  $x \in [-1, 1)$  e diverge para  $x$  fora desse intervalo.

## TESTE DA RAZÃO

Se tomamos o termo geral  $x^n$  de uma série geométrica com razão  $x$  e extraímos a raiz  $n$ -ésima do seu módulo, obtemos de volta o módulo da razão

$$\left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$$

Como a convergência de uma série de uma série geométrica depende de o módulo de sua razão ser menor ou maior que um, definimos, para uma série numérica qualquer, o módulo de sua razão no infinito pelo seguinte limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

e obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 2.16: Teste da razão**



Temos que

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ > 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \\ = 1 & \Rightarrow \text{inconclusivo} \end{cases}$$

### Prova:

A ideia é, novamente, comparar a série dos módulos com uma série geométrica.

- 1) Se  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , então  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$  fica abaixo de 1 para  $n$  grande e, portanto, abaixo de algum  $x < 1$  positivo para  $n$  maior que algum  $k$ , isto é

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < x < 1 \quad \text{para } n \geq k$$

Segue-se que

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \left| \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \right|, \dots, \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \right|, \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| < x$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}
 |a_n| &= |a_k| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \left| \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \right| \cdots \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \right| \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \\
 &= |a_k| \underbrace{\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \left| \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \right| \cdots \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \right| \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|}_{n-k \text{ fatores}} \\
 &< |a_k| x^{n-k} \quad \text{para } n \geq k
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| &< |a_k| \sum_{n=k}^{\infty} x^{n-k} \\
 &= |a_k| (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\
 &= |a_k| \frac{1}{1-x} < \infty
 \end{aligned}$$

onde a série geométrica converge pois sua razão satisfaz  $0 < x < 1$ . Pelo Teste da cauda, segue-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ . Pelo Teste da convergência absoluta, segue-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

2) Se  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ , então, existe  $k$ , tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \text{para } n \geq k$$

de modo que

$$|a_{n+1}| > |a_n| \quad \text{para } n \geq k$$

Isso mostra que  $|a_n|$  é positiva e crescente para  $n \geq k$ , de modo que  $\lim |a_n| \neq 0$  e, portanto, que  $\lim a_n \neq 0$ . Pelo Teste da divergência, segue-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  diverge.

- 3) Para mostrar que o caso  $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$  é inconclusivo, vamos dar um exemplo em que essa igualdade é satisfeita mas a série diverge, e dar outro exemplo em que essa igualdade é satisfeita mas a série converge.

A série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge e é tal que

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

A série 2-harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge e é tal que

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$



## Exemplos

- 1) Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

O módulo da sua razão no infinito é

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} |x| = \lim \frac{1}{n+1} |x| = 0 < 1$$

para qualquer  $x$  fixado. Pelo Teste da razão, segue-se que a série converge para todo  $x$  fixado.

2) Considere o polinômio infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

O módulo da sua razão no infinito é

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim \frac{n}{n+1} |x| = |x|$$

para qualquer  $x$  fixado. Pelo Teste da razão, segue-se que a série converge, quando  $|x| < 1$ , e diverge quando  $|x| > 1$ . O Teste da razão não nos diz nada quando  $|x| = 1$ . Para saber da convergência da série nesse caso, temos que substituir diretamente  $x = 1$ , obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

pois é a série harmônica, e substituir diretamente  $x = -1$ , obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$$

que converge, pelo Teste da série alternada. Segue-se que a série converge se, e só se,  $x \in [-1, 1)$ . Se utilizarmos o teste da raiz, chegaremos aos mesmos resultados, uma vez que

$$\lim \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} x^n \right|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} |x| = |x|$$

## 2.5 DOMÍNIO E RAIOS DE CONVERGÊNCIA

Com os testes de convergência, temos as ferramentas adequadas para determinar o domínio de séries de potências. Primeiro consideramos alguns exemplos.

### Exemplos

1) A série geométrica de razão  $x$  é uma série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

com domínio

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ converge} \right\} = \{ x \in \mathbb{R} : |x| < 1 \} = (-1, 1)$$



uma vez que a série geométrica converge apenas para esses valores de  $x$ .

Já vimos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

para todo  $x \in (-1, 1)$ .

2) A série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \end{aligned}$$

tem qual domínio?

Vejamos para quais valores de  $x$  a série converge. Fixado  $x$ , temos uma série com parcelas

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Pelo teste da raiz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} |x|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \\ &= |x| \end{aligned}$$

de modo que

$$|x| < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ converge}$$

$$|x| > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ diverge}$$

O Teste da raiz não nos diz o que ocorre quando  $|x| = 1$ , isto é, quando  $x = \pm 1$ . Analisamos esses casos diretamente substituindo esses valores de  $x$  na série de potências

$$x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ converge}$$

pelo Teste da série alternada, pois  $\frac{1}{n}$  decresce para 0.

$$\begin{aligned} x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-1)^n &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \quad \text{diverge} \end{aligned}$$

pois é menos a série harmônica, onde usamos que

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

uma vez que  $2n - 1$  é sempre ímpar.

Assim, o domínio dessa série de potências é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ converge} \right\} = (-1, 1]$$



Mais à frente neste capítulo, veremos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1+x)$$

para todo  $x \in (-1, 1]$ .

### 3) A série de potências

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$$

tem qual domínio?

Vejam para quais valores de  $x$  a série converge. Fixado  $x$ , temos uma série com parcelas

$$\frac{1}{n2^n} x^n$$

Pelo teste da raiz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n2^n} x^n \right|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n} 2} \\ &= \frac{|x|}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{|x|}{2} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \text{ converge}$$

$$\frac{|x|}{2} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \text{ diverge}$$

o que é equivalente a

$$|x| < 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \text{ converge}$$

$$|x| > 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \text{ diverge}$$



O Teste da raiz não nos diz o que ocorre quando  $|x| = 2$ , isto é, quando  $x = \pm 2$ . Analisamos esses casos diretamente substituindo esses valores de  $x$  na série de potências

$$x = 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$

pelo Teste da integral.

$$\begin{aligned} x = -2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (-2)^n &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (-1)^n 2^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{converge} \end{aligned}$$

pelo Teste da série alternada, pois  $\frac{1}{n}$  decresce para 0.

Assim, o domínio dessa série de potências é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \quad \text{converge} \right\} = [-2, 2)$$

4) Já vimos, pelo Teste da Razão, que a série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{aligned}$$

converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto, o domínio dessa série de potências é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{converge} \right\} = (-\infty, \infty)$$



Mais à frente neste capítulo, veremos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

para todo  $x$ .

### 5) A série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \end{aligned}$$

tem qual domínio?

Vejam para quais valores de  $x$  a série converge. Fixado  $x$ , temos uma série com termo geral

$$n!x^n$$

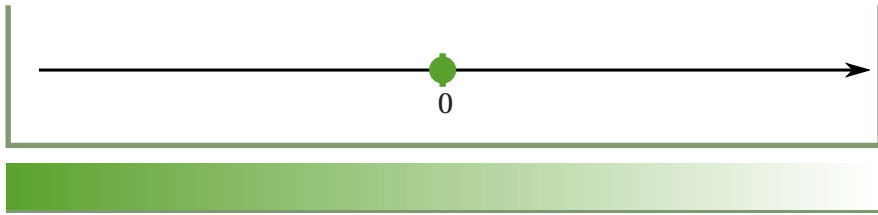
Pelo Teste da razão, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| \\ &= \infty \end{aligned}$$

que é maior que 1, para qualquer  $x \neq 0$ .

Assim, o domínio dessa série de potências é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \text{ converge} \right\} = [0, 0] = \{0\}$$



O domínio das séries de potências dos exemplos acima é sempre um intervalo centrado na origem com raio  $R$ . No Exemplo 1, o domínio é o intervalo

$$(-1, 1)$$

e o raio é  $R = 1$ , e o intervalo é aberto em ambos lados. No Exemplo 2, o domínio é o intervalo

$$(-1, 1]$$

e o raio é  $R = 1$ , e o intervalo é aberto na esquerda e fechado na direita. No Exemplo 3, o domínio é o intervalo

$$[-2, 2)$$

e o raio é  $R = 2$ , e o intervalo é fechado na esquerda e aberto na direita. No Exemplo 4, o domínio é o intervalo

$$(-\infty, \infty)$$

e o raio é  $R = \infty$ , e o intervalo é aberto em ambos lados. No Exemplo 5, o domínio é o intervalo

$$[0, 0] = \{0\}$$

e o raio é  $R = 0$ , e o intervalo é fechado em ambos lados. Veremos que o domínio de qualquer série de potências tem essa mesma forma.

Primeiro, uma versão do teste da raiz e da razão para séries de potências.

### Proposição 2.17

Temos que

$$\left. \begin{array}{l} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right) |x| \\ \text{ou} \\ \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right) |x| \end{array} \right\} \begin{array}{l} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge} \\ > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ diverge} \\ = 1 \Rightarrow \text{inconclusivo} \end{array}$$

### Prova:

Fixado  $x$ , temos uma série numérica com termo geral

$$c_n x^n$$

onde

$$|c_n x^n| = |c_n| |x|^n$$

de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{|c_n|} |x| \right) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right) |x|$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x| = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right) |x|$$

se os limites existem. O resultado segue-se então do Teste da raiz ou Teste da razão para séries. ■

### Proposição 2.18

O domínio de uma série de potências é dado por um dos seguintes

intervalos

$$(-R, R) \quad \text{ou} \quad [-R, R] \quad \text{ou} \quad (-R, R] \quad \text{ou} \quad [-R, R)$$

para algum  $0 \leq R \leq \infty$ , denominado *raio de convergência* da série.

### Prova:

Para simplificar a prova, vamos supor a existência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$$

Pelo Teste da raiz para séries de potências, temos que

$$L|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge absolutamente}$$

$$L|x| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ diverge}$$

logo

$$|x| < \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \text{a série de potências converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \text{a série de potências diverge}$$

Segue-se que o domínio da série de potências é um intervalo centrado na origem com raio  $R = 1/L$ . ■

Observe que os diferentes intervalos centrados na origem

$$(-R, R) \quad [-R, R) \quad (-R, R] \quad \text{e} \quad [-R, R]$$

têm todos o mesmo raio  $R$ . Assim, o raio de convergência  $R$  nos *diz apenas o tamanho* do domínio da série de potências, pois *não diz* qual desses intervalos o domínio é (veja os Exemplos mais acima). Observe também que podemos ter  $R = 0$ , e nesse caso o domínio da série de potên-

cias contém apenas o ponto  $x = 0$ . Também podemos ter  $R = \infty$ , e, nesse caso, o domínio da série de potências é a reta toda.

## 2.6 DERIVADA E INTEGRAL

Agora que sabemos obter o domínio de uma série de potências  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , vamos ver como derivar e integrar essas funções em relação a  $x$ .

### DERIVADA

Tomando o devido cuidado com o domínio, podemos derivar uma série de potências termo a termo como se fosse um polinômio

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots)' \\ &= 0 + c_1 + c_2 2x + \cdots + c_n n x^{n-1} + \cdots \end{aligned}$$

#### Proposição 2.19

Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  com raio de convergência  $R > 0$ . Temos que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-R, R)$ . Além disso, a derivada da série de potências tem o mesmo raio de convergência  $R$ .

**Prova:**

Primeiro vamos provar que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n$$

têm o mesmo raio de convergência.

Pelo Teste da razão aplicado a  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , denotando

$$L_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_f} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_f} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{diverge}$$

Pelo Teste da razão aplicado a  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n$ , cujos coeficientes são

$$c_{n+1} (n+1)$$

denotando

$$L_g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+2} (n+2)}{c_{n+1} (n+1)} \right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_g} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_g} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n \quad \text{diverge}$$

Para mostrarmos que  $f(x)$  e  $g(x)$  têm o mesmo raio de convergência, basta mostrar que  $L_f = L_g$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} L_g &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+2}(n+2)}{c_{n+1}(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot 1 = L_f \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que  $f'(x) = g(x)$ . Para isso, usamos a definição de derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left( \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n n (x+h)^{n-1} \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, o Teorema do Valor Médio aplicado à função  $x^n$ , de modo que

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n(x+h_n)^{n-1},$$

para algum  $h_n$  tal que  $|h_n| < |h|$ . Quando  $|x| < R$ , as séries convergem absolutamente e podemos provar (Proposição A.13) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x+h_n)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$



de modo que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n \\ &= g(x) \end{aligned}$$



### Exemplo

Vimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

tem raio de convergência  $R = \infty$ . Logo

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} x^n \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-\infty, \infty)$ . Assim, a derivada dessa série de potên-

cias é ela mesma. De outro modo

$$\begin{aligned} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)' &= 1 + 2\frac{x}{2!} + 3\frac{x^2}{3!} + 4\frac{x^3}{4!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Mais adiante neste capítulo, veremos que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$  para  $x \in (-\infty, \infty)$ .

## INTEGRAL

Tomando o devido cuidado com o domínio, podemos integrar uma série de potências termo a termo como se fosse um polinômio

$$\begin{aligned} \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx &= \int (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots) dx \\ &= c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \dots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + C \end{aligned}$$

### Proposição 2.20

Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  com raio de convergência  $R > 0$ . Temos que

$$\begin{aligned} \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n + C \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-R, R)$ . Além disso, a integral da série de potências tem o mesmo raio de convergência  $R$ .

### Prova:

Primeiro vamos provar que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{e} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n$$

têm o mesmo raio de convergência.

Pelo Teste da razão aplicado a  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , denotando

$$L_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_f} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_f} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{diverge}$$

Pelo Teste da razão aplicado a  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n$ , cujos coeficientes são

$$\frac{c_{n-1}}{n}$$

denotando

$$L_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{c_n}{n+1}}{\frac{c_{n-1}}{n}} \right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_F} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_F} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n \quad \text{diverge}$$

Para mostrarmos que  $f(x)$  e  $F(x)$  têm o mesmo raio de convergência, basta mostrar que  $L_f = L_F$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} L_F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{c_n}{n+1}}{\frac{c_{n-1}}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot 1 = L_f \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{c_{n-1}}{n} x^n \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

vale para  $(-R, R)$ . Isso mostra que  $F(x)$  é uma primitiva para  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

em  $(-R, R)$ . Segue-se que

$$\int \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = F(x) + C$$

vale para  $(-R, R)$ , onde  $F(x)$  é dada pela série de potências que queríamos. ■

### Exemplos

1) Vimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \end{aligned}$$

tem raio de convergência  $R = 1$ . Logo

$$\begin{aligned} \log(x+1) &= \int \frac{1}{1+x} dx = \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + C \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + C \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-1, 1)$ . Substituindo  $x = 0$  em ambos lados, te-

mos que

$$0 = \log(1) = 0 - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + \dots + C$$

de modo que  $C = 0$ . Segue-se então que

$$\begin{aligned} \log(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-1, 1)$ .

É possível mostrar que a igualdade acima também vale para  $x = 1$ , de onde segue o curioso fato de que

$$\begin{aligned} \log(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

é a soma da série harmônica-alternada.

A igualdade acima pode valer para  $x = -1$ ?

2) Vimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \end{aligned}$$

tem raio de convergência  $R = 1$ . Logo

$$\begin{aligned} \operatorname{atg}(x) &= \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + C \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-1, 1)$ . Substituindo  $x = 0$  em ambos lados, temos que

$$0 = \operatorname{atg}(0) = 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} - \frac{0^7}{7} + \dots + C$$

de modo que  $C = 0$ . Segue-se então que

$$\begin{aligned} \operatorname{atg}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-1, 1)$ .

É possível mostrar que a igualdade acima também vale para  $x = 1$ , de onde segue o curioso fato de que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{atg}(1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \end{aligned}$$

A igualdade acima pode valer para  $x = -1$ ?

## UNICIDADE DOS COEFICIENTES

Nesta seção, vamos ver que, assim como os polinômios, os coeficientes das séries de potências são únicos, pois de fato eles dependem do valor das derivadas na origem. Denote por  $f^{(n)}(x)$  a  $n$ -ésima derivada de  $f(x)$ .

### Proposição 2.21

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

para todo  $x \in (-R, R)$ , então

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

para todo  $n$ .

### Prova:

Temos que

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots,$$

de modo que  $f(0) = c_0$  e

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$



Calculando a derivada primeira, temos que

$$f'(x) = c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + c_4 4x^3 + \dots,$$

de modo que  $f'(0) = c_1$  e

$$c_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!}$$

Calculando a derivada segunda, temos que

$$f''(x) = c_2 2 + c_3 3 \cdot 2x + c_4 4 \cdot 3x^2 + \dots,$$

de modo que  $f''(0) = c_2 2$  e

$$c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}$$

Calculando a derivada terceira, temos que

$$f'''(x) = c_3 3 \cdot 2 + c_4 4 \cdot 3 \cdot 2x + \dots,$$

de modo que  $f'''(0) = c_3 3!$  e

$$c_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$$

Para os outros valores de  $n$ , podemos proceder de forma análoga. ■

A unicidade dos coeficientes das séries de potências é então uma consequência imediata.

### Corolário 2.22

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

para todo  $x \in (-R, R)$ , então

$$c_n = d_n$$

para todo  $n$ .

### Prova:

Definindo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

segue-se que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{e} \quad d_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

para todo  $n$ . Por hipótese, temos que  $f(x) = g(x)$  para  $x \in (-R, R)$ , de modo que  $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$  e então  $c_n = d_n$ , para todo  $n$ . ■

## 2.7 SÉRIE DE TAYLOR

Quando  $f(x)$  é tal que  $f^{(n)}(0)$  existe para todo  $n$ , podemos considerar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots$$

denominada *série de Taylor de  $f$* . Podemos nos perguntar quando a seguinte igualdade é verdadeira

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

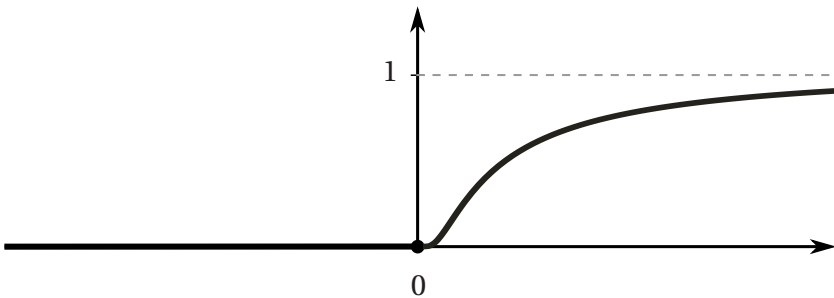
Se já sabemos que  $f(x)$  é uma série de potências, essa igualdade é sempre verdadeira. Mas será que isso vale sempre? A seguir, calculamos as

séries de Taylor de algumas funções, começando por uma função que possui todas as derivadas definidas na reta toda, mas que não é igual à sua série de Taylor.

### Exemplos

1) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$



Podemos mostrar que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} p_n\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

onde  $p_n(y)$  é um polinômio. Por exemplo, no caso da derivada primeira, é fácil ver que  $p_1(y) = y^2$ . Para determinar o valor da derivada na origem, vamos calcular suas derivadas laterais. A derivada lateral esquerda é dada por

$$f^{(n)}(0 \uparrow) = \lim_{x \uparrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

enquanto a derivada lateral direita é dada por

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(0 \downarrow) &= \lim_{x \downarrow 0} f^{(n)}(x) \\
 &= \lim_{x \downarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} p_n\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} p_n(y) \\
 &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{p_n(y)}{e^y} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

onde o último limite é calculado pela regra de L'Hospital. Temos então que

$$f^{(n)}(0) = 0$$

para todo  $n \geq 0$ , de modo que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

para todo  $n \geq 0$ . Logo

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n \\
 &= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots \\
 &= 0 \\
 &\neq f(x)
 \end{aligned}$$

mostrando que  $f$  não é igual à sua série de Taylor.

2) Considere a função  $f(x) = e^x$ . Temos que

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

para todo  $n \geq 0$ . Segue-se então que  $f^{(n)}(0) = 1$ , para todo

$n \geq 0$ , de modo que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

para todo  $n \geq 0$ . Logo, a série de Taylor de  $e^x$  é dada por

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

que tem raio de convergência  $R = \infty$ , como já vimos. Resta mostrar que  $e^x$  é igual à sua série de Taylor e, para isso, vamos mostrar que essa série de Taylor satisfaz o PVI

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuja única solução é  $e^x$ . De fato, essa série de Taylor vale 1 em  $x = 0$  e temos que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} x^n \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-\infty, \infty)$ .

**3)** Considere a função  $f(x) = \text{sen}(x)$ . As primeiras derivadas

pares são dadas por

$$\begin{aligned}f^{(0)}(x) &= \operatorname{sen}(x) \\f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x) \\f^{(6)}(x) &= -\operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \operatorname{sen}(x)$$

para todo  $k \geq 0$ . Por outro lado, as primeiras derivadas ímpares são dadas por

$$\begin{aligned}f^{(1)}(x) &= \operatorname{cos}(x) \\f^{(3)}(x) &= -\operatorname{cos}(x) \\f^{(5)}(x) &= \operatorname{cos}(x) \\f^{(7)}(x) &= -\operatorname{cos}(x)\end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \operatorname{cos}(x)$$

para todo  $k \geq 0$ . Segue-se então que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

para todo  $k \geq 0$ . Logo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\end{aligned}$$

que tem raio de convergência  $R = \infty$ , como é fácil verificar. Resta mostrar que  $\sin(x)$  é igual à sua série de Taylor e, para isso, vamos mostrar que essa série de Taylor satisfaz o PVI

$$\begin{cases} y''(x) = -y(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

cuja única solução é  $\sin(x)$ . De fato, essa série de Taylor vale 0 em  $x = 0$ , sua derivada vale 1 em  $x = 0$  e temos que

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)'' &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)'' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1)(2k) x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{aligned}$$

vale para  $x \in (-\infty, \infty)$ .

4) Para encontrar a série de Taylor função  $f(x) = \cos(x)$ , podemos repetir o mesmo procedimento do exemplo anterior. Podemos também simplesmente derivar a série de Taylor do  $\sin(x)$  e obter

$$\cos(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)'$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1)x^{2k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}
 \end{aligned}$$

## SÉRIE BINOMIAL

Nesta seção, vamos determinar a série de Taylor da função binomial  $f(x) = (1+x)^a$ . Quando  $a$  é um número natural, essa série se transforma numa soma e obtemos a famosa fórmula do binômio de Newton. Aliás, foi assim que o próprio Newton procedeu há mais de três séculos.

### Exemplos

1) As primeiras derivadas de  $f(x) = (1+x)^a$  são dadas por

$$\begin{aligned}
 f^{(0)}(x) &= (1+x)^a \\
 f^{(1)}(x) &= a(1+x)^{a-1} \\
 f^{(2)}(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2} \\
 f^{(3)}(x) &= a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))(1+x)^{a-n}$$

para todo  $n \geq 0$ . Segue-se então que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}$$



para todo  $n \geq 0$ . Logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!} x^n \\ &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Denotando

$$\binom{a}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}$$

denominado *coeficiente binomial*, podemos reescrever a série de Taylor de  $(1+x)^a$  como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

Vamos determinar seu raio de convergência quando  $a$  não é um número natural. Uma vez que

$$\binom{a}{n+1} = \binom{a}{n} \frac{a-n}{n+1}$$

temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{a}{n+1} x^{n+1}}{\binom{a}{n} x^n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a-n}{n+1} x \right| \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-n}{n+1} \right| |x| \\ &= |-1| |x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

Pelo teste da razão, segue-se que o raio de convergência da série binomial é  $R = 1$ .

Resta mostrar que  $(1+x)^a$  é igual à sua série de Taylor e, para isso, vamos mostrar que essa série de Taylor satisfaz o PVI

$$\begin{cases} (1+x)y'(x) - ay(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuja única solução é  $(1+x)^a$ . De fato, seja

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

então  $y(0) = 1$  e temos que

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n+1} (n+1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} (a-n) x^n \end{aligned}$$

onde usamos que

$$\binom{a}{n+1} = \binom{a}{n} \frac{a-n}{n+1}$$

Temos que  $y(x)$  é solução da EDO, uma vez que

$$\begin{aligned} (1+x)y'(x) &= y'(x) + xy'(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n+1} (n+1) x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} (a-n) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a \binom{a}{n} x^n \end{aligned}$$

$$= ay(x)$$

Como a solução do PVI é única, segue-se que

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

para todo  $x \in (-1, 1)$ , que generaliza a fórmula binomial.

2) Quando  $a$  é igual a um número inteiro  $m$ , para todo  $0 \leq n \leq m$ , temos que

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Além disso, para todo  $n > m$ , temos que

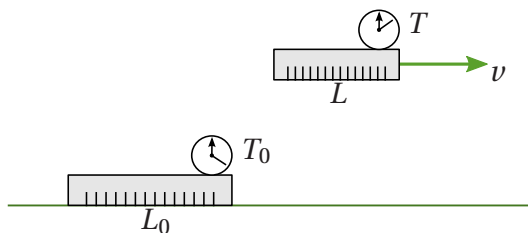
$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-m)\cdots(m-(n-1))}{n!} = 0$$

Nesse caso, a série de Taylor possui raio  $R = \infty$  e se transforma numa soma, de modo que

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n$$

é a bem conhecida *fórmula do binômio de Newton*.

3) Na Teoria da Relatividade restrita, quando uma régua e um relógio se movem no eixo  $x$  com velocidade  $v$ , o comprimento da régua se contrai e o período do relógio se dilata por um fator que depende da velocidade  $v$ .



Se a régua possui comprimento  $L_0$  e o relógio possui período  $T_0$  quando estão parados, o comprimento e o período em movimento são dados por

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{e} \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Como

$$-1 < -\frac{v^2}{c^2} < 1$$

podemos utilizar a série binomial para calcular o comprimento e o período em movimento. Segue-se então que

$$\begin{aligned} L &= L_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= L_0 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^n \\ &= L_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right) \end{aligned}$$

e também que

$$T = T_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= T_0 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^n \\
 &= T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right)
 \end{aligned}$$

## 2.8 SOLUÇÕES DE EDOs POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

Vamos agora procurar soluções EDOs lineares por meio de séries de potências

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Lembramos que

$$y'(x) = c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + c_4 4x^3 + \dots$$

$$y''(x) = c_2 2 + c_3 3 \cdot 2x + c_4 4 \cdot 3x^2 + c_5 5 \cdot 4x^3 + \dots$$

De outro modo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1) n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) x^n \end{aligned}$$

Temos que as condições iniciais determinam os dois primeiros coeficientes, uma vez que

$$\begin{cases} y(0) = c_0 = y_0 \\ y'(0) = c_1 = y_1 \end{cases}$$

Para determinarmos os demais coeficientes, temos que utilizar a EDO. Vamos ver como isso funciona por meio de exemplos, onde vamos obter as respectivas soluções canônicas.

### Exemplos

1) Primeiro, consideramos uma equação de coeficientes constantes

$$y''(x) + y(x) = 0$$

Vamos procurar soluções da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Substituindo

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

na EDO, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Somando as duas séries de potências, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n) x^n = 0$$

Pela unicidade dos coeficientes de séries de potências, a única série de potências identicamente nula é a que possui todos os coeficientes nulos, de modo que

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n = 0$$

para todo  $n \geq 0$ . Temos então que

$$c_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} c_n$$

que é denominada *equação de recorrência* dos coeficientes. A partir do coeficiente  $c_0$ , obtemos os coeficientes pares, uma

vez que

$$c_2 = \frac{-1}{(0+2)(0+1)}c_0 = \frac{-1}{2!}c_0$$

$$c_4 = \frac{-1}{(2+2)(2+1)}c_2 = \frac{-1}{4 \cdot 3} \frac{-1}{2!}c_0 = \frac{(-1)^2}{4!}c_0$$

$$c_6 = \frac{-1}{(4+2)(4+1)}c_2 = \frac{-1}{6 \cdot 5} \frac{(-1)^2}{4!}c_0 = \frac{(-1)^3}{6!}c_0$$

$\vdots$       $\vdots$

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}c_0$$

Por outro lado, a partir do coeficiente  $c_1$ , obtemos os coeficientes ímpares, uma vez que

$$c_3 = \frac{-1}{(1+2)(1+1)}c_1 = \frac{-1}{3!}c_1$$

$$c_5 = \frac{-1}{(3+2)(3+1)}c_3 = \frac{-1}{5 \cdot 4} \frac{-1}{3!}c_1 = \frac{(-1)^2}{5!}c_1$$

$$c_7 = \frac{-1}{(5+2)(5+1)}c_5 = \frac{-1}{7 \cdot 6} \frac{(-1)^2}{5!}c_1 = \frac{(-1)^3}{7!}c_1$$

$\vdots$       $\vdots$

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}c_1$$



Segue-se então que

$$c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!} c_0, & n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Para obtermos as soluções canônicas, devemos utilizar as respectivas condições iniciais.

Para  $y_1(x)$ , temos que

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 = c_0 \\ y_1'(0) = 0 = c_1 \end{cases}$$

de modo que

$$c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Por outro lado, para  $y_2(x)$ , temos que

$$\begin{cases} y_2(0) = 0 = c_0 \\ y_2'(0) = 1 = c_1 \end{cases}$$

de modo que

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \text{sen}(x) \end{aligned}$$

Observe que, pelo método das raízes características, já sabíamos que  $\cos$  e  $\text{sen}$  seriam duas soluções fundamentais.

2) Considere a seguinte equação de coeficientes variáveis

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0$$

Como antes, vamos procurar soluções da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Temos que

$$\begin{aligned} x^2 y'' &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n \end{aligned}$$

$$(3x - 1)y' = 3x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [3nc_n - (n+1)c_{n+1}]x^n$$

Substituindo na EDO temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} [3nc_n - (n+1)c_{n+1}]x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)c_n + 3nc_n + c_n - (n+1)c_{n+1}]x^n = 0$$

Uma vez que todos os coeficientes da série acima têm que se anular, temos que

$$\begin{aligned} (n(n-1) + 3n + 1)c_n - (n+1)c_{n+1} &= 0 \\ (n^2 + 2n + 1)c_n - (n+1)c_{n+1} &= 0 \\ (n+1)^2 c_n &= (n+1)c_{n+1} \end{aligned}$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Isolando o coeficiente de ordem mais alta, obtemos a seguinte equação de recorrência

$$c_{n+1} = (n+1)c_n$$

Segue-se que  $c_1 = 1c_0$ ,  $c_2 = 2c_1 = 2c_0$ ,  $c_3 = 3c_2 = 3!c_0$ ,  $c_4 = 4c_3 = 4!c_0$  e, em geral,

$$c_n = n!c_0$$

Assim, se  $c_0 = 0$ , então todo  $c_n = 0$  e obtemos a solução trivial  $y = 0$ . Se  $c_0 \neq 0$ , obtemos a solução

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

cujo raio de convergência é  $R = 0$ , como já vimos anteriormente (basta aplicar o teste da razão). Portanto, essa última função não é uma solução genuína, uma vez que não está definida num intervalo.

Esse exemplo mostra que devemos tomar cuidado ao procurar soluções por séries de potências: nem sempre existe alguma solução não nula dessa forma!

Não é difícil verificar que a função

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

é uma solução da equação acima. Essa função pode ser escrita como  $y(x) = xf'(x)$ , onde  $f(x)$  é a função do primeiro exemplo da seção Série de Taylor. Como  $f(x)$  possui todas as derivadas em todos os pontos da reta, o mesmo vale para essa solução  $y(x)$ , que, no entanto, não pode ser escrita como uma série de potências.

**3)** Agora, consideramos uma equação de coeficientes variáveis, a equação de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + 8y(x) = 0$$

Já procuramos soluções da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

que eram polinomiais. Agora vamos procurar também soluções que são séries de potências. Substituindo na EDO, temos

que

$$\begin{aligned} 8y(x) &= 8 \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 8c_n x^n \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned} -2xy'(x) &= -2x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} -2c_n n x^n \end{aligned}$$

e que

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

Como o coeficiente que multiplica a potência  $x^{n-2}$  é  $c_n n(n-1)$ , então o coeficiente que multiplica a potência  $x^{n-1}$  é  $c_{n+1}(n+1)n$ , e o coeficiente que multiplica a potência  $x^n$  é  $c_{n+2}(n+2)(n+1)$ , de modo que

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

onde começamos o segundo somatório em  $n = 0$ , uma vez que  $x^0$  é a primeira potência que aparece no primeiro somatório. Assim, a EDO é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (8c_n - 2nc_n + c_{n+2}(n+2)(n+1))x^n = 0$$

Para essa igualdade valer para todo  $x$ , os coeficientes da série de potência devem ser todos zero, de modo que

$$8c_n - 2nc_n + c_{n+2}(n+2)(n+1) = 0$$

para todo  $n \geq 0$ . Isolando  $c_{n+2}$  nessa equação, obtemos a equação de recorrência

$$c_{n+2} = \frac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)} c_n$$

Conhecendo  $c_0$  e  $c_1$ , podemos usar a equação de recorrência para obter todos os outros coeficientes  $c_n$  de  $y(x)$ . Vamos determinar as soluções canônicas  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ .

Temos que  $y_1(x)$  satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_1(0) = 1 \quad c_1 = y_1'(0) = 0$$

Usando a equação de recorrência, temos que

$$c_2 = \frac{2 \cdot 0 - 8}{2 \cdot 1} c_0 = -4 \cdot 1 = -4$$

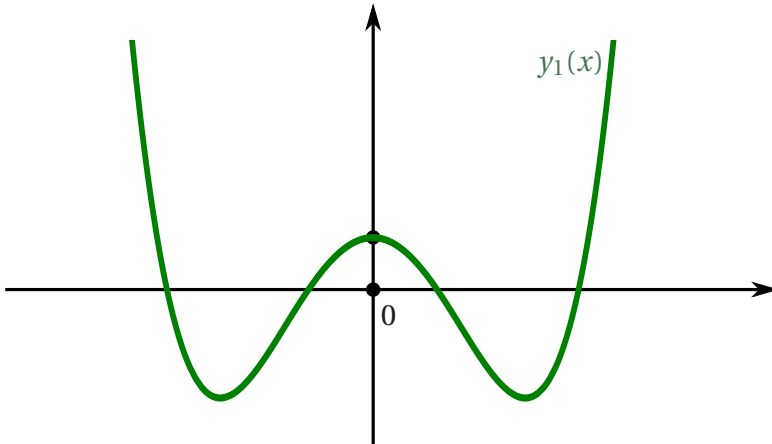
$$c_4 = \frac{2 \cdot 2 - 8}{4 \cdot 3} c_2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-4) = \frac{4}{3}$$

$$c_6 = \frac{2 \cdot 4 - 8}{6 \cdot 5} c_4 = 0 \cdot \frac{4}{3} = 0$$

e, a partir daí, temos  $c_8 = c_{10} = \dots = 0$ , uma vez que, pela equação de recorrência, cada coeficiente par é obtido a partir da multiplicação pelo coeficiente par anterior. Uma vez que  $c_1 = 0$ , temos que  $c_3 = c_5 = \dots = 0$ , uma vez que, pela equação de recorrência, cada coeficiente ímpar é obtido a partir da multiplicação pelo coeficiente ímpar anterior. Obtemos assim a solução

$$y_1(x) = 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4$$

que é um polinômio de grau  $N = 4$ .



Temos que  $y_2(x)$  satisfaz as condições iniciais

$$c_0 = y_2(0) = 0 \quad c_1 = y_2'(0) = 1$$

Como  $c_0 = 0$ , temos que  $c_2 = c_4 = \dots = 0$ , uma vez que, pela equação de recorrência, cada coeficiente par é obtido a partir da multiplicação pelo coeficiente par anterior. Também pela equação de recorrência, cada coeficiente ímpar é obtido do coeficiente ímpar anterior multiplicando por

$$\frac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)}$$

que nunca é igual a zero, pois  $n$  é ímpar. Como  $c_1 = 1$ , todos coeficientes ímpares são diferentes de zero de modo que a série de potências

$$y_2(x) = x + c_3x^3 + c_5x^5 + \dots + c_{2k+1}x^{2k+1} + \dots$$

não é um polinômio.

Podemos obter o raio de convergência dessa série de potências a partir da fórmula de recorrência. De fato, basta notar

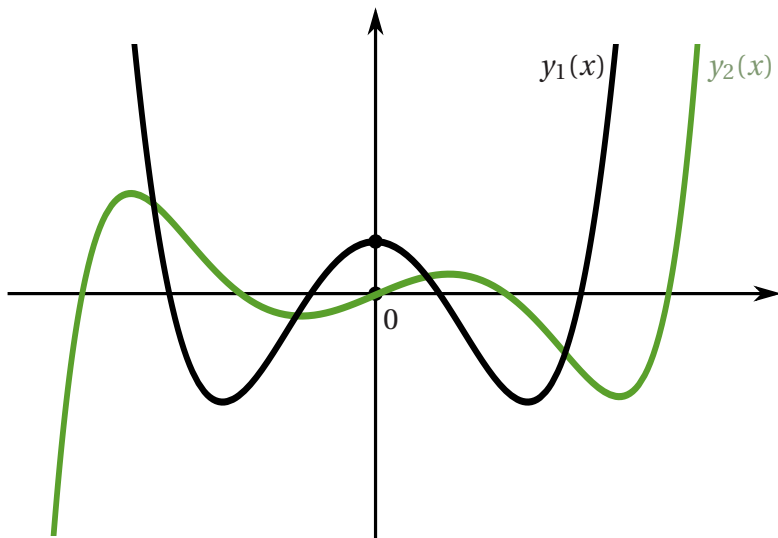
que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{2(k+1)+1} x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = |x|^2 \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \right| = 0$$

uma vez que, usando a equação de recorrência com  $n = 2k + 1$ , segue-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2((2k+1)-4)}{(2k+3)(2k+2)} = 0$$

Este último limite pode ser calculado usando a regra de L'Hospital ou mesmo colocando-se o fator  $k^2$  em evidência tanto no numerador quanto no denominador. Segue-se que o raio de convergência de  $y_2(x)$  é  $R = \infty$ .



Finalizamos este capítulo observando que o procedimento apresentado nos exemplos acima pode ser usado para resolver qualquer equação em que os coeficientes  $p(x)$  e  $q(x)$  são séries de potência. O eventual fato de a fórmula de recorrência não ter uma expressão simples não é importante. O que é necessário é que seja possível calcular um coeficiente  $c_n$  a

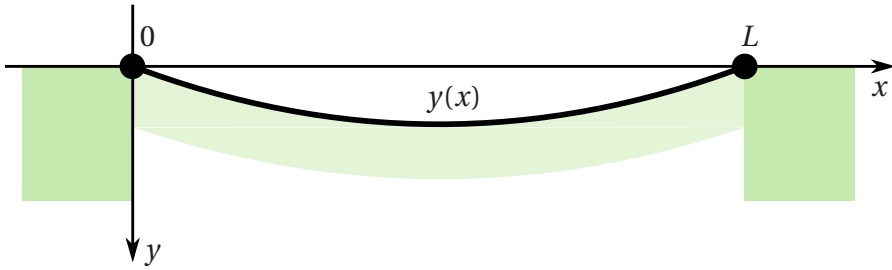


partir dos coeficientes anteriores, com as condições iniciais, fornecendo os primeiros coeficientes.

## ORDEM SUPERIOR E SISTEMAS

Neste capítulo, vamos estudar métodos alternativos para resolver EDOs e sistemas de EDOs de coeficientes constantes. Esses métodos são inspirados no método das raízes características, mas têm um alcance maior: eles se aplicam a EDOs homogêneas com coeficientes constantes de ordem mais alta, a EDOs não homogêneas com certos tipos de forçamento, e a sistemas de EDOs com coeficientes constantes.

Um exemplo interessante de equação de ordem superior é o de uma viga oscilando harmonicamente. Considere uma viga de comprimento  $L$  e seção transversal constante oscilando harmonicamente com um perfil que varia com o tempo, descrito por  $y(x) \cos(\omega t)$ , onde  $\omega$  é a frequência de oscilação,  $x \in [0, L]$  é a posição longitudinal na viga e  $y(x)$  é a altura do perfil máximo.



Temos que o perfil  $y(x)$  satisfaz a EDO de quarta ordem

$$ay''''(x) + by''(x) + cy(x) = 0$$

conhecida como equação da viga de Rayleigh-Timoshenko, cujos coeficientes são dados por

$$a = EI, \quad b = \omega^2 J \left( 1 + \frac{E}{G} \right), \quad c = \frac{\omega^4 J^2}{IG} - \rho \omega^2$$

onde  $E$  e  $G$  dependem do material da viga, sendo conhecidos como módulos de Young e de cisalhamento,  $I$  e  $J$  dependem também da geometria da seção transversal da viga, sendo conhecidos como momentos de inércia e de inércia polar, e  $\rho$  é a densidade linear da viga.

### 3.1 RAÍZES CARACTERÍSTICAS

Considere uma EDO linear homogênea de ordem  $n$  e coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

onde  $y = y(t)$  e os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  são constantes reais. Assim como no caso de EDOs de segunda ordem, podemos considerar a respectiva equação característica

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

e introduzir o denominado *polinômio característico*

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

Podemos reescrever a EDO por meio do polinômio característico e do denominado *operador de derivação*, dado por

$$Dy = y'$$

de modo que

$$D^2y = DDy = Dy' = y''$$

e, de modo mais geral, que

$$D^n y = y^{(n)}$$

Denotando

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

podemos definir

$$\begin{aligned} p(D)y &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y \\ &= a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y \end{aligned}$$

de modo que a EDO pode ser escrita como

$$p(D)y = 0$$

Queremos usar o que sabemos sobre fatoração de polinômios para auxiliar a determinar a solução geral de uma EDO linear com coeficientes constantes. Para isso, o seguinte resultado é fundamental.

### Proposição 3.1

Sejam  $p$  e  $q$  dois polinômios quaisquer, temos que

$$(p(D)q(D))y = p(D)(q(D)y)$$

Além disso, se

$$p(D)y = 0$$

$$q(D)z = 0$$

então

$$p(D)q(D)(y+z) = 0$$

Esse resultado é consequência do fato de a derivada separar a soma e do fato de o produto por constante sair da derivada.

### Prova:

Se

$$\begin{aligned} p(D) &= a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0 \\ q(D) &= b_m D^m + \cdots + b_1 D + b_0 \end{aligned}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} p(D)q(D) &= a_n b_m D^{m+n} + \cdots + a_n b_1 D^{1+n} + a_n b_0 D^n + \cdots \\ &\quad \cdots + a_1 b_m D^{m+1} + \cdots + a_1 b_1 D^2 + a_1 b_0 D + \\ &\quad + a_0 b_m D^m + \cdots + a_0 b_1 D + a_0 b_0 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$q(D)y = b_m y^{(m)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y$$

Como a derivada separa soma e o produto por constante sai da derivada, segue-se que

$$\begin{aligned} p(D)(q(D)y) &= a_n b_m y^{(m+n)} + \cdots + a_n b_1 y^{(1+n)} + a_n b_0 y^{(n)} + \cdots \\ &\quad \cdots + a_1 b_m y^{(m+1)} + \cdots + a_1 b_1 y'' + a_1 b_0 y' + \\ &\quad + a_0 b_m y^{(m)} + \cdots + a_0 b_1 y' + a_0 b_0 y \end{aligned}$$

Das equações acima, segue-se imediatamente que

$$(p(D)q(D))y = p(D)(q(D)y)$$

A segunda parte segue da primeira, pois

$$p(D)q(D)(y+z) = p(D)q(D)y + p(D)q(D)z$$

$$\begin{aligned}
 &= q(D)p(D)y + p(D)q(D)z \\
 &= q(D)(p(D)y) + p(D)(q(D)z) \\
 &= q(D)0 + p(D)0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



### Exemplo

A EDO  $y'' - y = 0$  pode ser escrita como

$$(D^2 - 1)y = 0$$

O polinômio característico se fatora como

$$r^2 - 1 = (r + 1)(r - 1)$$

Afirmamos que

$$D^2 - 1 = (D + 1)(D - 1)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 (D + 1)(D - 1)y &= (D + 1)(y' - y) \\
 &= (y' - y)' + (y' - y) \\
 &= y'' - y \\
 &= (D^2 - 1)y
 \end{aligned}$$

Observe que a ordem dos fatores não importa

$$\begin{aligned}
 (D - 1)(D + 1)y &= (D - 1)(y' + y) \\
 &= (y' + y)' - (y' + y) \\
 &= y'' - y \\
 &= (D^2 - 1)y
 \end{aligned}$$

Assim, a EDO original fica fatorada como

$$\begin{aligned}(D^2 - 1)y &= (D + 1)(D - 1)y = 0 \\ &= (D - 1)(D + 1)y = 0\end{aligned}$$

Mais do que simplificar a EDO, a fatoração usando o operador derivada  $D$  fornece um método para encontrar soluções. De fato, se  $(D - 1)y = 0$ , então  $y$  é solução da EDO original, pois

$$\begin{aligned}(D^2 - 1)y &= (D + 1)\underbrace{(D - 1)y}_{=0} \\ &= (D + 1)0 \\ &= 0\end{aligned}$$

logo  $C_1 e^t$  é solução da EDO original. Também, se  $(D + 1)y = 0$ , então  $y$  é solução da EDO original, pois

$$\begin{aligned}(D^2 - 1)y &= (D - 1)\underbrace{(D + 1)y}_{=0} \\ &= (D - 1)0 \\ &= 0\end{aligned}$$

logo  $C_2 e^{-t}$  é solução da EDO original.

Uma vez que  $e^t$  e  $e^{-t}$  são soluções não proporcionais, segue-se que a solução geral da EDO homogênea fatorada

$$(D^2 - 1)y = (D + 1)(D - 1)y = 0$$

é a soma da solução geral das EDOs homogêneas de cada um dos fatores

$$(D + 1)y = 0 \quad \text{e} \quad (D - 1)y = 0$$

Suponha agora que o polinômio característico da EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

possa ser fatorado como

$$p(r) = a_n (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \dots (r - r_k)^{m_k}$$

onde  $r_1, r_2, \dots, r_k$  são distintos. Segue-se que

$$p(D) = a_n (D - r_1)^{m_1} (D - r_2)^{m_2} \dots (D - r_k)^{m_k}$$

de modo que a EDO pode ser reescrita como

$$a_n (D - r_1)^{m_1} (D - r_2)^{m_2} \dots (D - r_k)^{m_k} y = 0$$

Pela Proposição 3.1, temos que a soma das soluções das equações

$$\begin{aligned} (D - r_1)^{m_1} y &= 0 \\ (D - r_2)^{m_2} y &= 0 \\ &\vdots \\ (D - r_k)^{m_k} y &= 0 \end{aligned}$$

é solução da EDO original. Como uma dada raiz  $r$  pode ser complexa, vamos primeiramente determinar a solução geral complexa dessas EDOs. Posteriormente nesta seção, vamos utilizar a Proposição A.11 para obter a solução geral real da EDO original como sendo a parte real da solução geral complexa da EDO original.

### Proposição 3.2

Escrevendo

$$y(t) = e^{rt} z(t)$$

temos que

$$(D - r)^m y = e^{rt} D^m z$$



Em particular, temos que a solução geral complexa de

$$(D - r)^m y = 0$$

é dada por

$$y(t) = P(t)e^{rt}$$

onde  $P(t)$  é um polinômio em  $t$  com coeficientes complexos quaisquer e com grau  $m - 1$ .

### Prova:

Vamos provar que

$$(D - r)^m y = e^{rt} D^m z$$

por indução em  $m$ . Para  $m = 1$ , temos

$$(D - r)e^{rt} z = (e^{rt} z)' - rze^{rt} = e^{rt} z' = e^{rt} Dz$$

Supondo que a fórmula vale para  $m - 1$ , vamos mostrar que vale para  $m$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} (D - r)^m e^{rt} z &= (D - r)[(D - r)^{m-1} e^{rt} z] \\ &= (D - r)e^{rt} D^{m-1} z \\ &= e^{rt} DD^{m-1} z \\ &= e^{rt} D^m z \end{aligned}$$

Para obter a solução geral de

$$(D - r)^m y = 0$$

escrevendo  $y(t) = e^{rt} z(t)$ , temos que

$$(D - r)^m y = e^{rt} D^m z = 0$$

que é equivalente a

$$D^m z = 0$$

A solução geral dessa última EDO é obtida por  $m$  integrações, de modo que

$$z(t) = P(t) = C_1 + C_2 t + \dots + C_m t^{m-1}$$

onde  $C_1, C_2, \dots, C_m$  são constantes complexas arbitrárias. ■

Se a EDO original pode ser escrita como

$$a_n(D - r_1)^{m_1}(D - r_2)^{m_2} \dots (D - r_k)^{m_k} y = 0$$

pelas Proposições 3.1 e 3.2, segue-se então que

$$P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \dots + P_k(t)e^{r_k t}$$

é solução da EDO, onde  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_k(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes complexos quaisquer e com graus, respectivamente,  $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_k - 1$ . Resta então apenas mostrar que essa é de fato a solução geral e, para isso, precisamos do seguinte resultado.

### Proposição 3.3

Se  $r \neq 0$  é um número complexo e  $P(t)$  é um polinômio em  $t$  com coeficientes complexos, então

$$\int P(t)e^{rt} dt = Q(t)e^{rt} + C$$

onde  $Q(t)$  é um polinômio em  $t$  com coeficientes complexos com mesmo grau de  $P(t)$ , e  $C$  é uma constante complexa arbitrária.

### Prova:

Vamos demonstrar essa proposição por indução no grau de  $P(t)$ . Se

$P(t)$  tem grau zero, então  $P(t) = P$ , constante, de modo que

$$\int P(t)e^{rt} dt = P \frac{e^{rt}}{r} + C = Q(t)e^{rt} + C$$

onde  $Q(t) = P/r$  tem grau zero. Se o grau de  $P(t)$  é positivo, integrando por partes, temos que

$$\int P(t)e^{rt} dt = P(t) \frac{e^{rt}}{r} - \int P'(t) \frac{e^{rt}}{r} dt$$

Como o grau de  $P'(t)$  é o grau de  $P(t)$  menos um, podemos usar a hipótese de indução para escrever

$$\int P'(t) \frac{e^{rt}}{r} dt = R(t)e^{rt} + A$$

onde  $R(t)$  é um polinômio em  $t$  com coeficientes complexos com mesmo grau de  $P'(t)$  e  $A$  é uma constante complexa arbitrária. Segue-se então que

$$\int P(t)e^{rt} dt = P(t) \frac{e^{rt}}{r} - R(t)e^{rt} - A = Q(t)e^{rt} + C$$

onde  $Q(t) = P(t)/r - R(t)$  é um polinômio em  $t$  com coeficientes complexos com mesmo grau de  $P(t)$  e  $C = -A$  é uma constante complexa arbitrária. ■

### Teorema 3.4

Suponha que o polinômio característico da EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

possa ser escrito como

$$p(r) = a_n (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k}$$

onde  $r_1, r_2, \dots, r_k$  são distintos. Então, a solução geral complexa da EDO é dada por

$$P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \dots + P_k(t)e^{r_k t}$$

onde  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_k(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes complexos quaisquer e com graus menores que, respectivamente,  $m_1, m_2, \dots, m_k$ .

### Prova:

Pelo que observamos acima, resta apenas mostrar que toda solução possui essa forma. Vamos demonstrar esse resultado por indução no número de raízes distintas. Quando temos apenas uma raiz distinta, o resultado segue da Proposição 3.2. Supondo que já demonstramos o resultado para  $k$  raízes distintas, vamos mostrar que também é válido para  $k + 1$  raízes distintas. Nesse caso, a EDO pode ser escrita como

$$a_n(D - r_1)^{m_1}(D - r_2)^{m_2} \dots (D - r_k)^{m_k}(D - r_{k+1})^{m_{k+1}} y = 0$$

Escrevendo

$$u = (D - r_{k+1})^{m_{k+1}} y$$

temos que  $u$  satisfaz a EDO

$$a_n(D - r_1)^{m_1}(D - r_2)^{m_2} \dots (D - r_k)^{m_k} u = 0$$

de modo que  $u$  pode ser escrita como

$$u(t) = P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \dots + P_k(t)e^{r_k t}$$

onde  $P_1(t), P_2(t), \dots, P_k(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes complexos com graus menores que, respectivamente,

$m_1, m_2, \dots, m_k$ . Segue-se então que

$$(D - r_{k+1})^{m_{k+1}} y = P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \dots + P_k(t)e^{r_k t}$$

Escrevendo

$$y = e^{r_{k+1} t} z$$

pela primeira parte da Proposição 3.2, temos que

$$e^{r_{k+1} t} D^{m_{k+1}} z = P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \dots + P_k(t)e^{r_k t}$$

de modo que

$$D^{m_{k+1}} z = P_1(t)e^{(r_1 - r_{k+1})t} + P_2(t)e^{(r_2 - r_{k+1})t} + \dots + P_k(t)e^{(r_k - r_{k+1})t}$$

Integrando essa equação  $m_{k+1}$  vezes e usando a Proposição 3.3, temos que

$$z(t) = Q_1(t)e^{(r_1 - r_{k+1})t} + Q_2(t)e^{(r_2 - r_{k+1})t} + \dots + Q_k(t)e^{(r_k - r_{k+1})t} + Q_{k+1}(t)$$

onde  $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_k(t), Q_{k+1}(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes complexos com graus menores que, respectivamente,  $m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}$ . Segue-se então que

$$y(t) = Q_1(t)e^{r_1 t} + Q_2(t)e^{r_2 t} + \dots + Q_k(t)e^{r_k t} + Q_{k+1}(t)e^{r_{k+1} t}$$

como queríamos demonstrar. ■

Agora podemos obter a solução geral real de uma EDO linear com coeficientes constantes. Lembramos que, como os coeficientes são reais, as eventuais raízes complexas sempre aparecem aos pares conjugados com a mesma multiplicidade.

### Teorema 3.5

A solução geral real da EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

é dada pela soma de parcelas determinadas pelas raízes distintas da seguinte forma:

A) uma raiz real  $r$  com multiplicidade  $m$  determina a parcela

$$p(t)e^{rt}$$

onde  $p(t)$  é um polinômio em  $t$  com coeficientes reais quaisquer e com grau menor que  $m$ .

B) um par de raízes complexas conjugadas  $a \pm ib$  com multiplicidade  $m$  determina a parcela

$$p(t)e^{at} \cos(bt) + q(t)e^{at} \sin(bt)$$

onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes reais quaisquer e com graus menores que  $m$ .

### Prova:

Pela Proposição A.11, a solução geral real da EDO original é dada pela parte real da solução geral complexa da EDO original. Além disso, a parte real de uma soma é a soma das partes reais.

Se  $r$  é uma raiz real com multiplicidade  $m$ , ela determina a parcela  $P(t)e^{rt}$  na solução geral complexa, com  $P(t) = p(t) + iq(t)$ , onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes reais quaisquer e com grau menor que  $m$ . Segue-se que a parte real de  $P(t)e^{rt}$  é dada por  $p(t)e^{rt}$ .

Se  $a \pm ib$  é um par de raízes complexas conjugadas com multiplicidade  $m$ , elas determinam as parcelas  $R(t)e^{(a+ib)t} + U(t)e^{(a-ib)t}$  na solução geral complexa, com  $R(t) = r(t) + is(t)$  e  $U(t) = u(t) + iv(t)$ , onde  $r(t), s(t), u(t), v(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes reais

quaisquer e com graus menores que  $m$ . Como

$$e^{(a \pm ib)t} = e^{at} \cos(bt) \pm i e^{at} \sin(bt)$$

segue-se que a parte real de  $R(t)e^{(a+ib)t} + U(t)e^{(a-ib)t}$  é dada por

$$p(t)e^{at} \cos(bt) + q(t)e^{at} \sin(bt)$$

onde  $p(t) = r(t) + u(t)$  e  $q(t) = -s(t) + v(t)$  são polinômios em  $t$  com coeficientes reais quaisquer e com graus menores que  $m$ . ■

### Exemplos

1) O resultado anterior recupera a solução geral de

$$y'' + qy' + py = 0$$

De fato, vamos analisar as possibilidades para as raízes características.

Se ela possui raízes reais distintas  $r_1, r_2$ , então cada uma delas tem multiplicidade um. A raiz  $r_1$  determina a parcela  $c_1 e^{r_1 t}$ , uma vez que um polinômio de grau zero é uma constante. Do mesmo modo, a raiz  $r_2$  determina a parcela  $c_2 e^{r_2 t}$ , de modo que a solução geral nesse caso é dada por

$$c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Se ela possui uma raiz real única  $r$ , então ela tem multiplicidade dois e determina a parcela  $(c_1 + c_2 t)e^{r t}$ , uma vez que o polinômio da parcela tem grau, no máximo, um. A solução geral nesse caso é dada então por

$$c_1 e^{r t} + c_2 t e^{r t}$$

Se ela possui um par de raízes complexas conjugadas  $a \pm ib$ , então esse par tem multiplicidade um. Esse par determina a

parcela  $c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$ , uma vez que polinômios de grau zero são constantes. A solução geral nesse caso é dada por

$$c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt)$$

2) A EDO de 3ª ordem

$$(D - 2)^3 y = 0$$

tem apenas uma raiz característica igual a 2 com multiplicidade 3, logo, tem solução geral

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{2t}$$

3) A EDO de 3ª ordem

$$(D - 2)^2 (D + 5) y = 0$$

tem raiz característica igual a 2 com multiplicidade 2 e raiz característica igual a  $-5$  com multiplicidade 1, logo, tem solução geral

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{2t} + c_3 e^{-5t}$$

4) A EDO de 2ª ordem

$$(D^2 - 4D + 13) y = 0$$

é uma EDO com coeficientes reais e tem raízes características iguais a  $2 \pm 3i$  com multiplicidade 1, logo, tem solução geral

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t)$$



5) A EDO de 4ª ordem

$$(D^2 - 4D + 13)^2 y = 0$$

é uma EDO com coeficientes reais e tem raízes características iguais a  $2 \pm 3i$  com multiplicidade 2, logo, tem solução geral

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} \cos(3t) + (c_3 + c_4 t)e^{2t} \sin(3t)$$

6) No modelo de Rayleigh-Timoshenko, apresentado no início do capítulo, considere uma viga de comprimento  $L = \pi$  cujo perfil máximo  $y(x)$  satisfaz a EDO de quarta ordem

$$y''''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = 0$$

Sua equação característica é

$$r^4 + 3r^2 - 4 = 0$$

Fazendo  $r^2 = s$ , temos que

$$s^2 + 3s - 4 = 0$$

cujas raízes são

$$s_1 = 1 \quad \text{e} \quad s_2 = -4$$

Segue-se, então, que as raízes características são dadas por

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = 2i, \quad r_4 = -2i$$

Logo, a equação característica pode ser fatorada como

$$(r - 1)(r + 1)(r - 2i)(r + 2i) = 0$$

e a EDO fatorada fica

$$(D - 1)(D + 1)(D - 2i)(D + 2i)y = 0$$

A solução geral é então dada por

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$$

## 3.2 COEFICIENTES A DETERMINAR

Uma maneira de resolver certos tipos de EDOs não homogêneas de coeficientes constantes é anular o forçamento, transformando-as em EDOs homogêneas de ordem maior.

### Exemplos

1) Considere a EDO não homogênea de 1ª ordem

$$(D - 2)y = 3e^{-5t}$$

A homogênea associada é

$$(D - 2)y = 0$$

que tem raiz característica igual a 2, de multiplicidade 1, portanto, a solução geral da homogênea é

$$y_h(t) = c_1 e^{2t}$$

Observe que o forçamento  $3e^{-5t}$  é solução de uma EDO homogênea com raiz característica igual a  $-5$  de multiplica-

dade 1, portanto, o forçamento é solução de

$$(D + 5)y = 0$$

isto é,  $(D + 5)(3e^{-5t}) = 0$ . Dizemos que  $(D + 5)$  anula  $3e^{-5t}$ . Assim, aplicando  $(D + 5)$  em ambos os lados da equação não homogênea

$$\begin{aligned}(D - 2)y &= 3e^{-5t} \\ \Rightarrow (D + 5)(D - 2)y &= (D + 5)(3e^{-5t}) \\ \Rightarrow (D + 5)(D - 2)y &= 0\end{aligned}$$

temos que toda solução  $y$  da não homogênea de 1ª ordem é solução de uma homogênea de 2ª ordem, a equação aumentada, que é homogênea.

Como a equação aumentada tem raiz característica igual a 2 de multiplicidade 1, e igual a  $-5$  de multiplicidade 1, sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + \boxed{Ae^{-5t}}$$

Observe que a solução geral da equação aumentada não é a solução geral da não homogênea original, pois apresenta mais constantes arbitrárias do que deveria. Porém, a primeira parte de  $y(t)$  é solução geral da homogênea associada, e a parte destacada

$$y_p(t) = Ae^{-5t}$$

é candidata à solução particular da não homogênea. Para determiná-la, devemos determinar o coeficiente  $A$  e, para isso, basta substituir  $y_p$  na não homogênea:

$$\begin{aligned}(D - 2)Ae^{-5t} &= (Ae^{-5t})' - 2Ae^{-5t} \\ &= A(-5e^{-5t} - 2e^{-5t}) \\ &= A(-7e^{-5t}) \\ &= 3e^{-5t}\end{aligned}$$

de onde temos que  $A = -3/7$ . Assim,  $-3/7e^{-5t}$  é uma solução particular, e a solução geral da não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{2t} - \frac{3}{7} e^{-5t}$$

2) Agora vamos mudar o forçamento e considerar a EDO não homogênea de 1ª ordem

$$(D - 2)y = 4e^{2t}$$

Observe que o forçamento  $4e^{2t}$  é solução de uma EDO homogênea com raiz característica igual a 2 de multiplicidade 1, portanto, o forçamento é solução de

$$(D - 2)y = 0$$

isto é,  $(D - 2)(4e^{2t}) = 0$ . Dizemos que  $(D - 2)$  anula  $4e^{2t}$ . Assim, aplicando  $(D - 2)$  em ambos os lados da equação não homogênea

$$\begin{aligned} (D - 2)y &= 4e^{2t} \\ \Rightarrow (D - 2)(D - 2)y &= (D - 2)(4e^{2t}) \\ \Rightarrow (D - 2)^2 y &= 0 \end{aligned}$$

temos que toda solução  $y$  da não homogênea é solução da equação aumentada, que é homogênea.

Como a equação aumentada tem raiz característica igual a 2 de multiplicidade 2, sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + \boxed{Ate^{2t}}$$

Novamente, a solução geral da equação aumentada não é a solução geral da não homogênea original, porém, a primeira

parte de  $y(t)$  é solução geral da homogênea associada e a parte destacada

$$y_p(t) = Ate^{2t}$$

é candidata à solução particular da não homogênea. Para determiná-la, devemos determinar o coeficiente  $A$  e, para isso, basta substituir  $y_p$  na não homogênea:

$$\begin{aligned} (D-2)Ate^{2t} &= (Ate^{2t})' - 2Ate^{2t} \\ &= A(e^{2t} + 2te^{2t} - 2te^{2t}) \\ &= A(e^{2t}) \\ &= 4e^{2t} \end{aligned}$$

de onde temos que  $A = 4$ . Assim,  $4te^{2t}$  é uma solução particular, e a solução geral da não homogênea é

$$y(t) = c_1e^{2t} + 4te^{2t}$$

Observe que resolvemos a não homogênea sem integrar nenhuma vez, apenas derivando. Note também que a equação aumentada não fornece diretamente a solução geral da não homogênea, mas fornece um candidato certo para a solução particular: para determiná-lo, basta determinar os coeficientes que o acompanham. Por conta disso, esse método é conhecido por *método dos coeficientes a determinar*. Seus passos são os seguintes.

### Passos

- 1) Homogênea:** Fatorar a homogênea associada usando o operador derivada  $D$  e obter sua solução geral.

**2) Anular:** Anular o forçamento da não homogênea obtendo a *equação aumentada*, que é homogênea.

Forçamento	Anulado por
polinômio $p(t)$ de grau $< m$	$D^m$
$Ae^{rt}$	$(D - r)$
$p(t)e^{rt}$	$(D - r)^m$
$Ae^{at} \cos(bt)$	$(D - (a + ib))(D - (a - ib))$
$p(t)e^{at} \cos(bt)$	$(D - (a + ib))^m (D - (a - ib))^m$

Forçamentos que possuem o seno são anulados da mesma maneira que os forçamentos que possuem o cosseno.

**3) Forma da solução particular:** Obter a solução geral da equação aumentada e identificar a parte que vem da homogênea: a outra parte fornece a forma da solução particular da não homogênea.

**4) Determinar os coeficientes:** Determinar os coeficientes da forma da solução particular substituindo-a na equação não homogênea original: isso fornece uma solução particular.

A solução geral da não homogênea é a solução geral da homogênea associada somada a essa solução particular.

Observe que usar a tabela anterior é como resolver uma EDO ao contrário: dado um forçamento no lado esquerdo, devemos descobrir qual raiz característica igual a  $r$ , e com qual multiplicidade  $m$ , devemos ter numa EDO para que o forçamento seja uma de suas soluções. Ao utilizar essa raiz com multiplicidade e o operador derivada  $D$ , obtemos, no lado direito, o anulador desse forçamento.

Esse método se aplica apenas para EDOs de coeficientes constantes com forçamento da forma dada na tabela anterior ou uma combinação linear de forçamentos da forma acima: caso contrário, deve-se recorrer ao método da variação dos parâmetros.

## OSCILAÇÕES FORÇADAS

Vimos no primeiro capítulo que o movimento sem força externa de um sistema massa-mola sem amortecimento e de um circuito LC sem resistência são modelados pela mesma EDO homogênea

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

onde  $\omega > 0$  é a frequência natural da oscilação livre. A equação característica é

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

com raízes características  $\pm i\omega$ . Logo, a EDO se fatora como

$$(D - i\omega)(D + i\omega)y = 0$$

e sua solução geral é

$$y_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

Queremos descrever agora o movimento das oscilações forçadas por uma força externa periódica de frequência  $\omega_0$  e amplitude  $L$  dada por

$$y'' + \omega^2 y = L \cos(\omega_0 t)$$

Essa equação pode ser fatorada como

$$(D - i\omega)(D + i\omega)y = L \cos(\omega_0 t)$$

Observe que o forçamento é solução de uma EDO com raízes características  $\pm i\omega_0$ , logo, o forçamento é anulado por

$$(D - i\omega_0)(D + i\omega_0)$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}(D - i\omega)(D + i\omega)y &= L \cos(\omega_0 t) \\ \implies (D - i\omega_0)(D + i\omega_0)(D - i\omega)(D + i\omega)y &= (D - i\omega_0)(D + i\omega_0)L \cos(\omega_0 t) \\ \implies (D - i\omega_0)(D + i\omega_0)(D - i\omega)(D + i\omega)y &= 0\end{aligned}$$

de onde temos que toda solução  $y$  da não homogênea é solução da homogênea aumentada de 4ª ordem.

As soluções da homogênea aumentada

$$(D - i\omega_0)(D + i\omega_0)(D - i\omega)(D + i\omega)y = 0$$

vão depender da multiplicidade de suas raízes características. Se  $\omega_0 \neq \omega$ , então estamos forçando a oscilação numa frequência diferente da sua frequência natural. Nesse caso temos raízes características distintas  $\pm i\omega$ ,  $\pm i\omega_0$ , cada uma com multiplicidade 1, portanto, a solução geral da homogênea aumentada é

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \boxed{A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)}$$

Para determinar  $A$  e  $B$ , basta substituir a parte destacada na equação original. Antes disso já podemos descrever o movimento da oscilação forçada nesse caso: ocorre uma superposição de frequências distintas no movimento final, um fenômeno conhecido como batimento ou interferência destrutiva. Se  $\omega_0 = \omega$ , então estamos forçando a oscilação numa frequência igual à sua frequência natural. Nesse caso temos raízes características  $\pm i\omega$ , cada uma com multiplicidade 2,

$$(D - i\omega)^2(D + i\omega)^2y = 0$$

portanto, a solução geral da homogênea aumentada é

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \boxed{At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)}$$

Para determinar  $A$  e  $B$ , basta substituir a parte destacada na equação original. Antes disso já podemos descrever o movimento da oscilação forçada nesse caso: a amplitude do movimento aumenta com o tempo,



devido ao fator  $t$ , um fenômeno conhecido como ressonância ou interferência construtiva.

É interessante ver como fenômenos físicos, como batimento e ressonância, se manifestam na multiplicidade de raízes características de uma EDO.

### 3.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Agora veremos um método de resolver EDOs que transforma um PVI de coeficientes constantes numa equação algébrica. A *transformada de Laplace* de uma dada função  $y(t)$  é uma nova função com variável independente dada por  $s$  e definida pela seguinte integral imprópria

$$L[y(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt$$

O domínio da transformada é o conjunto dos  $s \in \mathbb{R}$  tais que a integral imprópria existe e é finita. Quando for conveniente, suprimiremos algumas das respectivas variáveis independentes, de modo que a transformada da função  $y(t)$  poderá ser denotada por  $L[y(t)]$  ou por  $L[y](s)$  ou ainda por  $L[y]$ .

#### Exemplo

A transformada da função  $e^{at}$  é dada por

$$\begin{aligned} L[e^{at}](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt \\ &= \left[ \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^{\infty} \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right) - \frac{e^{(a-s)0}}{a-s} \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

para todo  $s > a$ , que é o domínio dessa transformada, uma vez que a integral imprópria é infinita para todo  $s \leq a$ .

Pode-se mostrar que, quando uma função  $y(t)$  possui *crescimento exponencial*, ou seja, quando existem constantes  $c$  e  $M$  tais que  $|y(t)| \leq Me^{ct}$ , a transformada  $L[y]$  possui domínio da forma  $(a, \infty)$ . Uma vez que não será de utilidade para os resultados deste capítulo, não vamos nos preocupar em determinar os domínios das diversas transformadas a serem consideradas.

## LINEARIDADE DA TRANSFORMADA

Uma das propriedades mais simples da transformada é que a transformada da combinação linear é a combinação linear das transformadas.

### Proposição 3.6

Para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que

$$L[ay + bz] = aL[y] + bL[z]$$

### Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} L[ay + bz] &= \int_0^{\infty} e^{-st}(ay(t) + bz(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} ae^{-st}y(t) + be^{-st}z(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} z(t) dt \\
 &= aL[y] + bL[z]
 \end{aligned}$$



### Exemplos

1) Temos que

$$\begin{aligned}
 L[3e^{2t} - 2e^{-3t}] &= 3L[e^{2t}] - 2L[e^{-3t}] \\
 &= 3\frac{1}{s-2} - 2\frac{1}{s+3}
 \end{aligned}$$

2) Temos que

$$\begin{aligned}
 L[\sinh(at)] &= L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{(s-a)(s+a)}\right) \\
 &= \frac{a}{s^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

## TRANSFORMADA DA DERIVADA

A mais importante propriedade da transformada é que ela transforma derivar em relação à variável  $t$  em multiplicar pela variável  $s$ . Essa é a propriedade que a torna útil na resolução de PVIs, como veremos mais adiante nesta seção.

**Proposição 3.7**

Temos que

$$L[y'] = sL[y] - y(0)$$

**Prova:**

A demonstração se baseia na regra da integração por partes e no fato de que

$$(e^{-st})' = -se^{-st}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^{\infty} e^{-st} y'(t) dt \\ &= [e^{-st} y(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} y(t) dt \\ &= -y(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt \\ &= sL[y] - y(0) \end{aligned}$$

onde utilizamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) e^{-st} = 0$$

para  $s$  suficientemente grande. ■

**Exemplo**

Outra forma de obter a transformada de  $y(t) = e^{at}$ , é primeiro

observar que ela é a solução do PVI

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando a transformada na EDO e usando a linearidade, temos que

$$L[y'] = aL[y]$$

Usando a transformada da derivada e usando as condições iniciais, segue-se que

$$sL[y] - y(0) = sL[y] - 1 = aL[y]$$

de modo que, isolando a transformada da solução, obtemos

$$L[e^{at}] = L[y] = \frac{1}{s-a}$$

A partir da regra da transformada da derivada primeira, podemos obter a regra da transformada da derivada segunda.

### Proposição 3.8

Temos que

$$L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0)$$

e de modo mais geral

$$L[y^{(n)}] = s^nL[y] - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

**Prova:**

Temos que

$$\begin{aligned}
 L[y''] &= L[(y')'] \\
 &= sL[y'] - y'(0) \\
 &= s(sL[y] - y(0)) - y'(0) \\
 &= s^2L[y] - sy(0) - y'(0)
 \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
 L[y'''] &= L[(y'')'] \\
 &= sL[y''] - y''(0) \\
 &= s(s^2L[y] - sy(0) - y'(0)) - y''(0) \\
 &= s^3L[y] - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)
 \end{aligned}$$

e assim por diante. ■

Vamos considerar os seguintes exemplos.

**Exemplos**

- 1) Vamos obter a transformada de  $y(t) = \cos(t)$  usando que ele é a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando a transformada na EDO e usando a linearidade, temos que

$$L[y''] = -L[y]$$

Usando a transformada da derivada segunda e usando as con-

dições iniciais, segue-se que

$$s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) = s^2 L[y] - s = -L[y]$$

de modo que, isolando a transformada da solução, obtemos

$$L[\cos(t)] = L[y] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

**2)** Vamos obter a transformada de  $y(t) = \sin(t)$  usando que ele é a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando a transformada na EDO e usando a linearidade, temos que

$$L[y''] = -L[y]$$

Usando a transformada da derivada segunda e usando as condições iniciais, segue-se que

$$s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) = s^2 L[y] - 1 = -L[y]$$

de modo que, isolando a transformada da solução, obtemos

$$L[\sin(t)] = L[y] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

**3)** Vamos obter a transformada de  $y(t) = t^n$  usando que ela é a

solução do PVI

$$\begin{cases} y^{(n+1)} = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(0) = 0, \quad y^{(n)}(0) = n! \end{cases}$$

Aplicando a transformada na EDO e usando a linearidade, temos que

$$L[y^{(n+1)}] = 0$$

Usando a transformada da derivada  $n$ -ésima e usando as condições iniciais, segue-se que

$$\begin{aligned} L[y^{(n+1)}] &= s^{n+1}L[y] - s^n y(0) - s^{n-1}y'(0) - \dots - y^{(n)}(0) \\ &= s^{n+1}L[y] - n! \\ &= 0 \end{aligned}$$

de modo que, isolando a transformada da solução, obtemos

$$L[t^n] = L[y] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Podemos considerar a transformada de um dado PVI com coeficientes constantes. Vamos considerar um exemplo de um PVI homogêneo.

### Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$



e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L[y'' + 3y' + 2y] = L[0] = 0$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L[y''] + 3L[y'] + 2L[y] = 0$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} (s^2L[y] - sy(0) - y'(0)) + \\ + 3(sL[y] - y(0)) + \\ + 2L[y] = 0 \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2L[y] - (s - 2) + \\ + 3sL[y] - 3 + \\ + 2L[y] = 0 \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 + 3s + 2)L[y] = (s - 2) + 3 = s + 1$$

temos que

$$L[y] = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

Uma vez que

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$$

segue-se que

$$L[y] = \frac{1}{s + 2} = L[e^{-2t}]$$

Vamos ver mais adiante neste capítulo que isso de fato implica que

$$y(t) = e^{-2t}$$

## DESLOCAMENTO

O efeito, sobre a transformada, de multiplicarmos uma função  $y(t)$  pela função  $e^{at}$  é deslocarmos a variável  $s$  para a variável  $s - a$ .

### Proposição 3.9

Temos que

$$L[y(t)e^{at}](s) = L[y(t)](s - a)$$

### Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} L[y(t)e^{at}](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} y(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} y(t) dt \\ &= L[y(t)](s - a) \end{aligned}$$

■

### Exemplo

Uma vez que

$$L[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

pela regra do deslocamento, segue-se que

$$\begin{aligned} L[t^n e^{at}](s) &= L[t^n](s-a) \\ &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

Por exemplo

$$L[te^{-t}] = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Vamos considerar mais um exemplo de um PVI homogêneo.

### Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L[y'' + 2y' + y] = L[0] = 0$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L[y''] + 2L[y'] + L[y] = 0$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} (s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)) + \\ + 2(sL[y] - y(0)) + \\ + L[y] = 0 \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L[y] - 1 + \\ + 2sL[y] + \\ + L[y] = 0 \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 + 2s + 1)L[y] = 1$$

temos que

$$L[y] = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Uma vez que

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$$

segue-se que

$$L[y] = \frac{1}{(s + 1)^2} = L[te^{-t}]$$

Vamos ver mais adiante neste capítulo que isso de fato implica que

$$y(t) = te^{-t}$$

## MUDANÇA DE ESCALA

O efeito, sobre a transformada, de multiplicarmos a variável  $t$  por uma constante positiva  $b$  é dividirmos tanto a transformada quanto a variável  $s$  por  $b$ .

### Proposição 3.10

Temos que

$$L[y(bt)](s) = \frac{1}{b} L\left[y(t)\right]\left(\frac{s}{b}\right)$$

### Prova:

Temos que

$$L[y(bt)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} y(bt) dt$$

Fazendo a mudança de variáveis  $t = \frac{u}{b}$ , onde  $dt = \frac{du}{b}$ , segue-se que  $u = 0$ , quando  $t = 0$ , e que  $u \rightarrow \infty$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , de modo que

$$\begin{aligned} L[y(bt)](s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\frac{u}{b}} y(u) \frac{du}{b} \\ &= \frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{b}\right)u} y(u) du \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $u = t$ , onde  $du = dt$ , temos que

$$\begin{aligned} L[y(bt)](s) &= \frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{b}\right)t} y(t) dt \\ &= \frac{1}{b} L\left[y(t)\right]\left(\frac{s}{b}\right) \end{aligned}$$



### Exemplos

1) Uma vez que

$$L[\text{sen}(t)](s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

pela regra da mudança de escala, segue-se que

$$\begin{aligned} L[\operatorname{sen}(bt)](s) &= \frac{1}{b} L\left[\operatorname{sen}(t)\right]\left(\frac{s}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{\left(\frac{s}{b}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{b^2} \frac{b}{\frac{s^2}{b^2} + 1} \\ &= \frac{b}{s^2 + b^2} \end{aligned}$$

Utilizando a regra do deslocamento, temos que

$$\begin{aligned} L\left[e^{at} \operatorname{sen}(bt)\right](s) &= L[\operatorname{sen}(bt)](s - a) \\ &= \frac{b}{(s - a)^2 + b^2} \end{aligned}$$

Por exemplo

$$L\left[e^{-t} \operatorname{sen}(2t)\right] = \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}$$

2) Uma vez que

$$L[\cos(t)](s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

pela regra da mudança de escala, segue-se que

$$\begin{aligned} L[\cos(bt)](s) &= \frac{1}{b} L\left[\cos(t)\right]\left(\frac{s}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b} \frac{\frac{s}{b}}{\left(\frac{s}{b}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{b^2} \frac{s}{\frac{s^2}{b^2} + 1} \\ &= \frac{s}{s^2 + b^2} \end{aligned}$$

Utilizando a regra do deslocamento, temos que

$$\begin{aligned} L[e^{at} \cos(bt)](s) &= L[\cos(bt)](s-a) \\ &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \end{aligned}$$

Por exemplo

$$L[e^{-t} \cos(2t)] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$$

Vamos considerar mais um exemplo de um PVI homogêneo.

### Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L[y'' + 2y' + 5y] = L[0] = 0$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L[y''] + 2L[y'] + 5L[y] = 0$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} (s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)) + \\ + 2(sL[y] - y(0)) + \\ + 5L[y] = 0 \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L[y] - 2 + \\ + 2sL[y] + \\ + 5L[y] = 0 \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 + 2s + 5)L[y] = 2$$

temos que

$$L[y] = \frac{2}{s^2 + 2s + 5}$$

Uma vez que

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4$$

segue-se que

$$L[y] = \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} = L[e^{-t} \operatorname{sen}(2t)]$$

Vamos ver mais adiante neste capítulo que isso de fato implica que

$$y(t) = e^{-t} \operatorname{sen}(2t)$$

## DERIVADA DA TRANSFORMADA

Enquanto a transformada da derivada se relaciona com multiplicar  $L[y]$  pela variável  $s$ , a derivada da transformada se relaciona com multiplicar  $y$  pela variável  $-t$ . Primeiro vamos mostrar que a transformada  $L[y](s)$  é uma função contínua em relação à variável  $s$ .

### Proposição 3.11



Temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} L[y](s+h) = L[y](s)$$

### Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} L[y](s+h) - L[y](s) &= \int_0^{\infty} e^{-(s+h)t} y(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-(s+h)t} - e^{-st}) y(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} -x h e^{-(s+c)t} y(t) dt \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, o Teorema do Valor Médio aplicado à função  $e^{-st}$ , de modo que

$$\frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} = -t e^{-(s+c)t},$$

para algum  $c$  tal que  $|c| < |h| < 1$ . Usando que o módulo da integral é menor ou igual à integral do módulo, segue-se que

$$\begin{aligned} |L[y](s+h) - L[y](s)| &= |h| \left| \int_0^{\infty} e^{-(s+c)t} (-xy(t)) dt \right| \\ &\leq |h| \int_0^{\infty} e^{-(s+c)t} |-xy(t)| dt \\ &\leq |h| \int_0^{\infty} e^{-(s-1)t} |-xy(t)| dt \\ &= |h| L[|-xy|](s-1) \end{aligned}$$

onde utilizamos que  $e^{-(s+c)t} < e^{-(s-1)t}$ . Por sanduíche, segue-se que

$$\lim_{h \rightarrow 0} L[y](s+h) = L[y](s)$$

■

Agora vamos determinar a derivada de  $L[y](s)$  em relação à variável  $s$ .

### Proposição 3.12

Temos que

$$L[y]'(s) = L[-ty](s)$$

### Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} L[y]'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L[y](s+h) - L[y](s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} \right) y(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{\infty} -te^{-(s+c)t} y(t) dt \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, o Teorema do Valor Médio aplicado à função  $e^{-st}$ , onde  $c$  é tal que  $|c| < |h|$ . Segue-se então que

$$\begin{aligned} L[y]'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(s+c)t} (-ty(t)) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} L[-ty](s+c) \end{aligned}$$

$$= L[-ty](s)$$

onde utilizamos a continuidade da transformada, uma vez que  $c \rightarrow 0$ , quando  $h \rightarrow 0$ . ■

### Exemplos

1) Temos que

$$\begin{aligned} L[te^{at}] &= -L[-te^{at}] \\ &= -L[e^{at}]' \\ &= -\left(\frac{1}{s-a}\right)' \\ &= \frac{1}{(s-a)^2} \end{aligned}$$

2) Temos que

$$\begin{aligned} L[t \operatorname{sen}(bt)] &= -L[-t \operatorname{sen}(bt)] \\ &= -L[\operatorname{sen}(bt)]' \\ &= -\left(\frac{b}{s^2 + b^2}\right)' \\ &= -b\left((s^2 + b^2)^{-1}\right)' \\ &= b(s^2 + b^2)^{-2} 2s \\ &= \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2} \end{aligned}$$

## INJETIVIDADE DA TRANSFORMADA

Quando temos que a transformada da solução de um PVI é igual à transformada de uma função conhecida, precisamos saber se isso implica que a solução do PVI é igual a essa função conhecida. Primeiro precisamos do seguinte lema.

### Lema 3.13

Se

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

tem raio de convergência infinito, então

$$L[y] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n]$$

### Prova:

Usando a linearidade da transformada, temos que

$$L[y] = \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n] + L\left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n t^n\right]$$

de modo que

$$L[y] - \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n] = L\left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n t^n\right]$$

para todo  $k$ . Usando a definição de transformada, que o módulo da integral é menor ou igual à integral do módulo e que o módulo da

série é menor ou igual à série dos módulos, segue-se que

$$\begin{aligned} \left| L[y] - \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n] \right| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \sum_{n=k}^{\infty} c_n t^n \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \sum_{n=k}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt \end{aligned}$$

para todo  $k$ , onde usamos que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$  é absolutamente convergente, uma vez que seu raio de convergência é infinito. Agora, para todo  $u > 0$ , segue-se que

$$\begin{aligned} \left| L[y] - \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n] \right| &\leq \int_0^u e^{-st} \left( \sum_{n=k}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt \\ &\quad + \int_u^{\infty} e^{-st} \left( \sum_{n=k}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt \\ &\leq \left( \sum_{n=k}^{\infty} |c_n| u^n \right) \int_0^u e^{-st} dt \\ &\quad + \int_u^{\infty} e^{-st} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt \end{aligned}$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  e usando que

$$\sum_{n=k}^{\infty} |c_n| u^n \rightarrow 0$$

temos que

$$\left| L[y] - \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n] \right| \leq \int_u^{\infty} e^{-st} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt$$

Fazendo  $u \rightarrow \infty$  e usando o sanduíche, temos que

$$\left| L[y] - \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n] \right| = 0$$

de modo que

$$L[y] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n]$$

■

O resultado seguinte mostra que, se as transformadas de duas funções são as mesmas, então essas duas funções são de fato as mesmas.

### Proposição 3.14

$$L[w] = L[z] \implies w = z$$

### Prova:

Se

$$L[w] = L[z]$$

pela linearidade da transformada, temos que

$$L[w - z] = L[w] - L[z] = 0$$

Definindo

$$y = w - z$$

basta então mostrarmos que

$$y = 0$$

Vamos supor que

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Usando o lema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= L[y] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{s^{n+1}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n! x^{n+1}
 \end{aligned}$$

onde  $x = 1/s \in (0, R)$ , para algum  $R > 0$ . Segue-se então que  $c_n n! = 0$ , para todo  $n \geq 0$ , de modo que  $c_n = 0$ , para todo  $n \geq 0$ , mostrando que  $y = 0$ . ■

### 3.4 TRANSFORMADA INVERSA

Aplicando a transformada a um dado PVI, conseguimos obter a transformada da sua solução  $L[y(t)] = Y(s)$ . Entretanto, o que de fato desejamos obter é a solução  $y(t)$  do PVI. Isso é possível por meio da denominada *transformada inversa*, dada por

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) \quad \text{se} \quad Y(s) = L[y(t)]$$

que está bem definida, uma vez que  $y(t)$  é única pela injetividade da transformada. As transformadas das funções já consideradas até aqui,

denominadas *funções elementares*, são apresentadas na tabela abaixo.

$y(t)$	$L[y(t)]$
$t^n e^{rt}$	$\frac{n!}{(s-r)^{n+1}}$
$e^{at} \text{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{at} \text{cos}(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$

As transformadas das funções elementares são denominadas *frações parciais* e suas transformadas inversas são as respectivas funções elementares, o que é apresentado na tabela abaixo, obtida da tabela acima simplesmente trocando suas colunas.

$Y(s)$	$L^{-1}[Y(s)]$
$\frac{n!}{(s-r)^{n+1}}$	$t^n e^{rt}$
$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \text{sen}(bt)$
$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \text{cos}(bt)$

Em geral, não é tão fácil calcular a transformada inversa de uma dada função  $Y(s)$ .

## FUNÇÕES RACIONAIS

Nos PVI's considerados por nós até agora, a transformada da solução é, em geral, o que denominamos de *função racional em  $s$* , dada por

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$



onde  $P(s)$  e  $Q(s)$  são polinômios, tais que o grau de  $P(s)$  é menor do que o grau de  $Q(s)$ . Nesse caso, podemos escrever a transformada inversa de  $Y(s)$  como uma combinação linear de funções elementares.

### Proposição 3.15

Considere  $P(s)$  e  $Q(s)$  polinômios tais que o grau de  $P(s)$  é menor do que o grau de  $Q(s)$ . Suponha que  $Q(s)$  possui raízes reais  $r$  com multiplicidade  $m$  e raízes complexas conjugadas simples  $a \pm ib$ . Segue-se então que

$$L^{-1} \left[ \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \dots + A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt} + A_3 t^2 e^{rt} + \dots + A_m t^{m-1} e^{rt} + \dots \\ \dots + A e^{at} \sin(bt) + B e^{at} \cos(bt) + \dots$$

onde  $\dots, A_1, \dots, A_m, \dots, A, B, \dots$  são constantes reais.

### Prova:

Temos que

$$Q(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$$

e que

$$P(s) = b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0$$

onde  $a_n \neq 0$ . Considere agora o PVI homogêneo

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Observe que a equação característica dessa EDO é precisamente  $Q(r) = 0$ . Portanto, suas raízes características são precisamente as raízes do denominador  $Q(s)$ . Aplicando a transformada, temos que

$$a_n L[y^{(n)}] + \dots + a_1 L[y]' + a_0 L[y] = 0$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 & a_n (s^n L[y] - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y_1 - \cdots - s y_{n-2} - y_{n-1}) \\
 & + a_{n-1} (s^{n-1} L[y] - s^{n-2} y_0 - \cdots - s y_{n-3} - y_{n-2}) \\
 & \quad \vdots \\
 & + a_1 (s L[y] - y_0) \\
 & + a_0 L[y] = 0
 \end{aligned}$$

Isolando a transformada da solução, temos que

$$L[y] = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

onde

$$\begin{aligned}
 R(s) = & a_n y_0 s^{n-1} + (a_{n-1} y_0 + a_n y_1) s^{n-2} + \cdots \\
 & \cdots + (a_2 y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-3} + a_n y_{n-2}) s + \\
 & + (a_1 y_0 + \cdots + a_{n-2} y_{n-3} + a_{n-1} y_{n-2} + a_n y_{n-1})
 \end{aligned}$$

Afirmamos que é possível escolher as condições iniciais  $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ , de modo que  $R(s) = P(s)$ . De fato, para isso acontecer, as condições iniciais devem satisfazer o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
 a_n y_0 & = & b_{n-1} \\
 a_{n-1} y_0 + a_n y_1 & = & b_{n-2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_2 y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-3} + a_n y_{n-2} & = & b_1 \\
 a_1 y_0 + \cdots + a_{n-2} y_{n-3} + a_{n-1} y_{n-2} + a_n y_{n-1} & = & b_0
 \end{array} \right.$$

que sempre possui solução, pois está escalonado e  $a_n \neq 0$ . Neste caso, segue-se que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = L[y]$$

de modo que

$$L^{-1} \left[ \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = y(t)$$

onde  $y(t)$  é a solução do PVI.

O resultado segue do que sabemos sobre a solução geral da EDO homogênea de coeficientes constantes do PVI que, de acordo com a Seção 3.1, é determinada por suas raízes características que são precisamente as raízes de  $Q(s)$ . ■

A partir desse resultado, podemos aplicar o seguinte método, denominado de *Frações Parciais*, para determinar a transformada inversa de uma função racional  $Y(s)$ :

### Passos

**1) Raízes do denominador:** Determinar as raízes de  $Q(s)$ . Vamos considerar apenas o caso em que  $Q(s)$  possui raízes reais  $r$  com multiplicidade  $m$  e raízes complexas conjugadas simples  $a \pm ib$ . Devemos então escrever o denominador da seguinte forma:

$$Q(s) = \cdots (s - r)^m \cdots ((s - a)^2 + b^2) \cdots$$

**2) Combinação de funções elementares:** A partir das raízes obtidas no passo anterior, escrever a solução como combinação de funções elementares da seguinte forma:

$$y(t) = \cdots + A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt} + A_3 t^2 e^{rt} + \cdots + A_m t^{m-1} e^{rt} + \cdots \\ \cdots + A e^{at} \operatorname{sen}(bt) + B e^{at} \operatorname{cos}(bt) + \cdots$$

onde  $\dots, A_1, \dots, A_m, \dots, A, B, \dots$  são constantes a serem determinadas.

**3) Combinação de frações parciais:** Aplicar a transformada em ambos os lados, escrevendo  $Y(s)$  como uma frações parciais.

ais:

$$\frac{P(s)}{\dots(s-r)^m \dots ((s-a)^2 + b^2) \dots} = \dots + A_1 \frac{1}{s-r} + A_2 \frac{1}{(s-r)^2} + A_3 \frac{2}{(s-r)^3} + \dots + A_m \frac{(m-1)!}{(s-r)^m} + \dots + A \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} + B \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} + \dots$$

**4) Igualdade de polinômios:** Multiplicar pelo denominador ambos os lados da equação e obter uma igualdade de polinômios.

**5) Igualdade dos coeficientes:** Igualar os coeficientes dos polinômios da equação obtida no passo anterior, encontrando um sistema linear para as constantes  $\dots, A_1, \dots, A_m, \dots, A, B, \dots$

**6) Sistema linear:** Resolver o sistema linear obtido no passo anterior, determinando as constantes  $\dots, A_1, \dots, A_m, \dots, A, B, \dots$

**7) Solução do PVI:** Substituir os valores obtidos no passo anterior na igualdade do segundo passo, determinando a solução do PVI.

Vamos aplicar os passos acima para obter a solução de alguns PVIs.

### Exemplos

1) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = e^{-3t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L[y'' + 6y' + 9y] = L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L[y''] + 6L[y'] + 9L[y] = \frac{1}{s+3}$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} (s^2L[y] - sy(0) - y'(0)) + \\ + 6(sL[y] - y(0)) + \\ + 9L[y] = \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2L[y] - (s+2) + \\ + 6sL[y] - 6 + \\ + 9L[y] = \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 + 6s + 9)L[y] = s + 8 + \frac{1}{s+3} = \frac{(s+8)(s+3) + 1}{s+3}$$

temos que

$$L[y] = \frac{(s+8)(s+3)+1}{(s+3)(s^2+6s+9)} = \frac{s^2+11s+25}{(s+3)(s^2+6s+9)}$$

**Raízes do denominador:** Temos que  $r = -3$  é raiz simples de  $s+3$  e também é raiz dupla de  $s^2+6s+9$ . Logo  $r = -3$  é raiz do denominador com multiplicidade  $m = 3$ , de modo que o denominador pode ser escrito como

$$(s+3)(s^2+6s+9) = (s+3)^3$$

**Combinação de funções elementares:** Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = Ae^{-3t} + bte^{-3t} + Ct^2e^{-3t}$$

onde  $A, B, C$  são constantes a serem determinadas.

**Combinação de frações parciais:** Aplicando a transformada em ambos os lados, temos que

$$\frac{s^2+11s+25}{(s+3)^3} = A\frac{1}{s+3} + B\frac{1}{(s+3)^2} + C\frac{2}{(s+3)^3}$$

**Igualdade de polinômios:** Multiplicando a equação por  $(s+3)^3$ , temos que

$$\begin{aligned} s^2+11s+25 &= A(s+3)^2 + B(s+3) + 2C \\ &= A(s^2+6s+9) + B(s+3) + 2C \\ &= As^2 + (6A+B)s + 9A+3B+2C \end{aligned}$$

**Igualdade dos coeficientes:** Igualando os coeficientes dos polinômios, segue-se que

$$\begin{cases} A = 1 \\ 6A+B = 11 \\ 9A+3B+2C = 25 \end{cases}$$

**Sistema linear:** Resolvendo esse sistema, temos que

$$A = 1, \quad B = 5, \quad C = \frac{1}{2}$$

**Solução do PVI:** Segue-se que

$$y(t) = e^{-3t} + 5te^{-3t} + \frac{1}{2}t^2e^{-3t}$$

é a solução do PVI.

2) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L[y'' - 4y' + 4y] = L[e^t] = \frac{1}{s-1}$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L[y''] - 4L[y'] + 4L[y] = \frac{1}{s-1}$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} (s^2L[y] - sy(0) - y'(0)) + \\ -4(sL[y] - y(0)) + \\ +4L[y] = \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L[y] + \\ -4sL[y] + \\ +4L[y] &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 - 4s + 4)L[y] = \frac{1}{s-1}$$

temos que

$$L[y] = \frac{1}{(s-1)(s^2 - 4s + 4)}$$

**Raízes do denominador:** Temos que  $r = 1$  é raiz simples de  $s - 1$ , e  $r = 2$  é raiz dupla de  $s^2 - 4s + 4$ , de modo que o denominador pode ser escrito como

$$(s-1)(s^2 - 4s + 4) = (s-1)(s-2)^2$$

**Combinação de funções elementares:** Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = Ae^t + Be^{2t} + Cte^{2t}$$

onde  $A, B, C$  são constantes a serem determinadas.

**Combinação de frações parciais:** Aplicando a transformada em ambos os lados, temos que

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)^2} = A\frac{1}{s-1} + B\frac{1}{s-2} + C\frac{1}{(s-2)^2}$$

**Igualdade de polinômios:** Multiplicando a equação por  $(s-1)(s-2)^2$ , temos que

$$\begin{aligned} 1 &= A(s-2)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-1) \\ &= A(s-4s+4) + B(s^2-3s+2) + C(s-1) \end{aligned}$$



$$= (A + B)s^2 + (-4A - 3B + C)s + 4A + 2B - C$$

**Igualdade dos coeficientes:** Igualando os coeficientes dos polinômios, segue-se que

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A - 3B + C = 0 \\ 4A + 2B - C = 1 \end{cases}$$

**Sistema linear:** Resolvendo esse sistema, temos que

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 1$$

**Solução do PVI:** Segue-se que

$$y(t) = e^t - e^{2t} + te^{2t}$$

é a solução do PVI.

3) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L[y'' + 4y' + 13y] = L[2] = \frac{2}{s}$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L[y''] + 4L[y'] + 13L[y] = \frac{2}{s}$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} (s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)) + \\ + 4(sL[y] - y(0)) + \\ + 13L[y] = \frac{2}{s} \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L[y] + \\ + 4sL[y] + \\ + 13L[y] = \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 + 4s + 13)L[y] = \frac{2}{s}$$

temos que

$$L[y] = \frac{2}{s(s^2 + 4s + 13)}$$

**Raízes do denominador:** Temos que  $r = 0$  é raiz simples de  $s$ , e  $a \pm bi = -2 \pm 3i$  são raízes complexas conjugadas simples de  $s^2 + 4s + 13$ , de modo que o denominador pode ser escrito como

$$s(s^2 + 4s + 13) = s((s + 2)^2 + 3^2)$$

**Combinação de funções elementares:** Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = A + Be^{-2t} \operatorname{sen}(3t) + Ce^{-2t} \operatorname{cos}(3t)$$

onde  $A, B, C$  são constantes a serem determinadas.

**Combinação de frações parciais:** Aplicando a transformada em ambos os lados, temos que

$$\frac{2}{s((s + 2)^2 + 3^2)} = A \frac{1}{s} + B \frac{3}{(s + 2)^2 + 3^2} + C \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 3^2}$$

**Igualdade de polinômios:** Multiplicando a equação por  $s((s+2)^2 + 3^2)$ , temos que

$$\begin{aligned} 2 &= A((s+2)^2 + 3^2) + 3Bs + C(s+2)s \\ &= A(s^2 + 4s + 13) + 3Bs + C(s^2 + 2s) \\ &= (A+C)s^2 + (4A+3B+2C)s + 13A \end{aligned}$$

**Igualdade dos coeficientes:** Igualando os coeficientes dos polinômios, segue-se que

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ 4A+3B+2C = 0 \\ 13A = 2 \end{cases}$$

**Sistema linear:** Resolvendo esse sistema, temos que

$$A = \frac{2}{13}, \quad B = -\frac{4}{39}, \quad C = -\frac{2}{13}$$

**Solução do PVI:** Segue-se que

$$y(t) = \frac{2}{13} - \frac{4}{39}e^{-2t} \operatorname{sen}(3t) - \frac{2}{13}e^{-2t} \operatorname{cos}(3t)$$

é a solução do PVI.

4) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \operatorname{cos}(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L[y'' - 2y' + 2y] = L[\operatorname{cos}(t)] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L[y''] - 2L[y'] + 2L[y] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} (s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)) + \\ -2(sL[y] - y(0)) + \\ +2L[y] = \frac{s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L[y] - s + \\ -2sL[y] + 2 \\ +2L[y] = \frac{s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 - 2s + 2)L[y] = s - 2 + \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{(s-2)(s^2 + 1) + s}{s^2 + 1}$$

temos que

$$L[y] = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{(s^2 + 1)(s^2 - 2s + 2)}$$

**Raízes do denominador:** Temos que  $a \pm b = 0 \pm i$  são raízes complexas conjugadas simples de  $s^2 + 1$  e que  $a \pm b = 1 \pm i$  são raízes complexas conjugadas simples de  $s^2 - 2s + 2$ , de modo que o denominador pode ser escrito como

$$(s^2 + 1)(s^2 - 2s + 2) = (s^2 + 1)((s - 1)^2 + 1)$$

**Combinação de funções elementares:** Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = A \operatorname{sen}(t) + B \operatorname{cos}(t) + Ce^t \operatorname{sen}(t) + De^t \operatorname{cos}(t)$$

onde  $A, B, C, D$  são constantes a serem determinadas.

**Combinação de frações parciais:** Aplicando a transformada em ambos os lados, temos que

$$\frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{(s^2 + 1)((s - 1)^2 + 1)} = A \frac{1}{s^2 + 1} + B \frac{s}{s^2 + 1} + C \frac{1}{(s - 1)^2 + 1} + D \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 1}$$

**Igualdade de polinômios:** Multiplicando a equação por  $(s^2 + 1)((s - 1)^2 + 1)$ , temos que

$$\begin{aligned} s^3 - 2s^2 + 2s - 2 &= A((s - 1)^2 + 1) + Bs((s - 1)^2 + 1) + C(s^2 + 1) + D(s - 1)(s^2 + 1) \\ &= A(s^2 - 2s + 2) + B(s^3 - 2s^2 + 2s) + C(s^2 + 1) + D(s^3 - s^2 + s - 1) \\ &= (B + D)s^3 + (A - 2B + C - D)s^2 + (-2A + 2B + D)s + 2A + C - D \end{aligned}$$

**Igualdade dos coeficientes:** Igualando os coeficientes dos polinômios, segue-se que

$$\begin{cases} B + D = 1 \\ A - 2B + C - D = -2 \\ -2A + 2B + D = 2 \\ 2A + C - D = -2 \end{cases}$$

**Sistema linear:** Resolvendo esse sistema, temos que

$$A = -\frac{2}{5}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = -\frac{2}{5}, \quad D = \frac{4}{5}$$

**Solução do PVI:** Segue-se que

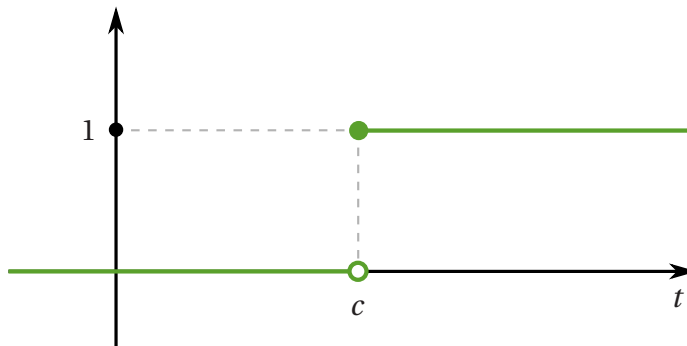
$$y(t) = -\frac{2}{5} \operatorname{sen}(t) + \frac{1}{5} \cos(t) - \frac{2}{5} e^t \operatorname{sen}(t) + \frac{4}{5} e^t \cos(t)$$

é a solução do PVI.

### 3.5 FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

Até agora, utilizamos a transformada de Laplace para obter a solução de PVI onde aparecem apenas funções dadas por séries de potências. Uma vantagem desse método é que ele também pode ser aplicado para obter a solução de PVI onde aparecem funções *definidas por partes*. Sem a transformada, teríamos que dividir um PVI desse tipo em vários outros problemas e solucioná-los individualmente. Porém, com ela, podemos lidar com eles de uma única vez.

A função definida por partes mais simples é a *função degrau em c*



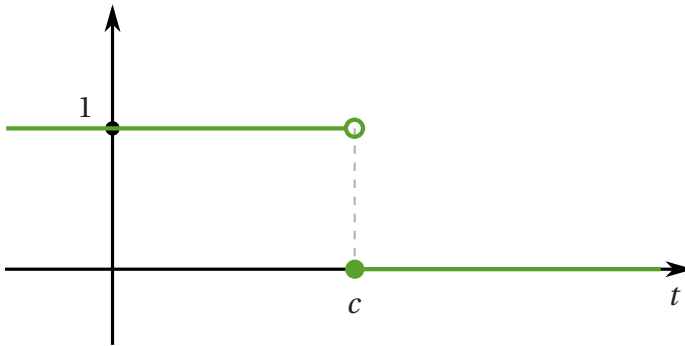
Definida por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

O gráfico de  $u_c$  justifica plenamente o seu nome. A análise do gráfico mostra que a função representa um salto de zero até um no ponto  $t = c$ .

Isso pode ser pensado como um interruptor que estava desligado e, no instante  $c$ , foi ligado alcançando a voltagem de uma unidade.

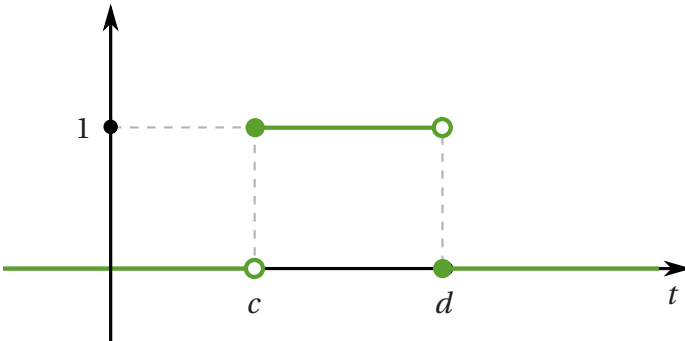
Podemos considerar ainda um interruptor que estava ligado e, no instante  $c$ , é desligado.



Podemos escrever essa função usando a função degrau da seguinte maneira

$$1 - u_c(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < c \\ 0 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

Podemos considerar também um interruptor que é ligado no instante  $t = c$  e é desligado no instante  $t = d$ .







**Exemplo**

Num circuito RLC, uma bateria de 12 volts é ligada no instante  $t = 5$  e desligada no instante  $t = 7$ . A carga  $q(t)$  no capacitor satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} q'' + 4q' + 3q = 12(u_5(t) - u_7(t)) \\ q(0) = 2 \\ q'(0) = -2 \end{cases}$$

Pela linearidade da transformada, basta agora determinarmos a transformada de funções da forma  $u_c(t)y(t)$ .

**Proposição 3.17**

Temos que

$$L[u_c(t)y(t)] = e^{-cs}L[y(t+c)]$$

**Prova:**

Pela definição

$$L[u_c(t)y(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) y(t) dt \quad (3.1)$$

$$= \int_c^{\infty} e^{-st} y(t) dt \quad (3.2)$$

Na passagem de (3.1) para (3.2), usamos apenas a definição de função degrau. Note que, com exceção de começar em  $c$  ao invés de zero, a expressão acima se parece com uma Transformada de Laplace. Corrigimos este problema usando a substituição  $t = t - c$  e temos

$$\begin{aligned}
 L[u_c(t)y(t)] &= \int_c^\infty e^{-st} y(t) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-s(t+c)} y(t+c) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-sc} e^{-st} y(t+c) dt \\
 &= e^{-sc} \int_0^\infty e^{-st} y(t+c) dt \\
 &= e^{-cs} L[y(t+c)].
 \end{aligned}$$



Em particular, obtemos a transformada da função degrau.

### Exemplo

Temos que  $u_c(t) = u_c(t) \cdot 1$ , logo

$$L[u_c(t)] = e^{-cs} L[1] = e^{-cs} \frac{1}{s}$$

### Exemplo

Num circuito RLC, uma bateria de 12 volts é ligada no instante  $t = 5$  e desligada no instante  $t = 7$ . A carga  $q(t)$  no capacitor

satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} q'' + 4q' + 3q = 12(u_5(t) - u_7(t)) \\ q(0) = 2 \\ q'(0) = -2 \end{cases}$$

Aplicando a transformada em ambos os lados da EDO e usando a linearidade

$$L[q''] + 4L[q'] + 3L[q] = 12L[u_5(t)] - 12L[u_7(t)]$$

usando as regras da transformada e as condições iniciais

$$\begin{aligned} (s^2L[q] - 2s + 2) + \\ + 4(sL[q] - 2) + \\ + 3L[q] = e^{-5s}\frac{12}{s} - e^{-7s}\frac{12}{s} \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$(s^2 + 4s + 3)L[q] = 2s + 6 + e^{-5s}\frac{12}{s} - e^{-7s}\frac{12}{s}$$

temos que

$$L[q] = \frac{2s + 6}{s^2 + 4s + 3} + e^{-5s}\frac{12}{s(s^2 + 4s + 3)} - e^{-7s}\frac{12}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

Agora precisamos calcular a transformada de Laplace inversa de funções como a do exemplo anterior. Primeiro observamos que, se  $y(t)$  é uma função elementar, então  $y(t+c)$  pode ser escrita como uma combinação de funções elementares.

### Exemplos

1) Se  $y(t) = t^n e^{rt}$ , então

$$\begin{aligned} y(t+c) &= (t+c)^n e^{r(t+c)} \\ &= (t+c)^n e^{rx+rc} \\ &= e^{rc} e^{rt} (t+c)^n \end{aligned}$$

Como  $e^{rc}$  é uma constante e como  $(t+c)^n$  é um polinômio, segue-se que  $y(t+c)$  pode ser escrita como uma combinação de funções elementares.

2) Se  $y(t) = e^{at} \operatorname{sen}(bt)$ , então

$$\begin{aligned} y(t+c) &= e^{a(t+c)} \operatorname{sen}(b(t+c)) \\ &= e^{at+ac} \operatorname{sen}(bt+bc) \\ &= e^{at} e^{ac} (\operatorname{sen}(bt) \cos(bc) + \operatorname{sen}(bc) \cos(bt)) \\ &= Ae^{at} \operatorname{sen}(bt) + Be^{at} \cos(bt) \end{aligned}$$

onde  $A = e^{ac} \cos(bc)$  e  $B = e^{ac} \operatorname{sen}(bc)$  são constantes.

3) Se  $y(t) = e^{at} \operatorname{cos}(bt)$ , então

$$\begin{aligned} y(t+c) &= e^{a(t+c)} \operatorname{cos}(b(t+c)) \\ &= e^{at+ac} \operatorname{cos}(bt+bc) \\ &= e^{at} e^{ac} (\operatorname{cos}(bt) \operatorname{cos}(bc) - \operatorname{sen}(bc) \operatorname{sen}(bt)) \\ &= Ae^{at} \operatorname{cos}(bt) + Be^{at} \operatorname{sen}(bt) \end{aligned}$$

onde  $A = e^{ac} \operatorname{cos}(bc)$  e  $B = -e^{ac} \operatorname{sen}(bc)$  são constantes.

Uma consequência imediata da proposição anterior é o seguinte resultado.

**Corolário 3.18**

Temos que

$$L^{-1} [e^{-cs} L[y(t)]] = u_c(t)y(t-c)$$

**Prova:**

O resultado segue da proposição anterior, uma vez que

$$L[u_c(t)y(t-c)] = e^{-cs} L[y(t-c+c)] = e^{-cs} L[y(t)]$$



Apresentamos a seguir o procedimento para se obter a solução de PVIs em que aparece uma função definida por partes, onde cada parte é dada por uma função elementar.

**Passos**

A) Utilize a proposição acima e proceda como usualmente para obter a transformada da solução  $L[y]$ , que sempre poderá ser escrita como

$$L[y] = Y_0(s) + e^{-c_1 s} Y_1(s) + \dots + e^{-c_n s} Y_n(s)$$

onde  $Y_0(s), Y_1(s), \dots, Y_n(s)$  são funções racionais em  $s$ .

B) Aplique o método das frações parciais, apresentado na seção anterior, para obter as transformadas inversas de  $Y_0(s), Y_1(s), \dots, Y_n(s)$ , denotadas por  $y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t)$  de

modo que

$$L[y] = L[y_0(t)] + e^{-c_1 s} L[y_1(t)] + \cdots + e^{-c_n s} L[y_n(t)]$$

C) Da linearidade da transformada inversa e do corolário acima, segue-se que

$$y(t) = y_0(t) + u_{c_1}(t)y_1(t - c_1) + \cdots + u_{c_n}(t)y_n(t - c_n)$$

Vamos aplicar esse método ao exemplo visto anteriormente.

### Exemplo

Num circuito RLC, uma bateria de 12 volts é ligada no instante  $t = 5$  e desligada no instante  $t = 7$ . A carga  $q(t)$  no capacitor satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} q'' + 4q' + 3q = 12(u_5(t) - u_7(t)) \\ q(0) = 2 \\ q'(0) = -2 \end{cases}$$

Já vimos que

$$\begin{aligned} L[q] &= \frac{2s+6}{s^2+4s+3} + e^{-5s} \frac{12}{s(s^2+4s+3)} - e^{-7s} \frac{12}{s(s^2+4s+3)} \\ &= Q_0(s) + e^{-5s} Q_1(s) - e^{-7s} Q_1(s) \end{aligned}$$

onde

$$Q_0(s) = \frac{2s+6}{s^2+4s+3} \quad Q_1(s) = \frac{12}{s(s^2+4s+3)}$$

Aplicando o método das frações parciais apresentado na seção anterior, obtemos

$$Q_0(s) = \frac{2}{s+1} \quad Q_1(s) = \frac{4}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{2}{s+3}$$

de onde obtemos as respectivas transformadas inversas

$$q_0(t) = 2e^{-t} \quad q_1(t) = 4 - 6e^{-t} + 2e^{-3t}$$

De  $L[q] = Q_0(s) + e^{-5s}Q_1(s) - e^{-7s}Q_1(s)$ , segue-se então que

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0(t) + u_5(t)q_1(t-5) - u_7(t)q_1(t-7) \\ &= 2e^{-t} + \\ &\quad + u_5(t) (4 - 6e^{-(t-5)} + 2e^{-3(t-5)}) \\ &\quad - u_7(t) (4 - 6e^{-(t-7)} + 2e^{-3(t-7)}) \end{aligned}$$

é a solução do PVI.

Observe que, no exemplo anterior, a solução do PVI pode ser escrita como

$$q(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{se } t < 5 \\ 2e^{-t} + 4 - 6e^{-(t-5)} + 2e^{-3(t-5)} & \text{se } 5 \leq t < 7 \\ 2e^{-t} - 6e^{-(t-5)} + 2e^{-3(t-5)} + 6e^{-(t-7)} - 2e^{-3(t-7)} & \text{se } t \geq 7 \end{cases}$$

o que ilustra a praticidade da função degrau para lidar com funções definidas por partes.

### 3.6 SISTEMA DE EDOS

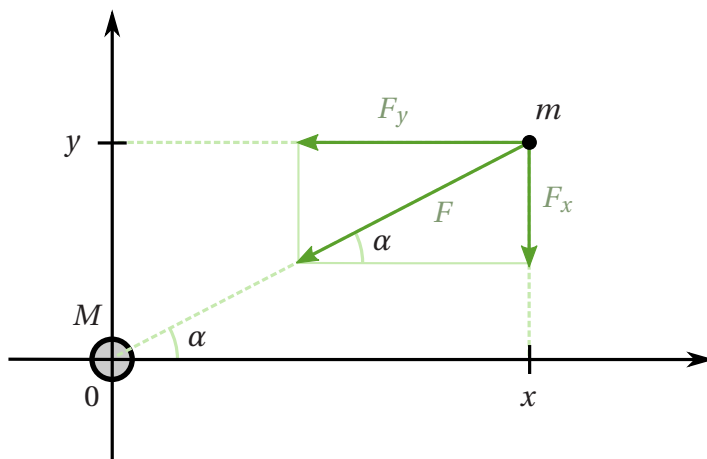
Muitas vezes uma quantidade desconhecida  $x(t)$  varia de acordo com outra quantidade desconhecida  $y(t)$  e vice-versa, por exemplo: as coordenadas de um planeta orbitando ao redor do sol e o decaimento da

massa de uma substância radioativa em diversas substâncias nuclearmente instáveis até chegar a uma substância nuclearmente estável.

Nesses casos as quantidades desconhecidas são modeladas por duas ou mais funções incógnitas relacionadas por duas ou mais equações que envolvem suas derivadas: é isso que se chama de *sistema de EDOs*.

### Exemplos

- 1) Um planeta de massa  $m$  se movimenta sob a força central de uma estrela de massa  $M$  num plano coordenado em que a estrela fica na origem e o planeta na posição  $(x, y)$ .



Se  $d$  é a distância entre a estrela e o planeta, pela Lei da Gravitação Universal, a força  $F$  que a estrela exerce sobre o planeta tem módulo

$$GMm\frac{1}{d^2}$$

e, portanto, componentes  $x$  e  $y$  dados por

$$F_x = -GMm\frac{1}{d^2} \cos(\alpha) \quad F_y = -GMm\frac{1}{d^2} \sin(\alpha)$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal. A Segunda Lei



de Newton nesse caso é

$$\begin{cases} mx'' = F_x \\ my'' = F_y \end{cases}$$

Usando que

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{d} \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{y}{d} \quad d = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

a Segunda Lei de Newton fornece o seguinte sistema não linear de 2ª ordem e duas incógnitas

$$\begin{cases} mx'' = -GMm \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ my'' = -GMm \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Observe que esse sistema é não linear e está acoplado: para conhecer a posição  $x(t)$ , devemos primeiro conhecer  $y(t)$  e vice-versa, não há como isolar uma ou outra função incógnita.

Com um pouco de conhecimento de Mecânica Clássica, esse sistema pode ser resolvido explicitamente e dele se deduzir matematicamente as Leis de Kepler. Para exemplificar isso, vamos deduzir uma das Leis de Kepler para órbitas circulares. Uma órbita circular de raio  $R$  satisfaz

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Assim, para órbitas circulares o sistema de EDOs, temos

$$\begin{cases} x'' = -\frac{GM}{R^3}x \\ y'' = -\frac{GM}{R^3}y \end{cases}$$

ou seja, duas EDOs desacopladas do tipo massa-mola. Um par de soluções que satisfaz  $x^2 + y^2 = R^2$  é dada pela trajetória circular

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos(\omega t) \\y(t) &= R \operatorname{sen}(\omega t)\end{aligned}$$

com velocidade angular constante

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

O período da trajetória é  $T = 2\pi/\omega$ . O quadrado desse período é

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

e, portanto, proporcional ao cubo da distância entre o planeta e a estrela. Isso mostra como a terceira Lei de Kepler para órbitas circulares é consequência do sistema de EDOs da gravitação de dois corpos.

O problema da gravitação de dois corpos é clássico e suas soluções são bem conhecidas desde Kepler e bem fundamentadas desde Newton. Introduza a terceira dimensão no espaço e um terceiro corpo, uma lua orbitando ao redor do planeta, ou dois planetas orbitando ao redor da estrela, ou ainda um planeta orbitando uma estrela binária (ou seja, um par de estrelas), e o problema já fica muito mais difícil. É um sistema de 2ª ordem e nove incógnitas (três para a posição de cada corpo celeste) chamado de *problema dos três corpos*. Esse problema, relacionado com a questão ainda não respondida da estabilidade do Sistema Solar, é tema ativo de pesquisa até hoje. Um dos desenvolvimentos mais desconcertantes desse problema ocorreu em 1900, quando o matemático francês Henri Poincaré chegou à conclusão que esse sistema em geral não tem solução explícita, não tem órbitas periódicas e as trajetórias desses três corpos podem ser extremamente complicadas! Foi

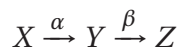
a primeira aparição do fenômeno do caos e imprevisibilidade em sistemas de EDOs.

2) O decaimento de uma substância radioativa numa substância nuclearmente estável costuma se dar não de uma vez, mas por meio de uma cadeia de isótopos: os átomos da substância radioativa decaem num primeiro isótopo instável, que, por sua vez, decaem num segundo isótopo instável e assim por diante, até decaírem num isótopo estável. Por exemplo, a cadeia de decaimento natural do urânio tem 20 isótopos, como, por exemplo



cujo último membro é um isótopo estável do chumbo. A meia-vida dos diversos isótopos dessa cadeia varia de 4,5 bilhões de anos para o U-238, de 24,6 dias para o Th-234 a uma fração de segundos para outros isótopos. Desse modo, uma amostra da substância radioativa costuma ter diversas proporções de cada isótopo e é possível, a partir dessas proporções, descobrir quando a substância começou a decair. Esse método de datação é especialmente adequado para substâncias inorgânicas como rochas, portanto, para datações geológicas.

Como modelar uma cadeia de decaimento? Suponha uma cadeia de decaimento com três isótopos



onde  $Z$  é o isótopo estável e  $\alpha$  e  $\beta$  são as constantes de decaimento dos isótopos instáveis  $X$  e  $Y$ , relacionadas com suas respectivas meias-vidas. Denotando por  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  as quantidades de cada isótopo, o decaimento de  $X$  é dado por

$$X' = -\alpha X$$

pois é proporcional à quantidade presente de  $X$ . O decaimento de  $Y$ , por sua vez, é dado pela taxa líquida

$$Y' = \alpha X - \beta Y$$

já que ele ganha massa do decaimento de  $X$  e perde massa do seu próprio decaimento para  $Z$ . Por último, o decaimento de  $Z$  é dado por

$$Z' = \beta Y$$

uma vez que ele ganha massa do decaimento de  $Y$  e, por ser estável, não decai.

Obtemos assim o seguinte sistema de 1ª ordem e três incógnitas:

$$\begin{cases} X' = -\alpha X \\ Y' = \alpha X - \beta Y \\ Z' = \beta Y \end{cases}$$

Observe que  $Y$  está acoplado com  $X$  e  $Y$ , e  $Z$  está acoplado com  $Y$ . Porém, o sistema está escalonado: na primeira equação,  $X$  não está acoplado com nenhuma outra incógnita, assim podemos resolver a primeira equação para  $X$  (linear homogênea). Conhecendo  $X$ , podemos resolver a segunda equação para  $Y$  (linear não homogênea). Resolvendo a terceira equação, obtemos  $Z$  integrando  $\beta Y$ .

A maior dificuldade para se resolver um sistema de EDOs aparece quando suas funções incógnitas e suas derivadas estão acopladas.

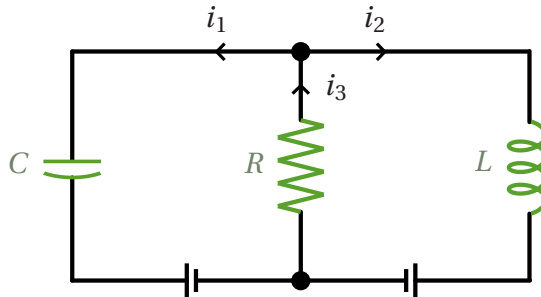
## SISTEMAS LINEARES DE EDOs

Dizemos que o sistema é linear se todas suas equações são lineares: nesse caso veremos que temos boas técnicas de solução.

### Exemplos

1) O sistema de EDOs da gravitação de dois corpos no plano  $xy$  é de 2ª ordem para  $x$  e de 2ª ordem para  $y$ . O sistema não é linear, pois nem a primeira nem a segunda equação é linear. O sistema de EDOs do decaimento de isótopos é linear de 1ª ordem.

2) Já estudamos circuitos RLC simples. Vamos considerar agora dois circuitos acoplados. Considere as correntes num circuito RC acoplado a um circuito LR com a resistência em comum, ambos submetidos à força eletromotriz nula.



A primeira Lei de Kirchhoff afirma que, em cada nó do circuito, a soma das correntes que entram é igual à soma das correntes que saem, de modo que

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

A segunda Lei de Kirchhoff afirma que, em cada circuito, a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz, de modo que

$$\begin{cases} Ri_3 + Cq_1 = 0 \\ Li_2' + Ri_3 = 0 \end{cases}$$

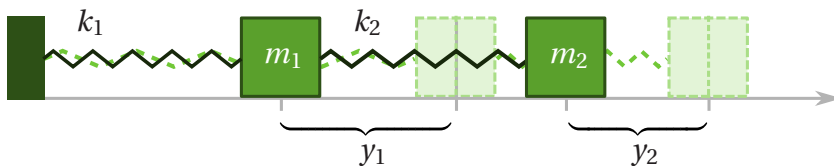
Derivando a primeira equação desse sistema e utilizando que

$q_1' = i_1$  e que  $i_3' = i_1' + i_2'$ , temos que as correntes satisfazem

$$\begin{cases} Ri_1' + Ri_2' + Ci_1 = 0 \\ Li_2' + Ri_1 + Ri_2 = 0 \end{cases}$$

que é um sistema de EDOs lineares de 1ª ordem para  $i_1$  e  $i_2$ .

3) Considere dois sistemas massa-mola acoplados. Um deles está preso a uma parede, ambos na ausência de forças externas.



Pela Lei de Hooke, a força de uma mola é proporcional à sua distorção. Observe que a distorção da primeira mola é  $y_1$ , uma vez que essa mola está fixada na parede, enquanto a distorção da segunda mola é  $y_2 - y_1$ , uma vez que essa mola está fixada no primeiro corpo. A Segunda Lei de Newton, aplicada ao primeiro corpo, nos dá

$$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1)$$

uma vez que a força da primeira mola no primeiro corpo é na direção oposta à distorção da mola e a força da segunda mola no primeiro corpo é na mesma direção da distorção da mola. A Segunda Lei de Newton aplicada ao segundo corpo nos dá

$$m_2 y_2'' = -k_2 (y_2 - y_1)$$

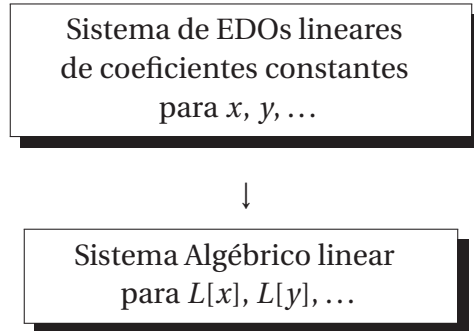
uma vez que apenas a segunda mola atua nele, com força na direção oposta à distorção da mola. Segue-se que as posições

satisfazem

$$\begin{cases} m_1 y_1'' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 \\ m_2 y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2 \end{cases}$$

que é um sistema de EDOs lineares de 2ª ordem para  $y_1$  e  $y_2$ .

Quando o sistema de EDO é linear e tem coeficientes constantes, podemos eliminar as derivadas por meio da Transformada de Laplace, que transforma o Sistema de EDOs lineares num Sistema Algébrico linear



As transformadas  $L[x], L[y], \dots$  ainda estão acopladas no Sistema Algébrico linear, porém, como não há mais derivadas, elas são facilmente desacopladas resolvendo o sistema linear algebricamente. Uma vez obtidas as transformadas  $L[x], L[y], \dots$ , podemos fazer a transformada inversa para obter as funções incógnitas  $x, y, \dots$

### Exemplo

Já vimos que, num circuito RC submetido a uma força eletromotriz nula, a resistência consome toda a carga do capacitor, portanto, a corrente do circuito tende a zero exponencialmente. O mesmo acontece com a corrente de um circuito RL submetido à força eletromotriz nula.

Veremos agora que, acoplado esses circuitos, essas correntes também tendem a zero, mas podem oscilar. A título de ilustração, vamos considerar o circuito acoplado do exemplo anterior com resistência  $R = 1$ , indutância  $L = 1$ , inverso da capacitância  $C = 2$  e correntes iniciais  $i_1(0) = 1$  e  $i_2(0) = 1$ , iguais em ambos circuitos, obtendo o seguinte PVI

$$\begin{cases} i_1' + i_2' + 2i_1 = 0 \\ i_2' + i_1 + i_2 = 0 \\ i_1(0) = 1 \\ i_2(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando a transformada no PVI, temos que

$$\begin{cases} L[i_1'] + L[i_2'] + 2L[i_1] = 0 \\ L[i_2'] + L[i_1] + L[i_2] = 0 \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{cases} sL[i_1] - i_1(0) + sL[i_2] - i_2(0) + 2L[i_1] = 0 \\ sL[i_2] - i_2(0) + L[i_1] + L[i_2] = 0 \end{cases}$$

Usando as condições iniciais  $i_1(0) = 1$  e  $i_2(0) = 1$ , temos que

$$\begin{cases} (s+2)L[i_1] + sL[i_2] = 2 \\ L[i_1] + (s+1)L[i_2] = 1 \end{cases}$$

que é um sistema algébrico linear para  $L[i_1]$  e  $L[i_2]$ . Resolvendo esse sistema pela regra de Cramer, temos que

$$L[i_1] = \frac{\begin{vmatrix} 2 & s \\ 1 & (s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+2) & s \\ 1 & (s+1) \end{vmatrix}} = \frac{2s+2-s}{(s+2)(s+1)-s} = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$



$$L[i_2] = \frac{\begin{vmatrix} (s+2) & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+2) & s \\ 1 & (s+1) \end{vmatrix}} = \frac{(s+2) - 2}{(s+2)(s+1) - s} = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

Assim  $L[i_1]$  e  $L[i_2]$  têm o mesmo denominador  $s^2 + 2s + 2$ , cujas raízes são dadas por

$$\Delta = 4 - 8 = -4, \quad \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Segue-se que o denominador se escreve como

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1$$

de modo que

$$L[i_1] = \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 1}$$

$$L[i_2] = \frac{s}{(s + 1)^2 + 1}$$

Determinando  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  como nas seções anteriores, é fácil obter

$$i_1(t) = e^{-t} \cos(t) + e^{-t} \sin(t)$$

$$i_2(t) = e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t)$$

$$i_3(t) = 2e^{-t} \cos(t)$$

Isso mostra que dois circuitos que não oscilam sozinhos podem oscilar quando são acoplados, mesmo sem nenhuma força eletromotriz externa.

Podemos utilizar o mesmo procedimento para resolver um PVI para um sistema de EDOs lineares de 2ª ordem ou ordem maior, homogêneo ou não, desde que o sistema tenha coeficientes constantes. A transfor-

mada de Laplace é, portanto, o procedimento mais prático para resolver explicitamente sistemas de EDOs lineares de coeficientes constantes.

## SISTEMAS DE 1ª ORDEM

Um estudo sistemático de sistemas de EDOs pode ser feito estudando os sistemas de 1ª ordem uma vez que todo sistema de EDOs pode ser transformado num sistema de 1ª ordem. Isso é bem ilustrado pela Segunda Lei de Newton, que é de 2ª ordem na posição mas de 1ª ordem na velocidade. Por exemplo, considere um sistema massa-mola-amortecedor. Sua posição  $y(t)$  é solução da EDO

$$my'' = -ky - by'$$

que é de 2ª ordem na posição. Introduzindo a velocidade  $v(t)$  como nova função incógnita, temos que

$$v(t) = y'(t)$$

de modo que o par posição  $y(t)$  e velocidade  $v(t)$  é solução do sistema de EDOs

$$\begin{cases} mv' = -ky - bv \\ y' = v \end{cases}$$

que é um sistema de 1ª ordem na posição e na velocidade.

Podemos usar essa mesma ideia para transformar qualquer EDO ou sistema de EDOs de ordem 2, 3 ou maior num sistema de EDOs de 1ª ordem com mais funções incógnitas: basta introduzir progressivamente as derivadas como novas funções incógnitas. Assim EDOs de todas as ordens e os sistemas de EDOs de todas as ordens podem ser reduzidos a sistemas de EDOs de 1ª ordem (com mais funções incógnitas).

Para simplificar a exposição, de agora em diante, vamos considerar apenas sistemas de EDOs lineares homogêneos de coeficientes constantes.

### Exemplos

1) Considere a EDO de 3ª ordem

$$az''' + bz'' + cz' + dz = 0$$

Introduzindo  $y = z'$ , temos que

$$ay'' + by' + cy + dz = 0$$

introduzindo  $x = y'$ , temos que

$$ax' + bx + cy + dz = 0$$

Segue-se que EDO é equivalente ao sistema de 1ª ordem com três incógnitas

$$\begin{cases} ax' + bx + cy + dz = 0 \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}$$

2) O movimento de dois sistemas massa-mola acoplados é dado por um sistema de EDOs de 2ª ordem com duas incógnitas

$$\begin{cases} m_1 v_1' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 \\ m_2 v_2' = k_2 y_1 - k_2 y_2 \end{cases}$$

Introduzindo as velocidades  $v_1 = y_1'$  e  $v_2 = y_2'$ , temos que o sistema de 1ª ordem com quatro incógnitas

$$\begin{cases} m_1 v_1' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 \\ m_2 v_2' = k_2 y_1 - k_2 y_2 \\ y_1' = v_1 \\ y_2' = v_2 \end{cases}$$

Os exemplos anteriores podem ser escritos na forma

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

com mais incógnitas e mais equações lineares, caso haja necessidade. No caso de sistemas com coeficientes constantes, podemos falar de raízes características do sistema da seguinte maneira. Escrevendo o sistema com o operador de derivação  $D$

$$\begin{cases} Dx = ax + by \\ Dy = cx + dy \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} (a-D)x + by = 0 \\ cx + (d-D)y = 0 \end{cases}$$

Podemos interpretar esse último sistema como um sistema linear onde  $D$  aparece nos coeficientes. Imitando o método de Cramer, podemos isolar  $x$  aplicando  $(d-D)$  na primeira equação, aplicando multiplicação por  $-b$  na segunda equação e somando as equações

$$\begin{array}{rcl} (d-D)(a-D)x + (d-D)by & = & 0 \\ -bcx + -b(d-D)y & = & 0 \\ \hline ((d-D)(a-D) - bc)x & = & 0 \end{array}$$

Assim, temos que  $x$  satisfaz a EDO aumentada

$$((d-D)(a-D) - bc)x = 0$$

cujo polinômio característico

$$p(D) = ((d-D)(a-D) - bc) = \begin{vmatrix} (a-D) & b \\ c & (d-D) \end{vmatrix}$$

é dado pelo determinante dos coeficientes do último sistema. Análogamente, prova-se que  $y$  satisfaz a mesma EDO aumentada. Segue-se que as raízes características da EDO aumentada fornecem as soluções

do sistema: dizemos que essas raízes são as *raízes características do sistema*. Trocando  $D$  por uma variável  $\lambda$  no polinômio característico  $p(D)$  da equação aumentada, vemos que ele é o conhecido

$$\begin{vmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{vmatrix}$$

polinômio característico da matriz dos coeficientes  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ : suas raízes são denominados *autovalores* da matriz. Portanto, as raízes características de um sistema de 1ª ordem são os autovalores da matriz dos coeficientes.

### Exemplo

O movimento de um sistema massa-mola sem amortecimento e com  $m = k$  é dado pela EDO de 2ª ordem

$$y'' = -y$$

Introduzindo a velocidade  $v(t) = y'(t)$ , temos que o sistema de 1ª ordem

$$\begin{cases} v' = -y \\ y' = v \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seus autovalores são as raízes do polinômio característico

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

dadas por  $\pm i$  que são, portanto, as raízes características do sistema de 1ª ordem. Observe que essas são as raízes características da EDO original  $y'' = -y$ .

A mesma ideia funciona para sistemas com mais funções incógnitas:

raízes características de qualquer sistema linear de 1ª ordem  
são os autovalores da matriz dos coeficientes

Por exemplo, para encontrar as correntes numa rede elétrica de circuitos acoplados, obtemos o sistema de EDOs de 1ª ordem que modela essa rede elétrica, e encontramos os autovalores da matriz dos coeficientes desse sistema. Esse é um dos motivos por que autovalores são importantes nas aplicações.

## EXPONENCIAL DE MATRIZES

Considere o sistema de EDOs na forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Colocando

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

o sistema fica na forma

$$X'(t) = AX(t),$$

### Exemplo

O sistema linear de 1ª ordem para a posição e a velocidade do massa-mola com  $k = m$  é

$$\begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

Sabemos que a solução do PVI linear de 1ª ordem

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = c \end{cases}$$

onde  $a$  é constante, é dada pela exponencial

$$x(t) = e^{at} c$$

Isso sugere que a solução do PVI para o sistema de EDOs lineares de 1ª ordem

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = C \end{cases}$$

onde  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  é matriz constante, seja dada pela exponencial de matrizes

$$X(t) = e^{At} C$$

onde a condição inicial é  $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = C$ . O que seria a exponencial de uma matriz  $e^{At}$ ? Nada mais natural que a definir usando a série de potências da exponencial  $e^x$  trocando  $x$  por  $At$

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

onde  $A^2 = AA$ ,  $A^3 = AAA$ , ..., são as potências da matriz  $A$ , e  $I$  é a matriz identidade  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . É imediato que, para  $t = 0$ , temos  $e^0 = I$  e é possível provar que

$$\begin{aligned} (e^{At})' &= A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + A^4 \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= A \left( I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \\ &= Ae^{At} \end{aligned}$$

Concluimos que  $X(t) = e^{At}C$  satisfaz  $X(0) = C$  e  $X'(t) = AX(t)$ , como queríamos. Portanto, a exponencial de matrizes fornece a solução de um sistema linear de EDOs de 1ª ordem.

### Exemplo

Considere o sistema linear de 1ª ordem para a posição e a velocidade do massa-mola

$$\begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}$$

Para obter sua solução com a exponencial da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

primeiro calculamos as potências de  $A$ . Na verdade, basta calcular

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

de onde se segue que

$$A^0 = I \quad A^2 = -I \quad A^4 = A^2 A^2 = I \quad \dots$$

$$A^1 = A \quad A^3 = A^2 A = -A \quad A^5 = A^4 A = A \quad \dots$$

Portanto,  $e^{tA}$  é

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2!} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4!} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{4!} \end{pmatrix} + \dots \\ & + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{t^3}{3!} \\ -\frac{t^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t^5}{5!} \\ \frac{t^5}{5!} & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ & = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



e a solução do sistema com condição inicial  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  é dada por

$$e^{tA}C = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t) \\ c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

Observe que a posição é a segunda linha  $y(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$ , e a velocidade é a primeira linha  $v(t) = y'(t)$ .

A mesma ideia funciona para sistemas com mais funções incógnitas:

A solução do sistema linear de 1ª ordem  
 $X'(t) = AX(t)$  com condição inicial  $X(0) = C$   
 é dada pela exponencial de matrizes  $e^{tA}C$

A exponencial de matrizes é surpreendente e é uma ferramenta teórica importante. Porém, ela tem pouca importância prática, uma vez que, em geral, é difícil calcular as potências de uma matriz com muitas entradas.

## APÊNDICE

## A.1 REGRA DE CRAMER

Nesta seção, vamos apresentar a *Regra de Cramer*, que é um método para resolver sistemas lineares. Primeiro consideramos o caso dois por dois.

**Proposição A.1**

Se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

então o sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

possui uma única solução dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

### Prova:

Para obtermos  $x$ , primeiro multiplicamos a primeira linha do sistema por  $d$  e a segunda linha do sistema por  $b$ , de modo que

$$\begin{cases} adx + bdy = ed \\ bcx + bdy = fb \end{cases}$$

Depois, subtraindo a primeira linha menos a segunda, temos que

$$(ad - bc)x = ed - fb$$

de modo que

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Para obtermos  $y$ , primeiro multiplicamos a primeira linha do sistema por  $c$  e a segunda linha do sistema por  $a$ , de modo que

$$\begin{cases} acx + bcy = ce \\ acx + ady = af \end{cases}$$

Depois, subtraindo a segunda linha menos a primeira, temos que

$$(ad - bc)y = af - ce$$

de modo que

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

■

A seguir apresentamos o caso geral, cuja demonstração pode ser obtida de modo semelhante ao caso dois por dois, por meio de indução e da regra de Laplace para determinantes.

### Proposição A.2

Se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

então o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \cdots + \vdots = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

possui uma única solução dada por

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad \dots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

## A.2 EDO LINEAR DE ORDEM SUPERIOR

A teoria de EDOs de ordem superior é inteiramente análoga à teoria de EDOs de 2ª ordem. Uma EDO linear de ordem  $n$  pode ser colocada na forma

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

onde os  $a_k(t)$  e  $f(t)$  são funções contínuas de  $x$ . Sua equação *homôgenea associada* é dada por

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

Dividindo por  $a_n(t)$ , as equações acima podem ser colocadas na forma

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = g(t)$$

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0$$

onde

$$p_k(t) = \frac{a_k(t)}{a_n(t)}$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{a_n(t)}$$

são funções contínuas para todo  $t$  tal que  $a_n(t) \neq 0$ .

## SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

Assim como no caso de uma EDO linear homogênea de 2ª ordem, a solução geral de uma EDO linear homogênea de ordem superior é dada pela combinação linear

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , sempre que  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  forem soluções fundamentais. No caso de EDOs de 2ª ordem, temos que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais quando elas não são proporcionais, o que é o mesmo que

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$$

implicar que  $c_1 = c_2 = 0$ . No caso de EDOs de ordem superior, as soluções são fundamentais quando elas são *linearmente independentes*, ou seja, quando

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0$$

implicar que os  $c_k$  são todos nulos.

No caso de EDOs de 2ª ordem, podemos utilizar o Wronskiano

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

para determinar se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções fundamentais. No caso de EDOs de ordem superior, também podemos utilizar o Wronskiano

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

para determinar se  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  são soluções fundamentais.

A proposição a seguir generaliza um resultado do caso de EDOs de 2ª ordem e estabelece um fato de fundamental importância sobre o Wronskiano.

**Proposição A.3: Fórmula de Abel**

Sejam  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  soluções da EDO

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0$$

Então

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = ce^{-P_{n-1}(t)}$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e

$$\int p_{n-1}(t) dt = P_{n-1}(t) + C$$

**Prova:**

Por comodidade, vamos denotar o Wronskiano  $W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$  apenas por  $W(t)$ . Basta então provarmos que o Wronskiano satisfaz a seguinte EDO

$$W'(t) + p_{n-1}W(t) = 0$$

Vamos então calcular a derivada do Wronskiano

$$W'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h}$$

Primeiro vamos considerar o numerador do quociente de Newton, dado por

$$W(t+h) - W(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(t+h) & y_2(t+h) & \dots & y_n(t+h) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \dots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \dots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \dots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Vamos reescrever essa diferença como a seguinte soma telescópica

$$W(t+h) - W(t) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} y_1(t+h) & y_2(t+h) & \cdots & y_n(t+h) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \cdots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \cdots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} + \\
 &+ \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \cdots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} + \\
 &\vdots \\
 &+ \begin{vmatrix} y_1(t+h) & y_2(t+h) & \cdots & y_n(t+h) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \cdots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Para analisar essas diferenças vamos utilizar que o determinante é linear em cada linha. Temos então que



$$W(t+h) - W(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(t+h)-y_1(t) & y_2(t+h)-y_2(t) & \cdots & y_n(t+h)-y_n(t) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \cdots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t+h)-y_1'(t) & y_2'(t+h)-y_2'(t) & \cdots & y_n'(t+h)-y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} +$$

$$\vdots$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(t+h) & y_2(t+h) & \cdots & y_n(t+h) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \cdots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t+h)-y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t+h)-y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t+h)-\cdots y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Voltando ao quociente de Newton, dividimos por  $h$  o numerador  $W(t+h) - W(t)$  e, novamente utilizando a linearidade do determinante em cada linha, temos então que

$$\begin{aligned} & \frac{W(t+h) - W(t)}{h} = \\ & = \begin{vmatrix} \frac{y_1(t+h)-y_1(t)}{h} & \frac{y_2(t+h)-y_2(t)}{h} & \dots & \frac{y_n(t+h)-y_n(t)}{h} \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \dots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \dots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \dots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \frac{y_1'(t+h)-y_1'(t)}{h} & \frac{y_2'(t+h)-y_2'(t)}{h} & \dots & \frac{y_n'(t+h)-y_n'(t)}{h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t+h) & y_2^{(n-2)}(t+h) & \dots & y_n^{(n-2)}(t+h) \\ y_1^{(n-1)}(t+h) & y_2^{(n-1)}(t+h) & \dots & y_n^{(n-1)}(t+h) \end{vmatrix} + \\ & \vdots \\ & + \begin{vmatrix} y_1(t+h) & y_2(t+h) & \dots & y_n(t+h) \\ y_1'(t+h) & y_2'(t+h) & \dots & y_n'(t+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ \frac{y_1^{(n-1)}(t+h)-y_1^{(n-1)}(t)}{h} & \frac{y_2^{(n-1)}(t+h)-y_2^{(n-1)}(t)}{h} & \dots & \frac{y_n^{(n-1)}(t+h)-y_n^{(n-1)}(t)}{h} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A derivada é então obtida tomando-se o limite com  $h$  tendendo a zero, de modo que

$$\begin{aligned} W'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(t+h) - W(t)}{h} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

onde suprimimos a variável independente  $t$  por comodidade. Como todos os primeiros determinantes possuem linhas repetidas, eles são nulos, sobrando apenas o último determinante, de modo que

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Como  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  são soluções da EDO, segue-se que

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-1}y_1^{(n-1)} - \cdots - p_1y_1' - p_0y_1 & \cdots & -p_{n-1}y_n^{(n-1)} - \cdots - p_1y_n' - p_0y_n \end{vmatrix}$$

Segue-se então que

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-1}y_1^{(n-1)} & \cdots & -p_{n-1}y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-2}y_1^{(n-2)} - \cdots - p_1y_1' - p_0y_1 & \cdots & -p_{n-2}y_n^{(n-2)} - \cdots - p_1y_n' - p_0y_n \end{vmatrix}$$

O segundo determinante acima é nulo, pois sua última linha é combinação linear das linhas anteriores, de modo que

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-1}y_1^{(n-1)} & \cdots & -p_{n-1}y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Podemos então colocar  $-p_{n-1}$  multiplicando fora do determinante, de modo que

$$W'(t) = -p_{n-1} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_{n-1} W(t)$$

como queríamos demonstrar. ■

Vamos mostrar agora que a mesma relação entre as soluções serem fundamentais e seu Wronskiano não se anular, que é válida no caso de EDOs de 2ª ordem, também é válida no caso de EDOs de ordem superior.

#### Proposição A.4

Sejam  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  soluções da EDO

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0$$

Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (A)  $W(y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)) \neq 0$  para algum  $t_0$
- (B)  $W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \neq 0$  para todo  $t$
- (C)  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  são fundamentais

#### Prova:

Vamos mostrar que (A) é equivalente a (B) e, depois, que (B) é equivalente a (C).

Para mostrar que (A) e (B) são equivalentes, primeiro lembramos que

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = ce^{-P_{n-1}(t)}$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ . Segue-se então que

$$W(y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)) \neq 0$$

para algum  $t_0$ , é equivalente a

$$c \neq 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \neq 0$$

para todo  $t$ .

Para mostrar que (B) e (C) são equivalentes, basta lembrar que um determinante é não nulo se e só se suas colunas são linearmente independentes. ■

Finalmente vamos mostrar que a solução geral de uma EDO linear de ordem  $n$  é dada pela combinação linear de soluções fundamentais.

### Proposição A.5

Sejam  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  soluções fundamentais da EDO

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0$$

Então a solução geral da EDO é dada por

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

**Prova:**

Seja  $z(t)$  uma solução qualquer da EDO. Temos que

$$W(z(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = ae^{-P_{n-1}(t)}$$

para algum  $a \in \mathbb{R}$ , e que

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = be^{-P_{n-1}(t)} \neq 0$$

de modo que  $b \neq 0$ . O desenvolvimento do determinante que define o Wronskiano  $W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$  pela última linha por meio do método de Laplace, implica que deve existir pelo menos um subconjunto de  $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$  com  $n-1$  funções, cujo respectivo Wronskiano seja não nulo. Podemos supor então, sem perda de generalidade, que  $W(y_2(t), \dots, y_n(t))$  é não nulo. Relacionando as duas equações acima, temos que

$$W(z(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = \frac{a}{b} be^{-P_{n-1}(t)} = c_1 W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$$

onde  $c_1 = a/b$ . Segue-se também que

$$W(z(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) - c_1 W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) =$$

$$= \begin{vmatrix} z(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ z'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando  $c_1$  pela primeira coluna e usando que o determinante é linear em cada linha, temos que

$$\begin{vmatrix} z(t) - c_1 y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ z'(t) - c_1 y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{(n-1)}(t) - c_1 y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

Usando que um determinante é nulo quando suas colunas são linearmente dependentes, e também que  $y_2(t), \dots, y_n(t)$  são linearmente independentes, segue-se que a primeira coluna pode ser escrita como a combinação linear das demais, de modo que

$$\begin{aligned} z(t) - c_1 y_1(t) &= c_2(t) y_2(t) + \dots + c_n(t) y_n(t) \\ z'(t) - c_1 y_1'(t) &= c_2(t) y_2'(t) + \dots + c_n(t) y_n'(t) \\ &\vdots \\ z^{(n-2)}(t) - c_1 y_1^{(n-2)}(t) &= c_2(t) y_2^{(n-2)}(t) + \dots + c_n(t) y_n^{(n-2)}(t) \\ z^{(n-1)}(t) - c_1 y_1^{(n-1)}(t) &= c_2(t) y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t) y_n^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

onde  $c_2(t), \dots, c_n(t)$  são funções de  $x$ . Considerando as  $n - 1$  primeiras equações, temos que o determinante da matriz dos coeficientes é justamente o Wronskiano  $W(y_2(t), \dots, y_n(t))$  que supusemos acima ser diferente de zero. Pela regra de Cramer, essas  $n - 1$  equações determinam  $c_2(t), \dots, c_n(t)$  como o quociente de determinantes. Como cada determinante é um produto de funções deriváveis, pelas regras das derivadas do produto e do quociente, segue-se que  $c_2(t), \dots, c_n(t)$  também são deriváveis. Derivando-se as  $n - 1$  primeiras equações e comparando-se com as  $n - 1$  últimas equações sem derivar, obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} c_2'(t) y_2(t) + \dots + c_n'(t) y_n(t) &= 0 \\ c_2'(t) y_2'(t) + \dots + c_n'(t) y_n'(t) &= 0 \\ &\vdots \\ c_2'(t) y_2^{(n-2)}(t) + \dots + c_n'(t) y_n^{(n-2)}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Novamente, pela regra de Cramer, essas  $n - 1$  equações mostram que

$$c_2'(t) = \dots = c_n'(t) = 0$$

para todo  $x$ , de modo que  $c_2(t), \dots, c_n(t)$  são funções constantes. Segue-se então que

$$z(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)$$

como queríamos demonstrar. ■

## SOLUÇÃO DA NÃO HOMOGÊNEA

Assim como no caso de EDOs de 2ª ordem, a solução geral de uma EDO linear de ordem superior não homogênea será dada a partir da solução geral da sua homogênea associada por meio do método denominado de *Varição dos Parâmetros*.

### Passos

**1) Variar os parâmetros:** Tentar uma solução da EDO não homogênea da forma  $y(t) = c_1(t)y_1(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$ , substituindo os parâmetros  $c_1, \dots, c_n$  da solução geral  $c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t)$  da homogênea associada por funções  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ , que são as novas incógnitas.

**2) Determinar os parâmetros variáveis:** Determinar quais são as funções  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ , utilizando a EDO não homogênea. Uma vez que

$$y(t) = y_1(t)c_1(t) + \dots + y_n(t)c_n(t)$$

derivando essa combinação, segue-se que

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_1'(t)c_1(t) + \dots + y_n'(t)c_n(t) \\ &+ y_1(t)c_1'(t) + \dots + y_n(t)c_n'(t) \end{aligned}$$





podemos mostrar que

$$y(t) = y_1(t)c_1(t) + \cdots + y_n(t)c_n(t)$$

$$y'(t) = y_1'(t)c_1(t) + \cdots + y_n'(t)c_n(t)$$

$$y''(t) = y_1''(t)c_1(t) + \cdots + y_n''(t)c_n(t)$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$y^{(n-1)}(t) = y_1^{(n-1)}(t)c_1(t) + \cdots + y_n^{(n-1)}(t)c_n(t)$$

Derivando a última equação, temos que

$$y^{(n)}(t) = y_1^{(n)}(t)c_1(t) + \cdots + y_n^{(n)}(t)c_n(t) + y_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + \cdots + y_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)$$

Multiplicando essas equações pelos respectivos coeficientes, somando as equações, colocando  $c_1(t), \dots, c_n(t)$  em evidência, e usando que  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  são soluções da homogênea e que  $y(t)$  é solução da não homogênea, temos que

$$g(t) = y_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + \cdots + y_n^{(n-1)}(t)c_n'(t)$$

Obtemos então o seguinte sistema

$$y_1(t)c_1'(t) + \cdots + y_n(t)c_n'(t) = 0$$

$$y_1'(t)c_1'(t) + \cdots + y_n'(t)c_n'(t) = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$y_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) + \cdots + y_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) = 0$$

$$y_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + \cdots + y_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = g(t)$$

que determina  $c'_1(t), \dots, c'_n(t)$ . Temos que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é o Wronskiano das soluções fundamentais, dado por

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) & \cdots & y'_n(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

que é não nulo, uma vez que  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  são soluções fundamentais. Utilizando a regra de Cramer, determinamos  $c'_1(t), \dots, c'_n(t)$  e, integrando, obtemos  $c_1(t), \dots, c_n(t)$ .

## PROBLEMA DE VALORES INICIAIS

Assim como no caso de EDOs de 2ª ordem, um PVI para uma EDO linear de ordem  $n$  não homogênea possui uma única solução, desde que sejam considerados valores iniciais para a função incógnita e suas derivadas até a ordem  $n - 1$ .

### Proposição A.6

Sejam  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  valores dados e suponha que a EDO possui soluções fundamentais. Então o PVI linear

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) = y'_0 \quad \cdots \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

possui uma única solução.

A demonstração dessa proposição é uma adaptação imediata da demonstração do caso de 2ª ordem dada na Proposição 1.14. Os valores iniciais na proposição acima foram dados no instante  $t = 0$  por conveniência: o resultado continua válido se os valores iniciais forem dados em qualquer outro instante onde os coeficientes da EDO estejam definidos.

## A.3 SEQUÊNCIA MONÓTONAS

Nesta seção, demonstramos a seguinte proposição.

### Proposição A.7

Seja  $a_n$  uma sequência monótona. Então

- (A) Se  $a_n$  é limitada, então  $a_n \rightarrow a$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ , e
- (B) Se  $a_n$  não é limitada, então  $a_n \rightarrow \infty$  ou  $a_n \rightarrow -\infty$ .

### Prova:

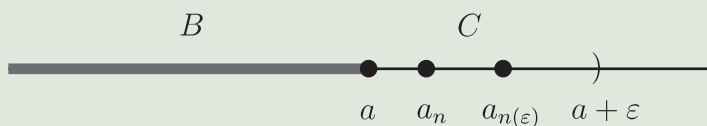
Para o item A, vamos supor que  $a_n$  é não crescente. Definimos o conjunto

$$C = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

e o conjunto

$$B = \{b : b \leq a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

ilustrados pela figura abaixo.



Temos que  $C$  é não vazio e, como  $a_n$  é limitada, temos que  $B$  também é não vazio. Além disso, por definição, temos que  $B \leq C$ .

Logo, pela completude de  $\mathbb{R}$ , existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $B \leq a \leq C$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , temos que  $a + \varepsilon$  não pertence a  $B$ . Logo, existe  $n(\varepsilon)$  tal que

$$a_{n(\varepsilon)} < a + \varepsilon.$$

Como  $a \leq C$  e como  $a_n$  é não crescente, temos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \implies a \leq a_n \leq a_{n(\varepsilon)} < a + \varepsilon.$$

Portanto

$$n \geq n(\varepsilon) \implies 0 \leq a_n - a < \varepsilon,$$

mostrando que  $a_n \rightarrow a$ . O caso em que  $a_n$  é não decrescente pode ser facilmente obtido do caso demonstrado acima, considerando-se a sequência não crescente  $-a_n$ .

Para o item B, vamos supor que  $a_n$  é não decrescente. Como  $a_n$  não é limitada, para todo  $R > 0$ , existe um  $m$  tal que  $R < a_m$ . Portanto, definindo  $n(R) = m$ , segue-se que

$$n \geq n(R) \implies R < a_m \leq a_n$$

mostrando que  $a_n \rightarrow \infty$ . O caso em que  $a_n$  é não crescente pode ser facilmente obtido do caso demonstrado acima, considerando-se a sequência não decrescente  $-a_n$ . ■

## A.4 INTEGRAL IMPRÓPRIA

Temos que a *integral imprópria* de  $f$  de  $a$  até  $\infty$  é dada por

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

e pode ser interpretada como a área da região ilimitada entre o gráfico de  $f(x)$  e o eixo  $x$ , para  $x \geq a$ . Se a integral indefinida de  $f$  é dada por

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

segue-se que

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [F(x)]_a^t = [F(x)]_a^\infty$$

Para funções positivas, esse limite sempre existe, podendo ser finito ou infinito.

### Exemplos

1) Temos que

$$\int_0^\infty \cos(x) dx$$

não existe, uma vez que

$$\int \cos(x) dx = \text{sen}(x) + C$$

e que o limite

$$[\text{sen}(x)]_0^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{sen}(t) - \text{sen}(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{sen}(t)$$

não existe.

2) Temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty,$$

uma vez que

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

e que o limite

$$[\log|x|]_1^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} (\log(t) - \log(1)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log(t) = \infty.$$

3) Temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1,$$

uma vez que

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

e que o limite

$$\left[ -\frac{1}{x} \right]_1^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} \right) = 1.$$

As regras de integração permanecem válidas para as integrais impróprias, desde que os limites existam.

### Proposição A.8

Temos que

$$\int_a^\infty f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^\infty - \int_a^\infty g'(x)f(x) dx$$

e também que

$$\int_a^\infty f(bx) dx = \frac{1}{b} \int_{ab}^\infty f(x) dx$$

para todo  $b > 0$ .

### Prova:

Temos que

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) dx$$

e que

$$\int_a^t f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^t - \int_a^t g'(x)f(x) dx.$$

Fazendo  $t \rightarrow \infty$ , segue-se que

$$\int_a^\infty f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^\infty - \int_a^\infty g'(x)f(x) dx.$$

Por substituição, fazendo  $t = bx$ , temos que  $dt = bdx$  e que

$$\int f(bx) dx = \frac{1}{b} \int f(t) dt.$$

Temos então que

$$\int_a^\infty f(bx) dx = \frac{1}{b} \int_{ab}^\infty f(t) dt,$$

uma vez que  $t = ab$ , quando  $x = a$ , e que  $t \rightarrow \infty$ , quando  $x \rightarrow \infty$ .

Como

$$\frac{1}{b} \int_{ab}^\infty f(t) dt = \frac{1}{b} \int_{ab}^\infty f(x) dx,$$

segue-se que

$$\int_a^\infty f(bx) dx = \int_{ab}^\infty f(x) dx.$$



## A.5 EXPONENCIAL COMPLEXA

Queremos definir a exponencial *complexa*  $e^{(a+ib)t}$ , onde  $a, b, t \in \mathbb{R}$ . Vamos primeiro considerar o caso particular puramente imaginário. A partir da série de potências de  $e^t$ , dada por

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$$



podemos tentar obter a série de potências de  $e^{it}$ , trocando  $t$  por  $it$ , de modo que

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \dots$$

Agrupando as potências pares e as potências ímpares e colocando  $i$  em evidência nas potências ímpares, temos que

$$e^{it} = \left( 1 + \frac{i^2 t^2}{2!} + \frac{i^4 t^4}{4!} + \dots \right) + i \left( t + \frac{i^2 t^3}{3!} + \frac{i^4 t^5}{5!} + \dots \right)$$

de modo que

$$e^{it} = \left( 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) + i \left( t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right)$$

Lembrando que as séries de potências do cosseno e do seno são dadas por

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

e por

$$\text{sen}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots$$

segue-se que

$$e^{it} = \cos(t) + i \text{sen}(t)$$

Podemos então definir a exponencial complexa por

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt}$$

de modo que

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} \cos(bt) + i e^{at} \text{sen}(bt)$$

**Exemplos**

1) Temos que

$$\begin{aligned}e^{(2+0i)t} &= e^{2t} \cos(0t) + i e^{2t} \operatorname{sen}(0t) \\ &= e^{2t}\end{aligned}$$

2) Temos que

$$\begin{aligned}e^{(0+3i)t} &= e^{0t} \cos(3t) + i e^{0t} \operatorname{sen}(3t) \\ &= \cos(3t) + i \operatorname{sen}(3t)\end{aligned}$$

3) Temos que

$$\begin{aligned}e^{(2+3i)t} &= e^{2t} \cos(3t) + i e^{2t} \operatorname{sen}(3t) \\ &= e^{2t} e^{3it}\end{aligned}$$

Vamos mostrar a seguir que, quando  $a + ib$  é uma raiz característica de uma dada EDO homogênea, a exponencial  $e^{(a+ib)t}$  é uma solução complexa dessa EDO e que sua parte real e sua parte imaginária são soluções reais dessa EDO.

## FUNÇÕES COM VALORES COMPLEXOS

Uma *função com valores complexos* é uma função da forma

$$y(t) = f(t) + i g(t)$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $f$  e  $g$  são funções com valores reais. A derivada dessa função com valores complexos é definida como

$$y'(t) = f'(t) + i g'(t)$$

**Exemplo**

Temos que

$$\begin{aligned}
 (e^{it})' &= (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t))' \\
 &= -\operatorname{sen}(t) + i \cos(t) \\
 &= i(\cos(t) + i \operatorname{sen}(t)) \\
 &= ie^{it}
 \end{aligned}$$

O resultado seguinte mostra que a regra da derivada do produto também é válida para funções a valores complexos.

**Proposição A.9**

Se  $y(t)$  e  $z(t)$  são funções com valores complexos e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então

$$(1) \quad (y(t)z(t))' = y'(t)z(t) + z'(t)y(t)$$

$$(2) \quad (\alpha y(t))' = \alpha y'(t)$$

**Prova:**

(1) Por comodidade, vamos suprimir a variável independente da notação. Considere

$$y = f + ig, \quad z = u + iv$$

de modo que

$$y' = f' + ig', \quad z' = u' + iv'$$

Temos então que

$$yz = fu - gv + i(fv + gu)$$

de modo que

$$(yz)' = f'u + u'f - (g'v + v'g) + i(f'v + v'f + g'u + u'g)$$

Por outro lado, temos que

$$y'z = f'u - g'v + i(f'v + g'u)$$

e que

$$yz' = fu' - gv' + i(fv' + gu')$$

Somando essas duas equações, temos que

$$y'z + yz' = (yz)'$$

(2) Utilizando o item anterior e o fato de a derivada de constante ser nula, temos que

$$(\alpha y(t))' = (\alpha)'y(t) + \alpha y'(t) = \alpha y'(t)$$



### Exemplo

Temos que

$$\begin{aligned} (e^{it})'' &= (ie^{it})' \\ &= i(e^{it})' \\ &= i(ie^{it}) \\ &= -e^{it} \end{aligned}$$

de modo que  $y(t) = e^{it}$  é uma solução complexa da EDO

$$y''(t) + y(t) = 0$$

Mostramos a seguir que a regra da derivada da exponencial também é válida no caso complexo.

### Proposição A.10

Temos que

$$\left( e^{(a+ib)t} \right)' = (a+ib)e^{(a+ib)t}$$

### Prova:

Uma vez que

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt}$$

pela regra da derivada do produto, temos que

$$\left( e^{(a+ib)t} \right)' = (e^{at})' e^{ibt} + \left( e^{ibt} \right)' e^{at}$$

Por outro lado, temos que

$$\left( e^{at} \right)' = a e^{at}$$

e que

$$\begin{aligned} \left( e^{ibt} \right)' &= (\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt))' \\ &= -b \operatorname{sen}(bt) + ib \cos(bt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ib(\cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt)) \\
 &= ibe^{ibt}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 (e^{(a+ib)t})' &= (ae^{at})e^{ibt} + (ibe^{ibt})e^{at} \\
 &= (a+ib)e^{at}e^{ibt} \\
 &= (a+ib)e^{(a+ib)t}
 \end{aligned}$$

■

Finalmente, mostramos a seguir que a parte real e a parte imaginária de soluções com valores complexos são soluções com valores reais.

### Proposição A.11

Se

$$y(t) = f(t) + ig(t)$$

é uma solução da homogênea

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0$$

onde  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , então sua parte real e sua parte imaginária

$$f(t) \quad \text{e} \quad g(t)$$

também são soluções dessa homogênea.

**Prova:**

Temos que

$$\begin{aligned}y(t) &= f(t) + ig(t) \\y'(t) &= f'(t) + ig'(t) \\y''(t) &= f''(t) + ig''(t)\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira linha por  $a_0$ , a segunda por  $a_1$  e a terceira por  $a_2$ , temos que

$$\begin{aligned}a_0y(t) &= a_0f(t) + ia_0g(t) \\a_1y'(t) &= a_1f'(t) + ia_1g'(t) \\a_2y''(t) &= a_2f''(t) + ia_2g''(t)\end{aligned}$$

Somando essas equações e usando que  $y(t)$  é solução da homogênea, temos que

$$0 = \begin{pmatrix} a_0f(t) \\ +a_1f'(t) \\ +a_2f''(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} a_0g(t) \\ +a_1g'(t) \\ +a_2g''(t) \end{pmatrix}$$

Como a parte real e a parte imaginária têm que ser nulas, segue-se que  $f(t)$  e  $g(t)$  também são soluções dessa homogênea. ■

## A.6 DERIVADA DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesta seção, completamos a prova de que a derivada de uma série de potências é a série das derivadas. Para isso, precisamos do seguinte resultado.

### Lema A.12

Se  $|s|, |t| \leq r$ , temos que

$$|s^m - t^m| \leq |s - t|nr^{m-1}$$

**Prova:**

É fácil verificar que

$$s^m - t^m = (s - t)(s^{m-1} + s^{m-2}t + \dots + st^{m-2} + t^{m-1})$$

Agora, utilizando a desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} |s^m - t^m| &= |s - t| |s^{m-1} + s^{m-2}t + \dots + st^{m-2} + t^{m-1}| \\ &\leq |s - t| (|s^{m-1}| + |s^{m-2}t| + \dots + |st^{m-2}| + |t^{m-1}|) \end{aligned}$$

Para cada parcela no lado direito, temos que

$$\begin{aligned} |s^{m-k}t^{k-1}| &= |s|^{m-k} |t|^{k-1} \\ &\leq r^{m-k} r^{k-1} \\ &= r^{m-1} \end{aligned}$$

uma vez que  $|s|, |t| \leq r$ . Segue-se então que

$$\begin{aligned} |s^m - t^m| &\leq |s - t| (|s^{m-1}| + |s^{m-2}t| + \dots + |st^{m-2}| + |t^{m-1}|) \\ &\leq |s - t| (r^{m-1} + r^{m-1} + \dots + r^{m-1} + r^{m-1}) \\ &= |s - t| m r^{m-1} \end{aligned}$$

como desejávamos. ■

Podemos então provar a seguinte proposição.

**Proposição A.13**

Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  uma série de potências com raio  $R > 0$ . Se  $|h_n| < |h|$ , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x + h_n)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

para todo  $x \in (-R, R)$ .



**Prova:**

Temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x + h_n)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n ((x + h_n)^{n-1} - x^{n-1}) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n |(x + h_n)^{n-1} - x^{n-1}| \end{aligned}$$

Como  $x \in (-R, R)$ , temos que  $|x| < r$ , para algum  $r < R$ . Para  $h$  suficientemente pequeno, temos que  $|x + h_n| < r$ , uma vez que  $|h_n| < |h|$ . Usando o lema, com  $s = x + h_n$ , com  $t = x$  e com  $m = n - 1$ , segue-se que

$$\begin{aligned} |(x + h_n)^{n-1} - x^{n-1}| &\leq |(x + h_n) - x|(n-1)r^{n-2} \\ &= |h_n|(n-1)r^{n-2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x + h_n)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n |h_n| (n-1) r^{n-2}$$

Usando que  $|h_n| < |h|$ , segue-se que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x + h_n)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n |h| (n-1) r^{n-2} \\ &= |h| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n (n-1) r^{n-2} \end{aligned}$$

Logo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x + h_n)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right| \leq |h| L$$

onde  $L = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n (n-1) r^{n-2}$  não depende de  $h$ . O resultado segue então por sanduíche. ■

## A.7 SOLUÇÕES POR SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesta seção, mostramos que todo PVI linear cujos coeficientes são séries de potências tem solução por séries de potências. Primeiro mostramos que o produto de duas séries de potências é uma série de potências.

### Proposição A.14

Sejam  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$  duas séries que convergem absolutamente.

Então

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n$$

onde

$$e_n = \sum_{k=0}^n c_{n-k} d_k.$$

### Prova:

Vamos primeiro mostrar que

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} |d_n| \right) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n,$$

onde

$$E_n = \sum_{k=0}^n |c_{n-k}| |d_k|$$

De fato, consideramos a seguinte desigualdade

$$\left( \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} |c_n| \right) \left( \sum_{n=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} |d_n| \right) \leq \sum_{n=0}^m E_n \leq \left( \sum_{n=0}^m |c_n| \right) \left( \sum_{n=0}^m |d_n| \right),$$

onde  $\lfloor x \rfloor$  denota a parte inteira de  $x$ . Essa desigualdade pode ser visualizada por meio da seguinte matriz. O primeiro termo da desigual-

dade é a soma das entradas da submatriz  $[m/2]$  por  $[m/2]$ . O termo intermediário é a soma das entradas do triângulo de vértices  $|c_0||d_0|$ ,  $|c_0||d_m|$  e  $|c_m||d_0|$ . Já o terceiro termo da desigualdade é a soma de todas as entradas da matriz  $m$  por  $m$ .

$$\begin{pmatrix} |c_0||d_0| & \cdots & |c_0||d_{[m/2]}| & \cdots & |c_0||d_m| \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |c_{[m/2]}||d_0| & \cdots & |c_{[m/2]}||d_{[m/2]}| & \cdots & |c_{[m/2]}||d_m| \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |c_m||d_0| & \cdots & |c_m||d_{[m/2]}| & \cdots & |c_m||d_m| \end{pmatrix}$$

Tomando o limite de  $m$  tendendo para  $\infty$  na desigualdade acima e utilizando a regra do limite do produto e a regra do sanduíche, obtemos o resultado desejado, uma vez que  $[m/2]$  também tende para  $\infty$ .

Considerando a diferença entre a soma dos elementos da matriz  $m$  por  $m$  e o triângulo, temos que

$$\left( \sum_{n=0}^m |c_n| \right) \left( \sum_{n=0}^m |d_n| \right) - \sum_{n=0}^m E_n = \sum_{n=1}^m \sum_{k=m-n+1}^m |c_n||d_k|,$$

Agora consideramos a situação sem os valores absolutos.

$$\begin{pmatrix} c_0 d_0 & \cdots & c_0 d_{[m/2]} & \cdots & c_0 d_m \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{[m/2]} d_0 & \cdots & c_{[m/2]} d_{[m/2]} & \cdots & c_{[m/2]} d_m \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_m d_0 & \cdots & c_m d_{[m/2]} & \cdots & c_m d_m \end{pmatrix}$$

Da mesma forma que no caso acima, temos que

$$\left( \sum_{n=0}^m c_n \right) \left( \sum_{n=0}^m d_n \right) - \sum_{n=0}^m e_n = \sum_{n=1}^m \sum_{k=m-n+1}^m c_n d_k,$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$\left| \sum_{n=1}^m \sum_{k=m-n+1}^m c_n d_k \right| \leq \sum_{n=1}^m \sum_{k=m-n+1}^m |c_n| |d_k|$$

de modo que

$$\left| \left( \sum_{n=0}^m c_n \right) \left( \sum_{n=0}^m d_n \right) - \sum_{n=0}^m e_n \right| \leq \left( \sum_{n=0}^m |c_n| \right) \left( \sum_{n=0}^m |d_n| \right) - \sum_{n=0}^m E_n$$

O resultado segue então por sanduíche. ■

Como consequência da proposição acima, temos que o produto de duas séries de potências é uma série de potências.

### Corolário A.15

Sejam  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$  duas séries que convergem absolutamente. Então

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$$

onde

$$e_n = \sum_{k=0}^n c_{n-k} d_k$$

### Prova:

Segue-se da proposição anterior e do fato de que

$$\sum_{k=0}^n c_{n-k} x^{n-k} d_k x^k = \left( \sum_{k=0}^n c_{n-k} d_k \right) x^n$$

■

Agora considere o seguinte PVI linear de segunda ordem

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y'(x) + p(x)y(x) = 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

### Proposição A.16

Se  $p(x)$  e  $q(x)$  são séries de potências convergindo absolutamente em  $x = 1$ , então o PVI possui solução por série de potências que converge pelo menos para  $|x| < 1$ .

### Prova:

Escrevendo

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

temos, por hipótese, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty$$

de modo que  $|p_n|$  e  $|q_n|$  tendem para 0. Segue-se que essas sequências são limitadas, de modo que existe  $M > 0$  tal que  $|p_n|, |q_n| \leq M$  para todo  $n \geq 0$ . Considere

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Pela regra do produto de séries de potências, segue-se que

$$y(x)p(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_k p_{n-k} \right) x^n$$

e que

$$\begin{aligned} y'(x)q(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)q_{n-k} \right) x^n \end{aligned}$$

Uma vez que

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

para que  $y(x)$  seja solução do PVI, somando as equações acima, temos que

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)q_{n-k} + c_k p_{n-k} \right) x^n$$

Segue-se então a seguinte equação de recorrência

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) = - \sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)q_{n-k} + c_k p_{n-k}$$

para todo  $n \geq 0$ . Essa equação determina os coeficientes  $c_n$ , uma vez que

$$c_0 = y(0) = y_0 \quad \text{e} \quad c_1 = y'(0) = y_1$$

onde utilizamos as condições iniciais. Resta mostrar que a série de  $y(x)$  converge para  $|x| < 1$ . Vamos definir uma sequência  $C_n \geq 0$  tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |C_n x^n| < \infty$$

para  $|x| < 1$ . Para isso, definimos então

$$C_0 = |c_0| \quad \text{e} \quad C_1 = |c_1|$$

e definimos os próximos termos por meio da seguinte relação de recorrência

$$C_{n+2}(n+2)(n+1) = M \left( C_{n+1} + \sum_{k=0}^n C_{k+1}(k+1) + C_k \right)$$

Vamos mostrar por indução que  $|c_n| \leq C_n$ , para todo  $n \geq 0$ . Supondo que  $|c_k| \leq C_k$ , para todo  $k = 0, 1, \dots, n+1$ , tomamos o valor absoluto em ambos os lados da equação da recorrência, de modo que

$$\begin{aligned} |c_{n+2}|(n+2)(n+1) &= \left| \sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)q_{n-k} + c_k p_{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |c_{k+1}|(k+1)|q_{n-k}| + |c_k| |p_{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_{k+1}(k+1)M + C_k M \\ &\leq C_{n+2}(n+2)(n+1) \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade triangular e que  $|p_n|, |q_n| \leq M$  para todo  $n \geq 0$ . Cancelando o fator  $(n+2)(n+1)$  no primeiro e último termo das desigualdades acima, temos que  $|c_{n+2}| \leq C_{n+2}$ , completando a indução. Segue-se então que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |C_n x^n|$$

restando mostrar que o segundo termo dessa desigualdade é finito, para  $|x| < 1$ . Para isso, basta mostrarmos que o raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$  é igual a 1. Pelo teste da razão, isso é equivalente a mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 1$$

Pela equação de recorrência de  $C_n$ , temos que

$$\begin{aligned}
 C_{n+1}(n+1)n &= M \left( C_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{k+1}(k+1) + C_k \right) \\
 &= M \left( C_n + C_n n + C_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_{k+1}(k+1) + C_k \right) \\
 &= MC_n(n+1) + M \left( C_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_{k+1}(k+1) + C_k \right) \\
 &= MC_n(n+1) + C_n n(n-1) \\
 &= C_n(M(n+1) + n(n-1))
 \end{aligned}$$

Segue-se então que

$$\lim \frac{C_{n+1}}{C_n} = \lim \frac{M}{n} + \frac{n-1}{n+1} = 1$$

como queríamos. ■

Como consequência da proposição acima, obtemos o resultado desejado desta seção.

### Proposição A.17

Se  $p(x)$  e  $q(x)$  são séries de potências, então todo PVI possui uma solução  $y(x)$  dada por uma série de potências que converge pelo menos em  $(-R, R)$ , onde  $R$  é o menor dos raios de convergência de  $p(x)$  e  $q(x)$ .

**Prova:**



Considere  $0 < r < R$  arbitrário. Temos que  $y(x)$  é solução do PVI

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y'(x) + p(x)y(x) = 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

se e só se  $z(t) = y(rt)$  é solução do PVI

$$\begin{cases} z''(t) + rq(rt)z'(t) + r^2p(rt)z(t) = 0 \\ z(0) = y_0, \quad z'(0) = y_1 \end{cases}$$

onde  $rq(rt)$  e  $r^2p(rt)$  são séries de potências que convergem absolutamente em  $t = 1$ . Pela proposição anterior,  $z(t)$  é uma série de potências que converge pelo menos para  $|t| < 1$ . Portanto  $y(x) = z(x/r)$  é uma série de potências que converge pelo menos para  $|x/r| < 1$ . Como  $0 < r < R$  é arbitrário, segue-se que  $y(x)$  é uma série de potências que converge pelo menos para  $|x| < R$ . ■

## REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, Hamilton. *Um Curso de Cálculo* – vol. 4. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 2002.

KREIDER, Donald et al.: *Introdução à análise linear* – vol. 1. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

SANTOS, Reginaldo: *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa UFMG, 2011.

ZILL, Dennis: *Equações Diferenciais - com aplicações em modelagem*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Este livro foi impresso no sistema *offset*, sobre papel *offset* 75g/m<sup>2</sup>, com capa em papel cartão supremo 250 g/m<sup>2</sup>.

# Equações diferenciais ordinárias e séries de potências

As equações que descrevem o movimento e, de maneira mais geral, taxas de variação, são denominadas equações diferenciais ordinárias (EDOs). Neste livro, apresentamos uma introdução às EDOs na qual as séries de potências aparecem pela necessidade de resolver EDOs de coeficientes variáveis. Buscamos simplicidade e rigor, numa exposição autocontida, ilustrada por mais de 60 figuras e que dá ênfase aos conceitos essenciais e, ao mesmo tempo, a demonstrações acessíveis.

Nas EDOs de 1ª ordem, focamos apenas nas separáveis e nas lineares, que são os casos de maior aplicação e necessários para o desenvolvimento da teoria de ordem superior. O restante do livro é dedicado à teoria das EDOs lineares, começando pelas EDOs de 2ª ordem. Obtemos a solução geral da homogênea via fórmula de Abel e, para coeficientes constantes, obtemos a existência de soluções fundamentais por meio do operador de derivação. No caso de coeficientes variáveis, primeiro procuramos soluções polinomiais, o que nos leva a equações de recorrência. Em seguida consideramos soluções dadas por séries de potências e questões relacionadas à convergência.

Por último, consideramos equações de ordem superior e sistemas, focando no caso de coeficientes constantes. Usamos o operador de derivação para resolver as EDOs homogêneas de ordem superior e obter de forma rigorosa o método dos coeficientes a determinar. Usamos a transformada de Laplace para resolver EDOs e sistemas de EDOs com coeficientes constantes.



EDITORA



UnB

ISBN 978-85-230-1016-4



9 788523 010164